Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

О.Ю. Чигирёва

РЯДЫ ФУРЬЕ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

О.Ю. Чигирёва

РЯДЫ ФУРЬЕ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Методические указания
к выполнению домашнего задания

Под редакцией *А.Н. Канатникова*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2010

УДК 517.52
ББК 22.161.5
Ч-58

Рецензент *Е.А. Власова*

Чигирёва О.Ю.

Ч-58 Ряды Фурье. Преобразование Фурье: метод. указания / О.Ю. Чигирёва ; под ред. А.Н. Канатникова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 51, [1] с. : ил.

Методические указания содержат краткий теоретический материал, необходимый для выполнения домашнего задания по теме «Ряды Фурье. Преобразование Фурье». Подробно разобраны примеры решения задач, а также приведены задачи для самостоятельной работы и условия домашнего задания.

Для самостоятельной работы студентов 2-го курса, обучающихся по специальностям «Лазерные и оптико-электронные системы», «Оптико-электронные приборы научных исследований».

УДК 517.52
ББК 22.161.5

Учебное издание

Чигирёва Ольга Юрьевна

**РЯДЫ ФУРЬЕ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ**

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *Г.С. Беляева*
Компьютерная верстка *А.Ю. Ураловой*

Подписано в печать 11.10.2010. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,02. Тираж 300 экз. Изд. № 27. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

1. РЯДЫ ФУРЬЕ

1.1. Ряды Фурье по ортогональным системам

Определение. ***Евклидовым пространством*** E называют линейное пространство, в котором задано скалярное умножение, т. е. правило, ставящее в соответствие каждой паре элементов $f,\ g \in E$ число (f, g), называемое ***скалярным произведением*** и удовлетворяющее аксиомам скалярного умножения:

1) $(f, g) = (g, f)$;
2) $(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi)$;
3) $(\lambda f, g) = \lambda(f, g), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
4) $(f, f) \geq 0$, причем $(f, f) = 0$ только при $f = 0$.

Для любых элементов $f, g \in E$ справедливо ***неравенство Коши – Буняковского:***

$$(f, g)^2 \leq (f, f)(g, g).$$

Мерой величины элементов линейного пространства является норма.

Определение. Функцию, заданную на линейном пространстве L и ставящую в соответствие каждому элементу $f \in L$ действительное число $\|f\|$, называют ***нормой***, если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:

1) $\|f\| \geq 0$, причем $\|f\| = 0$ только при $f = 0$;
2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \lambda \in \mathbb{R}$;
3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (***неравенство треугольника***).

Определение. Линейное пространство, в котором задана норма, называют ***нормированным пространством***.

Евклидово пространство E можно рассматривать как нормированное пространство, если задать в нем норму исходя из скалярного умножения:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}\,,\ f \in E.$$

Такую норму называют ***евклидовой нормой***.

Определение. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов нормированного пространства L называют ***сходящейся по норме*** к элементу $f \in L$, если

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0\,.$$

При этом элемент f называют ***пределом последовательности*** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нормированном пространстве L и используют следующее обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

В нормированном пространстве L сохраняются основные ***свойства сходящихся последовательностей***:

1) предел $f \in L$ сходящейся по норме последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ единственный;

2) если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по норме к элементу $f \in L$, то и любая ее подпоследовательность также сходится к элементу f;

3) если последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся по норме в L, а числовая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся, то последовательности $\{f_n \pm g_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\alpha_n f_n\}_{n=1}^{\infty}$ также сходятся по норме в L, и справедливы следующие равенства:

$$\lim_{n\to\infty}(f_n \pm g_n) = \lim_{n\to\infty} f_n \pm \lim_{n\to\infty} g_n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n f_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n \cdot \lim_{n\to\infty} f_n .$$

Определение. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов нормированного пространства L. Выражение вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ называют ***рядом элементов нормированного пространства*** L, а сумму $S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$, называют n*-й* ***частичной суммой этого ряда***.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ элементов нормированного пространства L называют ***сходящимся по норме*** в L, если в L сходится последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм. При этом предел $S \in L$ последовательности частичных сумм называют ***суммой ряда***.

Определение. Два элемента $f, g \in E$ называют ***ортогональными***, если $(f, g) = 0$.

Определение. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов евклидова пространства E называют ***ортогональной системой***, если элементы этой последовательности попарно ортогональны.

Утверждение. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональная система в евклидовом пространстве E. Если элемент $f \in E$ может быть представлен в виде сходящегося ряда

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n ,$$

то коэффициенты α_n этого ряда определяются по формуле

$$\alpha_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, n \in \mathbb{N}.$$

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ с коэффициентами $c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$, называют ***рядом Фурье*** элемента $f \in E$ по ортогональной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, а числа c_n называют ***коэффициентами Фурье*** элемента $f \in E$ по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ — ортогональная система в евклидовом пространстве E и элемент $f \in E$. Поставим ***следующую задачу***: при заданном n определить, при каких значениях коэффициентов $\alpha_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n}$ линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ имеет наименьшее отклонение от элемента $f \in E$, т. е. при каких значениях $\alpha_k, k = \overline{1,n},$ величина $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|$ достигает своего минимума.

Вычислим квадрат нормы этой величины:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right).$$

В силу аксиом скалярного умножения имеем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \varphi_m \right) =$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f, \varphi_k) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \varphi_m \right).$$

Замечая, что $(f, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|^2$, где c_k — коэффициенты Фурье элемента $f \in E$, и учитывая ортогональность системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$, получаем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Дополняя до полного квадрата, приходим к следующему равенству:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k - c_k\right)^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Таким образом, от коэффициентов $\alpha_k, k = \overline{1,n},$ зависит только сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\alpha_k - c_k\right)^2 \|\varphi_k\|^2$. Так как эта сумма неотрицательна, то она достигает своего минимального значения, обращаясь в нуль при $\alpha_k = c_k, k = \overline{1,n}$. Следовательно,

$$\min_{\alpha_k \in \mathbb{R}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

при $\alpha_k = c_k, k = \overline{1,n}$.

В результате видим, что при фиксированном n среди всех линейных комбинаций вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ минимальное отклонение от элемента $f \in E$ имеет n-я частичная сумма ряда Фурье, т. е.

$$\min_{\alpha_k \in \mathbb{R}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|^2$$

достигается при $\alpha_k = \dfrac{\left(f, \varphi_k\right)}{\|\varphi_k\|^2}, k = \overline{1,n}$.

Теорема. Для любой ортогональной системы $\left\{\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ в евклидовом пространстве E и любого элемента $f \in E$ имеет место ***неравенство Бесселя***:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 \le \|f\|^2,$$

где c_n — коэффициенты Фурье элемента $f \in E$ по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение. В бесконечномерном евклидовом пространстве E ортогональную систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют ***замкнутой***, если для любого $f \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $m \in \mathbb{N}$ и такой набор чисел $\alpha_n \in \mathbb{R}, n = \overline{1,m}$, что

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varphi_n \right\| < \varepsilon.$$

Теорема. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональная система в евклидовом пространстве E. Для того чтобы для элемента $f \in E$ выполнялось ***равенство Парсеваля***

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 = \|f\|^2,$$

необходимо и достаточно, чтобы элемент f являлся суммой своего ряда Фурье, т. е.

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

где c_n — коэффициенты Фурье элемента $f \in E$ по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема. Для того чтобы каждый элемент $f \in E$ являлся суммой своего ряда Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ была замкнутой.

1.2. Ряды Фурье по тригонометрической системе функций

Обозначим через Q линейное пространство функций, интегрируемых на отрезке $\left[-T/2, T/2\right]$. Это пространство является евклидовым пространством[1], скалярное умножение в котором задается формулой

$$(f, g) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x) g(x) dx, \quad f, g \in Q,$$

а порожденная этим скалярным умножением норма имеет вид

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_{-T/2}^{T/2} f^2(x) dx}, \quad f \in Q.$$

Сходимость функциональной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нормированном пространстве Q к функции $f(x)$ означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \left[f_n(x) - f(x)\right]^2 dx = 0.$$

Такую сходимость называют ***сходимостью в среднем квадратичном***.

