ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1 «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

ЗАДАНИЕ 1.

Даны комплексные числа: $z_1, \quad z_2$.

a) Найти : 1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - z_2$; 3) $z_1 \cdot z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$; результаты представить в алгебраической форме.

b) z_1 перевести в тригонометрическую форму и показательную форму;

c) z_2 перевести в тригонометрическую форму и показательную форму;

d) $\frac{z_1}{z_2}$ разделить одно число на другое в тригонометрической форме;

e) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ возвести в степень и результат представить в алгебраической форме;

f) z_3 перевести в алгебраическую форму.

1. $z_1 = 1 + i \cdot \sqrt{3} \qquad z_2 = 1 - i \qquad z_3 = 3e^{-\frac{14\pi}{3}i} \qquad n = 15$

2. $z_1 = 1 - i \cdot \sqrt{3} \qquad z_2 = 1 + i \qquad z_3 = 2e^{-\frac{9\pi}{4}} \qquad n = 15$

3. $z_1 = 2 - 2 \cdot i \qquad z_2 = \sqrt{3} + i \qquad z_3 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{3}i} \qquad n = 10$

4. $z_1 = 2 + 2 \cdot i \qquad z_2 = \sqrt{3} - i \qquad z_3 = \frac{2}{3} e^{\frac{11\pi}{3}i} \qquad n = 11$

5. $z_1 = \sqrt{3} - i \qquad z_2 = 1 + i \cdot \sqrt{3} \qquad z_3 = \frac{1}{3} e^{\frac{-23\pi}{6}} \qquad n = 9$

6. $z_1 = \sqrt{3} + i \qquad z_2 = 1 - i \cdot \sqrt{3} \qquad z_3 = 5\sqrt{2}\, e^{\frac{-17\pi}{4}i} \qquad n = 17$

7. $z_1 = \sqrt{3} - i \qquad z_2 = 1 - i \cdot \sqrt{3} \qquad z_3 = \frac{1}{2} e^{\frac{21\pi}{4}i} \qquad n = 15$

8. $z_1 = 3 + 3 \cdot i \qquad z_2 = \sqrt{3} + i \qquad z_3 = \sqrt{3}\, e^{\frac{27\pi}{6} i} \qquad n = 9$

9. $z_1 = -3 + 3 \cdot i \qquad z_2 = \sqrt{3} - i \qquad z_3 = 4e^{\frac{-17\pi}{6} i} \qquad n = 12$

10. $z_1 = \sqrt{3} + i \qquad z_2 = 6 - i \cdot 6\sqrt{3} \qquad z_3 = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{-13\pi}{4} i} \qquad n = 14$

11. $z_1 = 1 - i \qquad z_2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_3 = 3e^{\frac{14\pi}{3} i} \qquad n = 16$

12. $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i \qquad z_2 = 1 - i \cdot \sqrt{3} \qquad z_3 = 2e^{\frac{9\pi}{4} i} \qquad n = 15$

13. $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i \qquad z_2 = 2 - 2 \cdot i \qquad z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{-7\pi}{3} i} \qquad n = 6$

14. $z_1 = \sqrt{3} - i \qquad z_2 = -3 - 3 \cdot i \qquad z_3 = \frac{1}{3} e^{\frac{-11\pi}{3} i} \qquad n = 12$

15. $z_1 = 1 + i \cdot \sqrt{3} \qquad z_2 = -\sqrt{3} + i \qquad z_3 = e^{\frac{23\pi}{6} i} \qquad n = 8$

16. $z_1 = 1 - i \cdot \sqrt{3} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} i \qquad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{17\pi}{4} i} \qquad n = 17$

17. $z_1 = 3 - i \cdot 3\sqrt{3} \qquad z_2 = \sqrt{3} - i \qquad z_3 = 3e^{\frac{-21\pi}{4} i} \qquad n = 14$

18. $z_1 = \sqrt{3} + i \qquad z_2 = -3 + 3 \cdot i \qquad z_3 = \sqrt{3}\, e^{\frac{-27\pi}{6} i} \qquad n = 9$

19. $z_1 = -\sqrt{3} - i \qquad z_2 = -3 + 3 \cdot i \qquad z_3 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{17\pi}{6} i} \qquad n = 16$

20. $z_1 = 4 - i \cdot 4\sqrt{3} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot i \qquad z_3 = \frac{1}{4} e^{\frac{13\pi}{4} i} \qquad n = 14$

ЗАДАНИЕ 2.