В рассматриваемом пространстве Q функции

$$1, \ \cos 2\pi \frac{1}{T} x, \quad \sin 2\pi \frac{1}{T} x, \ldots, \cos 2\pi \frac{n}{T} x, \quad \sin 2\pi \frac{n}{T} x, \ldots$$

образуют ортогональную систему, которую называют ***тригонометрической системой***. Вычислим квадраты норм функций этой системы:

---

[1] Считаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ не различаются, если $\int\limits_{-T/2}^{T/2} \left|f(x) - g(x)\right| \times$ $\times dx = 0$.

$$\|1\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} 1^2\,dx = T,$$

$$\left\|\cos 2\pi \frac{n}{T} x\right\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 2\pi \frac{n}{T} x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\left(1+\cos 4\pi \frac{n}{T} x\right)dx = \frac{T}{2},$$

$$\left\|\sin 2\pi \frac{n}{T} x\right\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 2\pi \frac{n}{T} x\,dx = \frac{T}{2}.$$

Ряд Фурье по тригонометрической системе для функции $f \in Q$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} x + b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} x, \tag{1}$$

где коэффициенты $\frac{a_0}{2}$, a_n и b_n вычисляются по формулам:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f,1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{\left(f, \cos 2\pi \frac{n}{T} x\right)}{\left\|\cos 2\pi \frac{n}{T} x\right\|^2} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos 2\pi \frac{n}{T} x\,dx,$$

$$b_n = \frac{\left(f, \sin 2\pi \frac{n}{T} x\right)}{\left\|\sin 2\pi \frac{n}{T} x\right\|^2} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin 2\pi \frac{n}{T} x\,dx.$$

Ряд (1) называется ***тригонометрическим рядом Фурье***.

Замечание. Тригонометрическая система функций является замкнутой в Q. Следовательно, каждая функция $f \in Q$ есть сумма своего ряда Фурье, т. е. имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} x + b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} x,$$

в котором сходимость ряда в правой части следует понимать в смысле сходимости в среднем квадратичном:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} x + b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} x \right]^2 dx = 0.$$

Теорема. Для любой функции $f \in Q$ квадраты ее коэффициентов Фурье образуют сходящийся ряд.

Определение. Функцию $f(x)$ называют ***кусочно-непрерывной*** на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна всюду на этом отрезке за исключением конечного числа точек, в которых она может иметь разрывы только 1-го рода.

Определение. Функцию $f(x)$ называют ***кусочно-монотонной*** на отрезке $[a,b]$, если существует конечное число точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, таких, что в интервалах $(x_{k-1}, x_k), k = \overline{1,n}$, функция $f(x)$ монотонна (не убывает или не возрастает).

Далее сформулируем достаточный признак сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Теорема (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-T/2, T/2]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) кусочно-непрерывна на отрезке $[-T/2, T/2]$;

2) кусочно-монотонна на отрезке $[-T/2, T/2]$.

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в любой точке $x \in [-T/2, T/2]$ и имеет в этой точке сумму $S(x)$, равную

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} x + b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} x \equiv$$

$$\equiv S(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, x \in (-T/2, T/2), \\ \dfrac{f(-T/2+0)+f(T/2-0)}{2}, x = \pm T/2. \end{cases}$$

Замечание. Если точка $x \in (-T/2, T/2)$ — точка непрерывности функции $f(x)$, то $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$. Следовательно,

$$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x).$$

Это означает, что значение функции $f(x)$ в точке непрерывности равно значению суммы ее тригонометрического ряда Фурье в этой точке.

Замечание. Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-T/2, T/2]$, сумма $S(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье определена на всей числовой прямой и является периодической функцией с периодом, равным T.

Замечание. Условия 1 и 2 теоремы, накладываемые на функцию $f(x)$, называются ***условиями Дирихле***.

1.3. Разложение четных и нечетных функций в тригонометрические ряды Фурье

Определение. Функция $\varphi(x)$, заданная на отрезке $[-T/2, T/2]$, называется ***четной***, если для всех $x \in [-T/2, T/2]$ выполнено равенство $\varphi(x)=\varphi(-x)$.

Определение. Функция $\varphi(x)$, заданная на отрезке $[-T/2, T/2]$, называется ***нечетной***, если для всех $x \in [-T/2, T/2]$ выполнено равенство $\varphi(x)=-\varphi(-x)$.

Отметим также, что произведение четной функции на четную и нечетной функции на нечетную является четной функцией, а произведение четной функции на нечетную — нечетной функцией.

Кроме того,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{T/2} \varphi(x)\,dx, & \text{если } \varphi(x) - \text{четная;} \\ 0, & \text{если } \varphi(x) - \text{нечетная.} \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[-T/2, T/2]$ функция.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $f(x)$ является четной, то ее тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi \frac{n}{T} x. \tag{2}$$

Действительно, учитывая, что при любом натуральном n функция $f(x)\cos 2\pi \frac{n}{T} x$ также четная, а $f(x)\sin 2\pi \frac{n}{T} x$ — нечетная, получаем

$$\begin{gathered} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\,dx; \\ a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos 2\pi \frac{n}{T} x\,dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos 2\pi \frac{n}{T} x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}; \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin 2\pi \frac{n}{T} x\,dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{3}$$

Случай 2. Если $f(x)$ является нечетной, то ее тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi \frac{n}{T} x. \tag{4}$$

При этом коэффициенты b_n определяются по формуле

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin 2\pi \frac{n}{T} x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Это следует из того, что при любом натуральном n функция $f(x)\cos 2\pi \frac{n}{T} x$ является нечетной, а функция $f(x)\sin 2\pi \frac{n}{T} x$ — четной.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, T/2]$ и удовлетворяет на нем условиям Дирихле. Эту функцию можно разложить в ряд Фурье по косинусам или по синусам:

- ряд по косинусам имеет вид (2), а его коэффициенты $\frac{a_0}{2}$ и a_n определяются по формулам (3);
- ряд по синусам имеет вид (4), а его коэффициенты b_n вычисляются по формуле (5).

Действительно, для того чтобы получить разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, T/2]$, в ряд по косинусам, необходимо продолжить ее на промежуток $[-T/2, 0)$ четным образом:

$$f(x) = f(-x), \quad x \in [-T/2, 0).$$

Очевидно, что при этом $f(-0) = f(+0)$, $f(-T/2+0) = f(T/2-0)$.

Тогда разложение в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-T/2, T/2]$ полученной четной функции примет вид (2). Это разложение, рассматриваемое на отрезке $[0, T/2]$, является разложением исходной функции $f(x)$ на отрезке $[0, T/2]$ в ряд по косинусам.

Согласно теореме Дирихле, сумма $S(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье в точках $x=0$ и $x=T/2$ будет равна $S(0)=$ $=f(+0)$ и $S(T/2)=f(T/2-0)$. Если $f(x)$ непрерывна на концах отрезка $[0,T/2]$, т. е. $f(+0)=f(0)$ и $f(T/2-0)=f(T/2)$, то сумма ее ряда Фурье по косинусам совпадает с $f(x)$ на концах этого отрезка.

Для того чтобы получить разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0,T/2]$, в ряд по синусам, необходимо продолжить ее на промежуток $[-T/2,0)$ нечетным образом:

$$f(x)=-f(-x), \quad x\in[-T/2,0).$$

Тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-T/2,T/2]$ полученной нечетной функции примет вид (4). Рассматривая это разложение на отрезке $[0,T/2]$, получаем разложение исходной функции $f(x)$ на отрезке $[0,T/2]$ в ряд по синусам.

Следует отметить, что у суммы $S(x)$ ряда Фурье по синусам могут появиться разрывы в точках $x=0$ и $x=\pm T/2$, несмотря на непрерывность $f(x)$ на $[0,T/2]$. Так как при нечетном продолжении $f(-0)=-f(+0)$, $f(-T/2+0)=-f(T/2-0)$, то равенства $f(-0)=f(+0)$ и $f(-T/2+0)=f(T/2-0)$, необходимые для непрерывности суммы ряда Фурье в точках $x=0$ и $x=\pm T/2$, будут иметь место только тогда, когда $f(+0)=0$ и $f(T/2-0)=0$.

1.4. Тригонометрический ряд Фурье как суперпозиция простых гармоник

Запишем n-й член тригонометрического ряда Фурье в следующем виде:

$$u_n(x)=a_n\cos 2\pi\frac{n}{T}x+b_n\sin 2\pi\frac{n}{T}x=$$

$$=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos 2\pi\frac{n}{T}x-\left(-\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)\sin 2\pi\frac{n}{T}x\right].$$

Поскольку

$$\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2+\left(-\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2=1,$$

можно выбрать θ_n так, что

$$\cos\theta_n=\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},\ \sin\theta_n=-\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}.$$

Тогда с учетом обозначения $d_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ выражение для $u_n(x)$ примет вид

$$u_n(x)=d_n\left(\cos\theta_n\cos 2\pi\frac{n}{T}x-\sin\theta_n\sin 2\pi\frac{n}{T}x\right)=d_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T}x+\theta_n\right).$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье можно записать в следующей форме:

$$\frac{d_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cos(2\pi\nu_n x+\theta_n), \tag{6}$$

где $\nu_n=\dfrac{n}{T},\quad n\in\mathbb{N}$.

Величину $\dfrac{d_0}{2}$, определяемую по формуле

$$\frac{d_0}{2}=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\,dx$$

и выражающую среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-T/2, T/2]$, называют ***постоянной составляющей***, а n-й член ряда $u_n(x) = d_n \cos(2\pi\nu_n x + \theta_n)$ называют n-*й* ***гармоникой*** с амплитудой d_n и частотой $\nu_n = \dfrac{n}{T}$, $n \in \mathbb{N}$. Частоты гармоник кратны ***основной частоте*** $\nu_1 = \dfrac{1}{T}$ и образуют арифметическую прогрессию.

Величина θ_n, принимающая значения из промежутка $(-\pi, \pi]$ и однозначно определяемая из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\theta_n = \dfrac{a_n}{d_n}, \\ \sin\theta_n = -\dfrac{b_n}{d_n}, \end{cases}$$

называется ***начальной фазой*** n-*й* ***гармоники.*** Последовательность $\{d_n\}$ в ряде (6) называют ***спектром амплитуд***, а последовательность $\{\theta_n\}$ — ***спектром фаз***.

1.5. Комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье

Тригонометрический ряд Фурье можно записать в более компактной форме, если воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \ \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Тогда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi\nu_n x + b_n \sin 2\pi\nu_n x =$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left(e^{i\cdot 2\pi\nu_n x}+e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}\right)-\frac{ib_n}{2}\left(e^{i\cdot 2\pi\nu_n x}-e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\cdot 2\pi\nu_n x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}\right)=$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\cdot 2\pi\nu_n x}+c_{-n}e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}\right),$$

где

$$c_0=\frac{a_0}{2};\; c_n=\frac{a_n-ib_n}{2};\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Далее выражение

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{i\cdot 2\pi\nu_n x}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}$$

запишем как двусторонний ряд:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\cdot 2\pi\nu_n x}.$$

Получим формулы для вычисления коэффициентов c_n этого ряда:

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\,dx;$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\left(\cos 2\pi\nu_n x-i\sin 2\pi\nu_n x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}dx,\quad n\in\mathbb{N};$$

аналогично находим c_{-n} :

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \cdot 2\pi \nu_{-n} x} dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\nu_{-n} = -\frac{n}{T}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot 2\pi \nu_n x}$, коэффициенты c_n которого определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \cdot 2\pi \nu_n x} dx, \quad \nu_n = \frac{n}{T}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется ***рядом Фурье в комплексной форме*** функции $f(x)$.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$ называют ***спектральной последовательностью*** функции $f(x)$; последовательность действительных чисел $\{|c_n|\}$ — ***амплитудным спектром***, а последовательность $\{\arg\, c_n\}$ — ***фазовым спектром***.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, -2 \le x < -1, \\ 1, -1 \le x < 1, \\ 2 - x, 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Построить график суммы $S(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рис. 1.1.

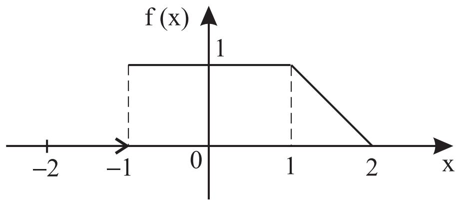

Рис. 1.1

Вычислим коэффициенты Фурье заданной функции:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 1 \cdot dx + \frac{1}{4}\int_{1}^{2} (2-x)\,dx = \frac{5}{8};$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-1}^{1} 1 \cdot \cos 2\pi \frac{n}{4} x\,dx + \frac{2}{4}\int_{1}^{2} (2-x)\cos 2\pi \frac{n}{4} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[\cos\frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\right];$$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-1}^{1} 1 \cdot \sin 2\pi \frac{n}{4} x\,dx + \frac{2}{4}\int_{1}^{2} (2-x)\sin 2\pi \frac{n}{4} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{5}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\right)\right]\cos 2\pi \frac{n}{4} x +$$

$$+\left[\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right]\sin 2\pi \frac{n}{4} x.$$

В точке разрыва $x=-1$ значение суммы $S(x)$ тригонометрического ряда Фурье отличается от значения функции $f(x)$ в этой точке:

$$S(-1)=\frac{f(-1-0)+f(-1+0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},\ f(-1)=1.$$

На концах отрезка $[-2,2]$ значение функции и суммы ее тригонометрического ряда Фурье совпадают:

$$S(\pm 2)=\frac{f(-2+0)+f(2-0)}{2}=0,\ f(-2)=f(2)=0.$$

График суммы $S(x)$ представлен на рис. 1.2.

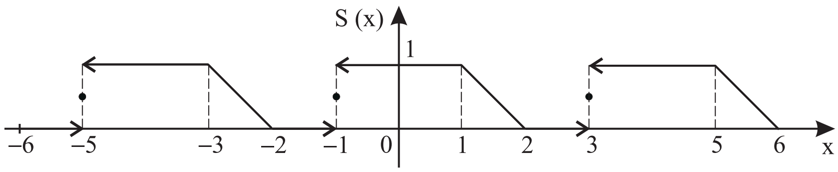

Рис. 1.2

Пример 2. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1, -1\le x<-0,5,\\ 1, -0,5\le x\le 1.\end{cases}$$

Построить амплитудный и фазовый спектры.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рис. 1.3.

Вычислим коэффициенты c_n:

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{-0,5}(-1)\cdot dx+\frac{1}{2}\int_{-0,5}^{1}1\cdot dx=\frac{1}{2};$$

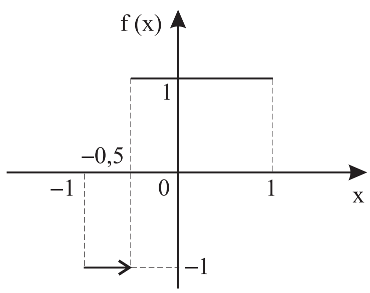

Рис. 1.3

$$c_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{-0,5}(-1)\cdot e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-0,5}^{1} 1\cdot e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}dx =$$

$$= -\frac{1}{4i\pi\nu_n}\left(-e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}\Big|_{-1}^{-0,5} + e^{-i\cdot 2\pi\nu_n x}\Big|_{-0,5}^{1}\right) =$$

$$= \frac{i}{4\pi\nu_n}\left(e^{i\cdot 2\pi\nu_n} + e^{-i\cdot 2\pi\nu_n} - 2e^{i\pi\nu_n}\right) = \frac{i}{2\pi\nu_n}\left(\cos 2\pi\nu_n - e^{i\pi\nu_n}\right) =$$

$$= \frac{\sin\pi\nu_n}{2\pi\nu_n} - i\frac{\cos\pi\nu_n - \cos 2\pi\nu_n}{2\pi\nu_n}.$$

Далее определим значения амплитуд и фаз отдельных гармоник.

При $n = 0$ имеем

$$c_0 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$|c_0| = \frac{1}{2},\ \theta_0 = 0.$$

При $n = 1$ находим

$$c_1 = \frac{1}{\pi} - i\frac{1}{\pi}.$$

В этом случае

$$|c_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi},\ \theta_1 = \arg c_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

При $n = -1$ получаем

$$c_{-1} = \frac{1}{\pi} + i\frac{1}{\pi}.$$

Учитывая, что числа c_1 и c_{-1} являются комплексно-сопряженными, приходим к следующему результату:

$$|c_{-1}| = |c_1| = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \ \theta_{-1} = -\arg c_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Рассуждая аналогично, находим

$$|c_2| = \left|i\frac{1}{\pi}\right| = \frac{1}{\pi}, \ \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \ |c_{-2}| = \left|-i\frac{1}{\pi}\right| = \frac{1}{\pi}, \ \theta_{-2} = -\frac{\pi}{2}$$

и т. д. На рис. 1.4 и 1.5 соответственно представлены амплитудный и фазовый спектры.

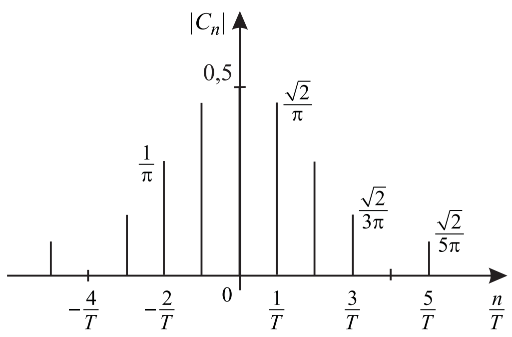

Рис. 1.4

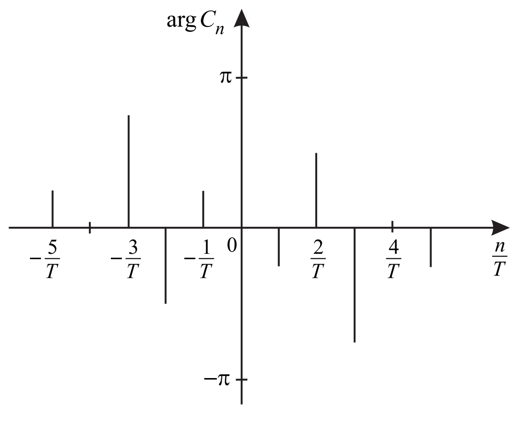

Рис. 1.5

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье заданную на отрезке $\left[-2,2\right]$ функцию $f\left(x\right)$. Построить графики функции $f\left(x\right)$ и суммы $S\left(x\right)$ ее ряда Фурье:

$$\text{а) } f\left(x\right)=\begin{cases}2+x,\ -2\le x<-1;\\ 1,\ -1\le x<0;\\ 1-x,\ 0\le x<1;\\ 0,\ 1\le x\le 2;\end{cases}$$

$$\text{б) } f\left(x\right)=\begin{cases}-1,\ -2\le x<-1;\\ x,\ -1\le x<1;\\ 1,\ 1\le x\le 2;\end{cases}$$

$$\text{в) } f\left(x\right)=\begin{cases}1,\ -2\le x<-1;\\ -x,\ -1\le x<0;\\ x,\ 0\le x<1;\\ 1,\ 1\le x\le 2;\end{cases}$$

$$\text{г) } f\left(x\right)=\begin{cases}1,\ -2\le x<-1;\\ 0,\ -1\le x<0;\\ \dfrac{1}{2}x^2,\ 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Задача 2. Разложить в ряд Фурье в форме суперпозиции простых гармоник функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1, -3\le x<-2;\\ 3, -2\le x<0;\\ 1, 0\le x\le 3.\end{cases}$$