Решить уравнения (результаты представить в алгебраической форме, где возможно):

1. 1) $x^2 = -16$

   2) $z^3 - 2 - 2\sqrt{3} \cdot i = 0$

2. 1) $x^2 = -2$

   2) $z^3 + 2 - 2\sqrt{3} \cdot i = 0$

3. 1) $3x^2 = -5$

   2) $z^3 - 3 + 3i = 0$

4. 1) $x^2 + 0{,}09 = 0$

   2) $z^3 - 2 - 2 \cdot i = 0$

5. 1) $x^2 - 2x + 5 = 0$

   2) $z^3 + 2 + 2 \cdot i = 0$

6. 1) $3x^2 + 4x + 3 = 0$

   2) $z^3 - 3 \cdot i = 0$

7. 1) $x^2 - 8x + 20 = 0$

   2) $z^3 + 3 \cdot i = 0$

11. 1) $3x^2 - 14x + \dfrac{218}{3} = 0$

   2) $z^3 - 1 = i$

12. 1) $x^2 + 2x + 5 = 0$

   2) $z^5 - 1 - i \cdot \sqrt{3} = 0$

13. 1) $x^2 - 6x + 18 = 0$

   2) $z^6 + 64 = 0$

14. 1) $x^2 - 4x + 5 = 0$

   2) $z^5 - 1 = 0$

15. 1) $2x^2 - 10x + 13 = 0$

   2) $z^3 = 8 \cdot i$

16. 1) $x^2 + x + 1 = 0$

   2) $z^4 + 1 = -i \cdot \sqrt{3}$

17. 1) $x^2 + 2x + 3 = 0$

   2) $z^4 = -1$

8. 1) $5x^2-4x+8=0$

2) $z^3-2\cdot i=0$

18. 1) $x^2+81=0$

2) $z^3+4-\sqrt{48}\cdot i=0$

9. 1) $x^2-6x+16=0$

2) $z^3+2\cdot i=0$

19. 1) $x^2-6x+13=0$

2) $z^5=i$

10. 1) $5x^2+2x+2=0$

2) $z^4-i=1$

20. 1) $x^2+2x+17=0$

2) $z^4+8=8\sqrt{3}\cdot i$

ЗАДАНИЕ 3. (10 р)

Найти действительную часть числа:

1. $z=\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}+\dfrac{1}{i}$
2. $z=\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^{54}$
3. $z=\dfrac{5-2i}{2+5i}+\dfrac{3+4i}{4-3i}-\dfrac{1}{i}$
4. $z=i+\dfrac{1+6i}{1-7i}$
5. $z=\dfrac{5-i}{2+5i}+\dfrac{1}{i}$
6. $z=\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{2+i}$
7. $z=\dfrac{5+12i}{8-6i}+\dfrac{(1+2i)^2}{i}$
8. $z=\dfrac{(2+i)^5}{1-2i}$
9. $z=\dfrac{2+i}{(1-i)^2}-\dfrac{1}{2i}$
10. $z=\dfrac{6+2i}{3-7i}-\dfrac{(1+i)^2}{4i}$
11. $z=\dfrac{6+2i}{3-7i}-\dfrac{2+3i}{2+5i}$
12. $z=\dfrac{2-i}{(1+i)^2}+\dfrac{3}{i}$
13. $z=\dfrac{6+2i}{1-i}-i^{37}$
14. $z=\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$

15. $z=\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

16. $z=\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2-i^{73}$

17. $z=\dfrac{1-2i}{-3-7i}-\dfrac{(1+2i)^2}{2i}$

18. $z=\dfrac{6+2i}{i}+\dfrac{(1+i)^6}{4i}$

19. $z=\left(\dfrac{6+2i}{3-7i}\right)^3$

20. $z=\dfrac{1+2i}{2-3i}-\dfrac{3-4i}{4-i}+\dfrac{2-i}{i}$

ЗАДАНИЕ 4 [1]:

1. Докажите, что число $\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{(z+\overline{z})\cdot(z-\overline{z})}{2\cdot z\cdot\overline{z}}$ действительно.
2. Доказать, что если $z=a+bi$, то $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{a^2+b^2}$
3. Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных *x*, функцию $\sin^5 x$.
4. При каких действительных значениях *x* числа $z_1=x+(3i-1)^2$ и $z_2=2x^2+6i+2i^2$ будут противоположными?
5. Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных *x*, функцию $\cos^3 x$.
6. Укажите на плоскости точки *z*, для которых $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.
7. Найти комплексные числа, для которых: $z^2+2\overline{z}+1=0$.
8. Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функцию $\cos 5x$, используя формулу Муавра.
9. Докажите, что число $\dfrac{1}{i}(z-\overline{z})$ действительно
10. Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию: : $z^2-2(z+\overline{z})+4=0$.

---

[1] Смотрите также конспекты на эстонском языке. Там найдёте примеры решений 5, 3, 14 ... заданий. Для остальных, возьмите за z = a +bi – алгебраическую форму числа.

11. Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функцию $\sin 4x$, используя формулу Муавра.

12. Найти комплексные числа, для которого: $z^2 + \bar{z} = 0$.

13. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi$ и $z_2 = 8y^2 + 20i^7$ являются сопряженными?

14. Докажите равенство: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

15. Применяя формулу Муавра, доказать справедливость тождества $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

16. Докажите равенство: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

17. Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных *x*, функцию $\cos^4 x$.

18. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$.

19. Решить уравнение: $z^2 + |z|^2 = 0$.

20. На плоскости дана окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. При каких условиях точка, изображающая комплексное число z, будет лежать: 1) внутри круга; 2) на окружности; 3) вне круга?