Построить:

а) амплитудный и фазовый спектры;

б) графики частичных сумм ряда Фурье $S_3(x)$, $S_{10}(x)$, $S_{20}(x)$, $S_{100}(x)$.

Задача 3. Найти комплексную форму ряда Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}-1, -2\le x<-1;\\ 1+x, -1\le x<0;\\ 1, 0\le x<1;\\ 0, 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Построить амплитудный и фазовый спектры.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

2.1. Экспоненциальное (комплексное) преобразование Фурье

Если функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на $(-\infty,+\infty)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty,$$

и, кроме того, на любом отрезке $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ее называют ***оригиналом экспоненциального преобразования Фурье***.

Прямое экспоненциальное преобразование Фурье задается формулой

$$\mathrm{F}\left[f\right](\nu)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\cdot 2\pi\nu x}dx,\ \nu\in(-\infty,+\infty).$$

При этом функцию $\tilde{f}(\nu)=\mathrm{F}\left[f\right](\nu)$ называют ***образом Фурье*** оригинала $f(x)$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ является оригиналом экспоненциального преобразования Фурье и во всех точках разрыва удовлетворяет условию

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Тогда справедлива ***формула обращения***

$$f(x)=\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\nu)e^{i\cdot 2\pi\nu x}d\nu,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Замечание. Символы «V.p.» означают «главное значение» несобственного интеграла. Напомним, что если для функции $\varphi(x)$, интегрируемой на любом конечном отрезке числовой прямой, существует конечный предел

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)dx,$$

то этот предел называют ***главным значением несобственного интеграла***.

Формула обращения позволяет восстанавливать функцию-оригинал по ее образу Фурье. При этом интегральное преобразование

$$\mathrm{F}^{-1}\left[\tilde{f}\right](x)=\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\nu)e^{i\cdot 2\pi\nu x}d\nu,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

называют ***обратным экспоненциальным преобразованием Фурье.***

2.2. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье

Если функция $f(x)$ определена, абсолютно интегрируема на $[0,+\infty)$ и на любом отрезке $[a,b]\subset[0,+\infty)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ее называют ***оригиналом интегрального косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье***.

Операторы F_c и F_s косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье имеют вид

$$\mathrm{F_c}[f](\nu)=2\int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\,dx,\ \nu\in[0,+\infty),$$

$$\mathrm{F_s}[f](\nu)=2\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\,dx,\ \nu\in[0,+\infty).$$

Функцию $\tilde{f}_c(\nu)=\mathrm{F_c}[f](\nu)$ называют ***косинус-образом Фурье*** оригинала $f(x)$, а функцию $\tilde{f}_s(\nu)=\mathrm{F_s}[f](\nu)$ — ***синус-образом Фурье*** $f(x)$.

Утверждение. Пусть функция $f(x)$ является оригиналом косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье и, кроме того, во всех точках разрыва удовлетворяет условию

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Тогда для нее справедливы ***формулы обращения косинус-преобразования*** и ***синус-преобразования Фурье:***

$$f(x)=2\int\limits_0^{+\infty} \tilde{f}_c(\nu)\cos(2\pi\nu x)\,d\nu,\ x\in(0,+\infty),$$

$$f(x)=2\int\limits_0^{+\infty} \tilde{f}_s(\nu)\sin(2\pi\nu x)\,d\nu,\ x\in(0,+\infty).$$

Замечание. Если $f(0)=f(+0)$, то формула обращения косинус-преобразования Фурье верна и в точке $x=0$. Формула обращения синус-преобразования Фурье остается справедливой и для точки $x=0$, если $f(0)=0$.

2.3. Преобразование Фурье – Бесселя

Если функция $f(r)$ определена на $[0,+\infty)$, абсолютно интегрируема с весовой функцией $\rho(r)=\sqrt{r}$ и удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном отрезке полуоси $[0,+\infty)$, то ее называют ***оригиналом интегрального преобразования Фурье – Бесселя.***

Это преобразование задается формулой

$$\mathrm{H}[f](\nu)=2\pi\int\limits_0^{+\infty} f(r)J_0(2\pi\nu r)rdr,\ \nu\in[0,+\infty),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Формула обращения для этого преобразования имеет вид

$$\mathrm{H}^{-1}\left[\tilde{f}\right](r)=2\pi\int\limits_0^{+\infty} \tilde{f}(\nu)J_0(2\pi\nu r)\nu d\nu,\ r\in[0,+\infty).$$

Функцию $\tilde{f}(\nu)=\mathrm{H}[f](\nu)$ называют ***образом Фурье – Бесселя*** оригинала $f(r)$.

2.4. Свойства преобразования Фурье

Если не оговорено иное, полагаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются оригиналами экспоненциального преобразования Фурье, $\tilde{f}(\nu)$ и $\tilde{g}(\nu)$ — их образы Фурье.

Сформулируем основные свойства преобразования Фурье.

1. ***Линейность преобразования Фурье:***

$$\mathrm{F}[\alpha f+\beta g](\nu)=\alpha\tilde{f}(\nu)+\beta\tilde{g}(\nu),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

2. ***Теорема запаздывания*:**

$$\mathrm{F}\left[f(x-m)\right](\nu)=e^{-i\cdot 2\pi m\nu}\tilde{f}(\nu),\quad m\in\mathbb{R}.$$

3. ***Теорема подобия:***

$$\mathrm{F}\left[f(ax)\right](\nu)=\frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{\nu}{a}\right),\quad a\neq 0.$$

4. ***Теорема смещения*:**

$$\mathrm{F}\left[e^{i\cdot 2\pi\lambda x}f(x)\right](\nu)=\tilde{f}(\nu-\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

5. ***Преобразование Фурье производной*:** если функция $f(x)$ и ее производные до n-го порядка включительно существуют, непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(-\infty,+\infty)$, то

$$\mathrm{F}\left[f^{(k)}\right](\nu)=(i\cdot 2\pi\nu)^k\,\tilde{f}(\nu),\quad k=\overline{1,n}.$$

6. ***Дифференцирование преобразования Фурье*:** если функция $f(x)$ непрерывна и функции $f(x), xf(x),\ldots,x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty,+\infty)$, то функция $\tilde{f}(\nu)$ имеет производные до n-го порядка включительно, и

$$\mathrm{F}\left[x^k f(x)\right](\nu)=(-i\cdot 2\pi)^k\,\tilde{f}^{(k)}(\nu),\quad k=\overline{1,n}.$$

7. ***Преобразование Фурье свертки.***

Определение. ***Сверткой*** функций $f(x)$ и $g(x)$, абсолютно интегрируемых на $(-\infty,+\infty)$, называют функцию

$$(f*g)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

при условии, что несобственный интеграл сходится при всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

Замечание. В случае двух одинаковых функций говорят об ***автосвертке***.

Свертка обладает свойствами ***коммутативности*** и ***ассоциативности***:

1) $(f*g)(x)=(g*f)(x)$;

2) $(f*g*\varphi)(x)=((f*g)*\varphi)(x)=(f*(g*\varphi))(x)$.

Теорема (о свертке):

$$\mathrm{F}[f*g](\nu)=\tilde{f}(\nu)\tilde{g}(\nu).$$

2.5. Преобразование Фурье элементарных импульсных функций

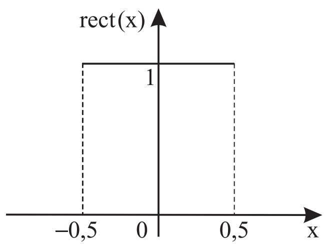

Рис. 2.1

Ниже приведены примеры нахождения преобразования Фурье элементарных функций.

Пример 1. Найдем образ Фурье «прямоугольного единичного импульса» (рис. 2.1):

$$f(x)=\mathrm{rect}(x)\equiv\begin{cases}1, & |x|\le 0{,}5;\\ 0, & |x|>0{,}5.\end{cases}$$

При $\nu=0$ получим

$$\tilde{f}(0)=\int_{-0{,}5}^{0{,}5}1\cdot dx=1.$$

При $\nu\ne 0$ приходим к следующему результату:

$$\tilde{f}(\nu)=\int_{-0{,}5}^{0{,}5}1\cdot e^{-i\cdot 2\pi\nu x}dx=\frac{1}{i\cdot 2\pi\nu}\left(e^{i\pi\nu}-e^{-i\pi\nu}\right)=\frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}.$$

Следует отметить, что функция $\tilde{f}(\nu)$ непрерывна в точке $\nu = 0$, так как

$$\lim_{\nu\to-0}\tilde{f}(\nu) = \lim_{\nu\to+0}\tilde{f}(\nu) = 1 = \tilde{f}(0).$$

Таким образом,

$$\mathrm{F}\left[\operatorname{rect}(x)\right](\nu) = \operatorname{sinc}(\pi\nu),$$

где

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1, \ x = 0; \\ \dfrac{\sin x}{x}, \ x \neq 0. \end{cases}$$

Пример 2. Найдем автосвертку функции $f(x) = \operatorname{rect}(x)$.

Напомним, что

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) f(x-\xi)\, d\xi.$$

Здесь

$$f(\xi) = \operatorname{rect}(\xi) = \begin{cases} 0, \ \xi < -0,5; \\ 1, \ -0,5 \leq \xi \leq 0,5; \\ 0, \ \xi > 0,5; \end{cases} \quad f(x-\xi) = \begin{cases} 0, \ \xi < x-0,5; \\ 1, \ x-0,5 \leq \xi \leq x+0,5; \\ 0, \ \xi > x+0,5. \end{cases}$$

В зависимости от того, какие значения принимает переменная x, можно выделить четыре случая (рис. 2.2):

а) $x < -1$: $\quad (f * f)(x) = 0$;

б) $-1 \leq x < 0$: $\quad (f * f)(x) = \int\limits_{-0,5}^{x+0,5} 1 \cdot 1 \cdot d\xi = x + 1$;

в) $0 \le x < 1$: $\quad \left(f * f\right)\left(x\right) = \int\limits_{x-0,5}^{0,5} 1 \cdot 1 \cdot d\xi = 1 - x$;

г) $x \ge 1$: $\quad \left(f * f\right)\left(x\right) = 0$.

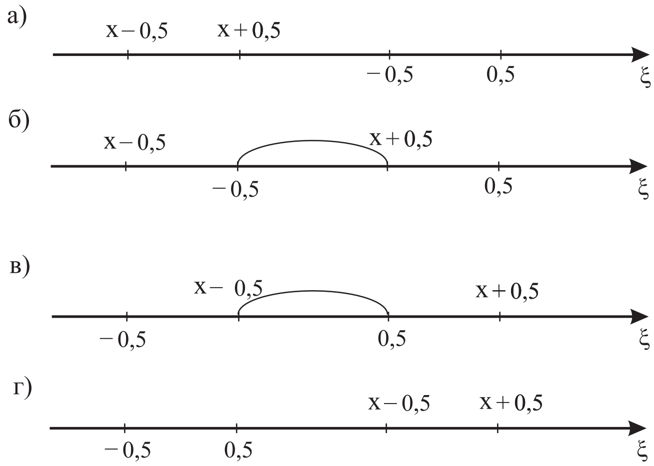

Рис. 2.2

Таким образом,

$$\mathrm{rect}\left(x\right) * \mathrm{rect}\left(x\right) = \begin{cases} 0,\ x < -1; \\ 1 + x,\ -1 \le x \le 0; \\ 1 - x,\ 0 \le x \le 1; \\ 0,\ x > 1. \end{cases}$$

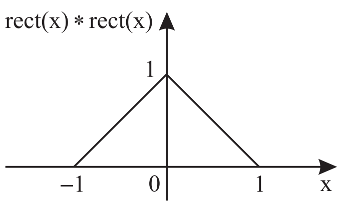

Рис. 2.3

График функции $\mathrm{rect}\left(x\right) * \mathrm{rect}\left(x\right)$ представлен на рис. 2.3.

Пример 3. Найдем образ Фурье «треугольного импульса»:

$$\Lambda\left(x\right) = \begin{cases} 1 - |x|,\ |x| \le 1; \\ 0,\ |x| > 1. \end{cases}$$

Из примера 2 следует, что $\Lambda(x)$ представляет собой автосвертку функции $\operatorname{rect}(x)$, т. е.

$$\Lambda(x)=\operatorname{rect}(x)*\operatorname{rect}(x).$$

Применим теорему о свертке:

$$\mathrm{F}\left[\Lambda(x)\right](\nu)=\left\{\mathrm{F}\left[\operatorname{rect}(x)\right](\nu)\right\}^2=\operatorname{sinc}^2(\pi\nu).$$

Пример 4. Найдем образ Фурье – Бесселя осесимметрической функции

$$\mathrm{f}(r)=\operatorname{circ}(r)\equiv\begin{cases}1, & r\le 1;\\ 0, & r>1.\end{cases}$$

При $\nu=0$ получим

$$\tilde{f}(0)=2\pi\int_0^1 1\cdot J_0(0)r\,dr=\pi,$$

так как $J_0(0)=1$.

При $\nu\ne 0$ вычислим интеграл:

$$\tilde{f}(\nu)=2\pi\int_0^1 1\cdot J_0(2\pi\nu r)r\,dr=\left|\begin{array}{l}\text{замена переменной:}\\ x=2\pi\nu\mathrm{r},\quad dx=2\pi\nu d\mathrm{r}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2\pi}{(2\pi\nu)^2}\int_0^{2\pi\nu} xJ_0(x)\,dx=\frac{2\pi}{(2\pi\nu)^2}xJ_1(x)\Big|_0^{2\pi\nu}=\pi\frac{2J_1(2\pi\nu)}{2\pi\nu}.$$

Можно показать, что функция $\tilde{f}(\nu)$ непрерывна в точке $\nu=0$.

В результате имеем

$$\mathrm{H}\left[\operatorname{circ}(r)\right](\nu)=\pi\cdot\operatorname{besinc}(2\pi\nu),$$

где

$$\operatorname{besinc}(x)=\begin{cases}1, x=0;\\ \dfrac{2J_1(x)}{x}, x\neq 0.\end{cases}$$

Примеры решения задач

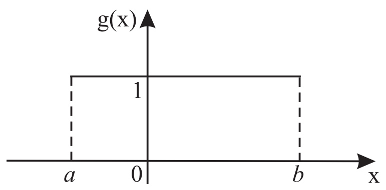

Рис. 2.4

Пример 1. Найти образ Фурье функции $g(x)$, график которой изображен на рис. 2.4.

Решение. Очевидно, что график функции $g(x)$ может быть получен из графика функции $\operatorname{rect}(x)$ в результате последовательного применения двух преобразований: растяжения (сжатия) и сдвига вдоль оси абсцисс.

Обозначим через m и d соответственно середину и длину отрезка $[a,b]$:

$$m=\frac{a+b}{2}; \qquad d=b-a\,.$$

Тогда

$$g(x)=\operatorname{rect}\left(\frac{x-m}{d}\right).$$

Далее для отыскания образа Фурье функции $g(x)$ воспользуемся свойствами 2 и 3 преобразования Фурье (см. подразд. 2.4):

$$\mathrm{F}[g](\nu)=d\cdot e^{-i\cdot 2\pi m\nu}\tilde{f}(d\nu),$$

где $\tilde{f}(\nu)$ — образ Фурье функции $\operatorname{rect}(x)$.

В результате получим

$$\mathrm{F}[g](\nu) = d \cdot e^{-i \cdot 2\pi m\nu} \operatorname{sinc}(d\pi\nu).$$

Пример 2. Найти образ Фурье функции $g(x)$, график которой представлен на рис. 2.5.

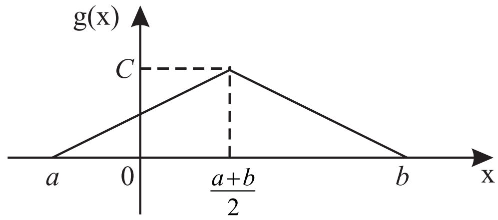

Рис. 2.5

Решение. Введем обозначения

$$m = \frac{a+b}{2}, \qquad d = \frac{b-a}{2}$$

и представим функцию $g(x)$ в виде

$$g(x) = C \cdot \Lambda\left(\frac{x-m}{d}\right).$$

Применяя свойства 1–3 преобразования Фурье (см. подразд. 2.4), находим

$$\mathrm{F}[g](\nu) = C \cdot d \cdot e^{-i \cdot 2\pi m\nu} \tilde{f}(d\nu),$$

где $\tilde{f}(\nu)$ — образ Фурье функции $\Lambda(x)$.

Следовательно,

$$\mathrm{F}[g](\nu) = C \cdot d \cdot e^{-i \cdot 2\pi m\nu} \operatorname{sinc}^2(d\pi\nu).$$

Пример 3. Найти образ Фурье функции $f(x)$, заданной графически (рис. 2.6).

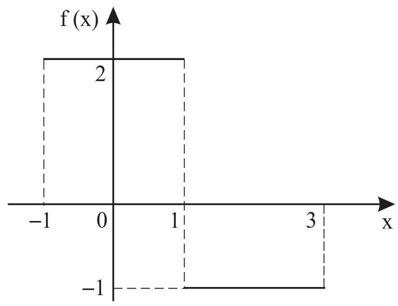

Рис. 2.6

Решение. Представим заданную функцию $f(x)$ в виде суммы двух «прямоугольных импульсов»:

$$f(x) = 2\operatorname{rect}\left(\frac{x}{2}\right) + (-1)\operatorname{rect}\left(\frac{x-2}{2}\right).$$

Тогда с учетом свойств преобразования Фурье получим

$$\tilde{f}(\nu) = 4\operatorname{sinc}(2\pi\nu) - 2e^{-i\cdot 4\pi\nu}\operatorname{sinc}(2\pi\nu).$$

Пример 4. Найти образ Фурье функции $f(x)$, график которой изображен на рис. 2.7.

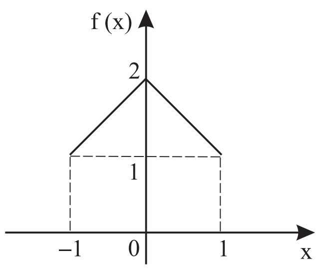

Рис. 2.7

Решение. Замечая, что функция $f(x)$ представляет собой «треугольный импульс» $\Lambda(x)$, смещенный вдоль оси ординат на одну единицу вверх, можем записать ее в виде

$$f(x) = \Lambda(x) + \operatorname{rect}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(\nu) = \operatorname{sinc}^2(\pi\nu) + 2\operatorname{sinc}(2\pi\nu).$$

Пример 5. Найти образ Фурье функции $f(x)$, заданной графически (рис. 2.8).

Решение. Функцию $f(x)$ можно представить в виде двух «треугольных импульсов» $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

График функции $f_1(x)$ получается из графика функции $\Lambda(x)$ — стандартного «треугольного импульса» в результате последовательного применения следующих преобразований: растяжения вдоль оси ординат в 2 раза и сдвига вдоль оси абсцисс на одну единицу влево. Поэтому

$$f_1(x) = 2\Lambda(x+1).$$

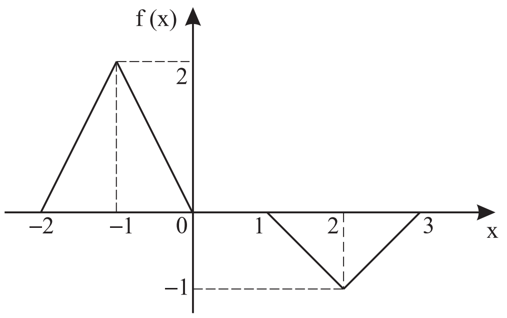

Рис. 2.8

График функции $f_2(x)$ получается из графика функции $\Lambda(x)$ в результате отражения относительно оси абсцисс и затем сдвига вдоль этой оси на две единицы вправо:

$$f_2(x) = -\Lambda(x-2).$$

Таким образом,

$$f(x) = 2\Lambda(x+1) - \Lambda(x-2).$$

Далее, применяя свойства преобразования Фурье (см. подразд. 2.4), получаем

$$\tilde{f}(\nu) = 2e^{i\cdot 2\pi\nu}\text{sinc}^2(\pi\nu) - e^{-i\cdot 4\pi\nu}\text{sinc}^2(\pi\nu).$$

Пример 6. Найти образ Фурье функции $f(x)$, график которой представлен на рис. 2.9.

Решение. Представим функцию $f(x)$ в виде суммы «треугольного импульса» и «прямоугольного импульса».

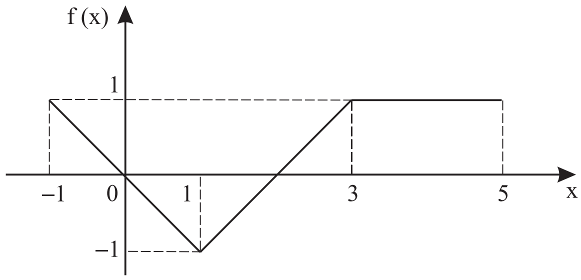

Рис. 2.9

График функции $f_1(x)$ — «треугольный импульс» — может быть получен из графика функции $\Lambda(x)$ при последовательном выполнении следующих преобразований (см. пример 2):

1) растяжение вдоль оси абсцисс в 2 раза ($d = 2$);

2) растяжение вдоль оси ординат в 2 раза, а затем — отражения относительно оси абсцисс ($C = -2$);

3) сдвиг вдоль оси абсцисс на одну единицу вправо ($m = 1$);

4) смещение вдоль оси ординат на одну единицу вверх.

В результате применения преобразований в пп. 1—3 получаем функцию

$$\varphi(x) = -2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

а после преобразования в п. 4 находим (см. пример 4):

$$f_1(x) = \varphi(x) + \mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{4}\right) = -2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{4}\right).$$

Очевидно, что функция $f_2(x)$ — «прямоугольный импульс» — имеет вид

$$f_2(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x-4}{2}\right).$$

Таким образом, функция $f(x)$ представляет собой сумму «треугольного импульса» и двух «прямоугольных импульсов»:

$$f(x)=\left[-2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{4}\right)\right]+\mathrm{rect}\left(\frac{x-4}{2}\right)=$$

$$=-2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{x-2}{6}\right).$$

Для отыскания образа Фурье этой функции воспользуемся результатами, полученными в примерах 1 и 2:

$$\tilde{f}(\nu)=-4e^{-i\cdot 2\pi\nu}\mathrm{sinc}^2(2\pi\nu)+6e^{-i\cdot 4\pi\nu}\mathrm{sinc}(6\pi\nu).$$

Пример 7. Найти свертку функций $f(x)$ и $g(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ 2,\ 0\le x<2;\\ 4-x, 2\le x<5;\\ 0, x\ge 5;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0,\ x<-1;\\ -1,\ -1\le x<0;\\ 2, 0\le x<2;\\ 0, x\ge 2.\end{cases}$$

Решение. В зависимости от того, какие значения принимает переменная x, приходим к следующим возможным случаям (рис. 2.10):

а) $x<-1$: $(f*g)(x)=0$;

б) $-1\le x<0$: $(f*g)(x)=\int\limits_0^{x+1}2\cdot(-1)\,d\xi=-2x-2;$

в) $0\le x<1$: $(f*g)(x)=\int\limits_0^{x}2\cdot 2\cdot d\xi+\int\limits_x^{x+1}2\cdot(-1)\,d\xi=4x-2;$

г) $1\le x<2$: $(f*g)(x)=\int\limits_0^{x}2\cdot 2\cdot d\xi+\int\limits_x^{2}2\cdot(-1)\,d\xi+$

$$+\int\limits_2^{x+1}(4-\xi)\cdot(-1)\,d\xi=\frac{1}{2}(x+3)^2-6;$$

д) $2 \le x < 4$: $\quad (f * g)(x) = \int\limits_{x-2}^{2} 2 \cdot 2 d\xi + \int\limits_{2}^{x} (4-\xi) \cdot 2 d\xi +$

$$+ \int\limits_{x}^{x+1} (4-\xi) \cdot (-1) d\xi = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{27}{4};$$

е) $4 \le x < 5$: $(f * g)(x) = \int\limits_{x-2}^{x} (4-\xi) \cdot 2 d\xi + \int\limits_{x}^{5} (4-\xi) \cdot (-1) d\xi = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{2}$;

ж) $5 \le x < 7$: $(f * g)(x) = \int\limits_{x-2}^{5} (4-\xi) \cdot 2 d\xi = (x-6)^2 - 1$;

з) $x \ge 7$: $\quad (f * g)(x) = 0$.

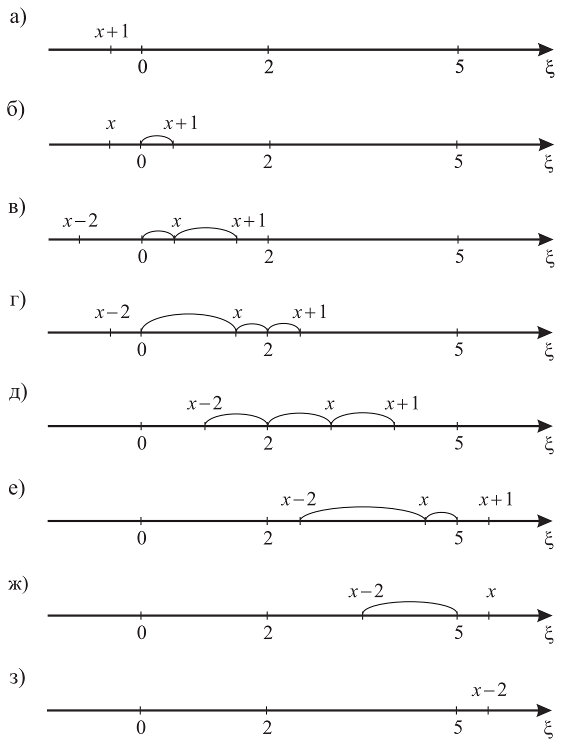

Рис. 2.10

Таким образом,

$$(f*g)(x)=\begin{cases} 0, \quad x<-1; \\ -2x-2, \quad -1\le x<0; \\ 4x-2, \quad 0\le x<1; \\ \dfrac{1}{2}(x+3)^2-6, \quad 1\le x<2; \\ -\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}, \quad 2\le x<4; \\ -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{25}{2}, \quad 4\le x<5; \\ (x-6)^2-1, \quad 5\le x<7; \\ 0, \quad x\ge 7. \end{cases}$$

Пример 8. Найти образ Фурье свертки двух функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных графически (рис. 2.11).

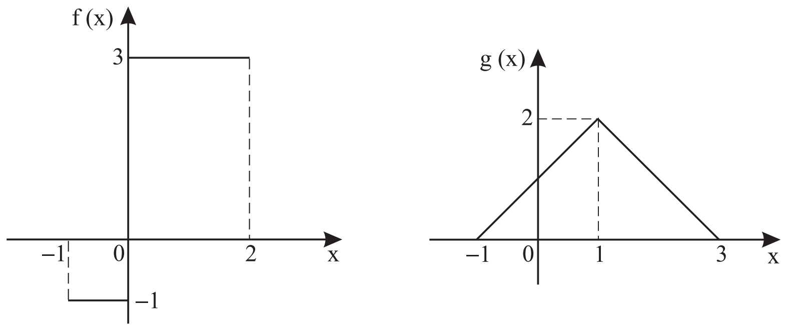

Рис. 2.11

Решение. Представим функцию $f(x)$ в виде суммы двух «прямоугольных импульсов»:

$$f(x) = -\mathrm{rect}(x+0{,}5) + 3\mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Тогда с учетом свойств преобразования Фурье находим

$$\tilde{f}(\nu) = -e^{i\pi\nu}\mathrm{sinc}(\pi\nu) + 6e^{-i\cdot 2\pi\nu}\mathrm{sinc}(2\pi\nu).$$

Так как график функции $g(x)$ получается из графика функции $\Lambda(x)$ в результате растяжения вдоль оси абсцисс в 2 раза, затем растяжения вдоль оси ординат в 2 раза и сдвига вдоль оси абсцисс на одну единицу вправо, то

$$g(x) = 2\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

и ее образ Фурье равен

$$\tilde{g}(\nu) = 4e^{-i\cdot 2\pi\nu}\mathrm{sinc}^2(2\pi\nu).$$

Применив теорему о свертке, окончательно получим

$$\mathrm{F}[f * g](\nu) = 4e^{-i\cdot 2\pi\nu}\mathrm{sinc}^2(2\pi\nu)\left[-e^{i\pi\nu}\mathrm{sinc}(\pi\nu) + 6e^{-i\cdot 2\pi\nu}\mathrm{sinc}(2\pi\nu)\right].$$

Пример 9. Найти взаимную ковариационную функцию

$$Kv_{f,g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(\xi - x)\,d\xi,$$

если

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < -2; \\ 1, -2 \le x < 2; \\ -2, 2 \le x < 3; \\ 0, x \ge 3; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 1 - x, 0 \le x < 2; \\ 0, x \ge 2. \end{cases}$$

Решение. В зависимости от того, какие значения принимает переменная x, приходим к следующим возможным случаям:

а) $x < -4$: $Kv_{f,\,g}(x) = 0$;

б) $-4 \le x < -2$: $Kv_{f,\,g}(x) = \int\limits_{-2}^{x+2} 1\cdot(1+x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{2}$;

в) $-2 \le x < 0$: $Kv_{f,\,g}(x) = \int\limits_{x}^{x+2} 1\cdot(1+x-\xi)\,d\xi = 0$;

г) $0 \le x < 1$: $Kv_{f,\,g}(x) = \int\limits_{x}^{2} 1\cdot(1+x-\xi)\,d\xi + \int\limits_{2}^{x+2} (-2)\cdot(1+x-\xi)\,d\xi = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(x-1)^2$;

д) $1 \le x < 2$: $Kv_{f,\,g}(x) = \int\limits_{x}^{2} 1\cdot(1+x-\xi)\,d\xi + \int\limits_{2}^{3} (-2)\cdot(1+x-\xi)\,d\xi = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(x+1)^2$

е) $2 \le x < 3$: $Kv_{f,\,g}(x) = \int\limits_{x}^{3} (-2)\cdot(1+x-\xi)\,d\xi = (x-2)^2 - 1$;

ж) $x \ge 3$: $Kv_{f,\,g}(x) = 0.$

Окончательно можем записать

$$Kv_{f,\,g}(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -4; \\ \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{1}{2}, \quad -4 \le x < -2; \\ 0, \quad -2 \le x < 0; \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(x-1)^2, \quad 0 \le x < 1; \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(x+1)^2, \quad 1 \le x < 2; \\ (x-2)^2 - 1, \quad 2 \le x < 3; \\ 0, \quad x \ge 3. \end{cases}$$

Пример 10. Найти взаимную корреляционную функцию

$$Kr_{f,\,g}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{f}(\xi)\overset{\circ}{g}(\xi - x)\,d\xi,$$

где $\overset{\circ}{f}(x) = f(x) - m_f$ и $\overset{\circ}{g}(x) = g(x) - m_g$ — центрированные относительно своих средних значений m_f и m_g финитные функции, $f(x)$ и $g(x)$, обращающиеся в нуль вне некоторого отрезка, т. е. $f(x) \equiv 0$ при $x \notin [a,b]$, $g(x) \equiv 0$ при $x \notin [c,d]$,

если

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < -1; \\ 4, -1 \le x < 1; \\ -2, 1 \le x < 3; \\ 0, x \ge 3; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ 2 - x, 0 \le x < 2; \\ 0, x \ge 2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим средние значения функций $f(x)$ и $g(x)$ по формулам:

$$m_f = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad m_g = \frac{1}{d-c}\int\limits_c^d g(x)\,dx;$$

$$m_f = \frac{1}{3-(-1)}\left[\int\limits_{-1}^{1} 4\,d\xi + \int\limits_{1}^{3}(-2)\,d\xi\right] = \frac{8-4}{4} = 1;$$

$$m_g = \frac{1}{2-0}\int\limits_0^2 (2-\xi)\,d\xi = 1.$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{f}(\xi) = \begin{cases} 0, \xi < -1; \\ 3, -1 \le \xi < 1; \\ -3, 1 \le \xi < 3; \\ 0, \xi \ge 3; \end{cases} \qquad \overset{\circ}{g}(\xi - x) = \begin{cases} 0, \xi < x; \\ 1 + x - \xi, x \le \xi < x + 2; \\ 0, \xi \ge x + 2. \end{cases}$$

В зависимости от того, какие значения принимает переменная x, приходим к следующим возможным случаям:

а) $x < -3$: $Kr_{f,g}(x) = 0$;

б) $-3 \le x < -1$: $Kr_{f,g}(x) = \int\limits_{-1}^{x+2} 3 \cdot (1 + x - \xi)\, d\xi = \frac{3}{2}(x+2)^2 - \frac{3}{2}$;

в) $-1 \le x < 1$:

$$Kr_{f,g}(x) = \int\limits_{x}^{1} 3 \cdot (1 + x - \xi)\, d\xi + \int\limits_{1}^{x+2} (-3) \cdot (1 + x - \xi)\, d\xi = 3 - 3x^2;$$

г) $1 \le x < 3$: $Kr_{f,g}(x) = \int\limits_{x}^{2} (-3) \cdot (1 + x - \xi)\, d\xi = \frac{3}{2}(x-2)^2 - \frac{3}{2}$;

д) $x \ge 3$: $Kr_{f,g}(x) = 0$.

В результате имеем

$$Kr_{f,g}(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -3; \\ \frac{3}{2}(x+2)^2 - \frac{3}{2}, \quad -3 \le x < -1; \\ 3 - 3x^2, \quad -1 \le x < 1; \\ \frac{3}{2}(x-2)^2 - \frac{3}{2}, \quad 1 \le x < 3; \\ 0, \quad x \ge 3. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти образ Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, |x| \le 1; \\ 0, |x| > 1. \end{cases}$$

Задача 2. Найти косинус-образ Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}, \quad \alpha > 0, \quad x \in [0, +\infty).$$

Задача 3. Найти синус-образ Фурье функции

$$f(x)=\frac{x}{\alpha^2+x^2},\quad \alpha>0,\quad x\in[0,+\infty).$$

Задача 4. Найти образ Фурье функции $f(x)$, если $f(x)\equiv 0$ при $x\notin[0,4]$, а при $x\in[0,4]$ график этой функции состоит из звеньев ломаной, проходящей через точки A(0,1), B(1,1), C(3/2,3), D(2,1) и E(4,1).

Задача 5. Найти свертку функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

а) $f(x)=\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$, $g(x)=3\cdot\mathrm{rect}(x-2)$;

б) $f(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right)$, $g(x)=\frac{\pi}{2}\Lambda\left(\frac{2x}{\pi}\right)$.

3. УСЛОВИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Задача 1. Разложить в ряд Фурье в форме суперпозиции простых гармоник функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-T/2,T/2]$. Построить:

1) амплитудный и фазовый спектры;

2) графики частичных сумм ряда Фурье $S_3(x)$, $S_{10}(x)$, $S_{20}(x)$, $S_{100}(x)$.

Значения параметров T, h, p и q приведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер варианта	T	h	p	q
1, 7, 13, 19	2	2	–2	1
2, 8, 14, 20	2	–2	2	–1
3, 9, 15, 21	2	1	0	–2
4, 10, 16, 22	2	–1	0	2
5, 11, 17, 23	2	1	–1	2
6, 12, 18, 24	2	–1	1	–2

Варианты 1–6:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{T}x+h, & -T/2\le x<0;\\ p, & 0\le x<T/4;\\ q, & T/4\le x\le T/2.\end{cases}$$

Варианты 7–12:

$$f(x)=\begin{cases}q, & -T/2\le x<-T/4;\\ p, & -T/4\le x<0;\\ h-\dfrac{2h}{T}x, & 0\le x\le T/2.\end{cases}$$

Варианты 13–18:

$$f(x)=\begin{cases}h-\dfrac{2h}{T}x, & -T/2\le x<0;\\ p, & 0\le x<T/4;\\ q, & T/4\le x\le T/2.\end{cases}$$

Варианты 19–24:

$$f(x)=\begin{cases}q, & -T/2\le x<-T/4;\\ p, & -T/4\le x<0;\\ \dfrac{2h}{T}x-h, & 0\le x\le T/2.\end{cases}$$

Задача 2. Найти свертку функций $f(x)$ и $g(x)$, если функция $f(x)$ принимает значение, равное нулю, при $x\notin[x_1,x_4]$, а при $x\in[x_1,x_4]$ ее график состоит из звеньев ломаной *ABCDE*:

1) $A(x_1,a)$, $B(x_2,a)$, $C(x_3,b)$, $D(x_4,0)$ для вариантов 1–12;

2) $A(x_1,0)$, $B(x_2,a)$, $C(x_3,b)$, $D(x_4,b)$ для вариантов 13–24.

Значения параметров x_1, x_2, x_3, x_4, a и b приведены в табл. 2.

Таблица 2

Номер варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	a	b
1	–1	1	2	4	2	–2
2	0	2	3	5	–2	2
3	–2	0	2	4	2	–2
4	–1	0	4	6	2	–1
5	–1	1	2	4	–2	1
6	–2	1	2	4	1	–2
7	0	2	4	5	2	–2
8	–1	1	4	6	–1	2
9	–1	2	3	5	1	–2
10	0	2	4	5	1	–2
11	–2	0	3	4	–2	2
12	0	2	3	5	–1	2
13	–1	1	2	4	2	–2
14	0	2	4	5	1	–2
15	–2	0	3	4	–2	2
16	0	2	4	5	–2	1
17	–2	0	2	4	2	–2
18	–1	1	3	5	–2	3
19	–2	1	3	4	2	–1
20	0	1	3	5	2	–2
21	–1	0	2	4	2	–2
22	–2	–1	1	3	2	–1
23	–1	1	3	5	–1	2
24	–2	0	2	4	–2	1

Для всех вариантов функция $g(x)$ имеет вид

$$g(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & 0\le x<1;\\ 0, & x\ge 0.\end{cases}$$

Задача 3. Для кусочно-постоянных функций $f(x)$ и $g(x)$ вида

$$y(x)=\begin{cases}0, & x<x_1;\\ a, & x_1\le x<x_2;\\ b, & x_2\le x<x_3;\\ 0, & x\ge x_3\end{cases}$$

найти взаимную ковариационную и взаимную корреляционную функции. Значения параметров x_1, x_2, x_3, a и b приведены в табл. 3.

Таблица 3

Номер варианта	$f(x)$					$g(x)$				
	x_1	x_2	x_3	a	b	x_1	x_2	x_3	a	b
1	1	2	3	2	–4	–1	0	2	–1	2
2	–2	0	2	1	–3	0	1	3	3	–3
3	0	1	3	–1	2	–2	0	1	2	–1
4	–2	1	3	1	–7	1	2	4	5	–1
5	0	2	4	3	–1	0	1	5	–3	2
6	–1	2	3	3	–1	1	2	4	–1	2
7	1	3	4	2	–1	0	1	4	–2	2
8	0	2	3	2	–1	–1	1	3	2	–3
9	–2	0	1	3	–2	0	2	3	2	–1
10	–1	0	2	1	–2	–2	0	2	–1	3
11	0	1	5	3	–2	–1	2	3	–3	1
12	1	2	4	1	–2	0	2	4	–3	1
13	–1	0	2	1	–2	0	1	3	1	–2
14	0	1	3	3	–3	1	2	3	2	–4
15	0	1	4	–2	2	–2	0	2	1	–3
16	1	2	4	5	–1	0	1	3	–1	2
17	1	2	4	–5	1	–2	1	3	1	–7
18	0	1	5	–3	2	–1	2	3	3	–1
19	1	2	4	–1	2	–1	2	3	1	–3
20	0	1	4	–2	2	1	3	4	2	–1
21	0	2	3	–2	1	–1	1	3	–2	3
22	–2	0	2	–1	3	–1	0	2	1	–2
23	0	2	3	2	–1	–2	0	1	–3	2
24	0	1	3	1	–2	–1	0	2	–1	2

Задача 4. Найти образ Фурье функции $f(x)$, если $f(x) \equiv 0$ при $x \notin [x_1, x_4]$, а при $x \in [x_1, x_4]$ график этой функции состоит из звеньев ломаной, проходящей через точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$. Координаты точек приведены в табл. 4.

Таблица 4

Номер варианта	*A*	*B*	*C*	*D*
1	(1,1)	(3,–1)	(5,1)	(6,1)
2	(0,–1)	(2,1)	(4,–1)	(5,–1)
3	(–1,1)	(0,1)	(2,–1)	(4,1)
4	(–2,–1)	(–1,–1)	(1,1)	(3,–1)
5	(0,1)	(1,2)	(2,1)	(4,1)
6	(–2,1)	(–1,1)	(0,0)	(1,1)
7	(–1,1)	(0,1)	(1,2)	(2,1)
8	(0,–1)	(2,2)	(4,–1)	(5,–1)
9	(–2,1)	(–1,1)	(1,–2)	(3,1)
10	(–1,–2)	(0,0)	(1,–2)	(3,–2)
11	(–1,1)	(0,1)	(1,–3)	(2,1)
12	(–2,–1)	(0,2)	(2,–1)	(4,–1)
13	(–2,–2)	(1,0)	(4,–2)	(6,–2)
14	(–2,1)	(0,–2)	(2,1)	(4,1)
15	(–1,–1)	(0,–1)	(1,3)	(2,–1)
16	(–1,2)	(0,0)	(1,2)	(3,2)
17	(–2,–1)	(–1,–1)	(1,2)	(3,–1)
18	(0,1)	(2,–2)	(4,1)	(5,1)
19	(–1,–1)	(0,–1)	(1,–2)	(2,–1)
20	(–2,–1)	(–1,–1)	(0,0)	(1,–1)
21	(0,–1)	(1,–2)	(2,–1)	(4,–1)
22	(–2,1)	(–1,1)	(1,–1)	(3,1)
23	(–1,–1)	(0,–1)	(2,1)	(4,–1)
24	(0,1)	(2,–1)	(4,1)	(5,1)

ЛИТЕРАТУРА

Власова Е.А. Ряды : учеб. для втузов / Е.А. Власова ; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 612 с.

Волков И.К. Интегральные преобразования и операционное исчисление: учеб. для втузов / И.К. Волков, А.Н. Канатников ; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 228 с.

Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1976. 544 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