Федеральное агентство по образованию

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)

З.А. Смыслова

СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Часть 1

Учебное пособие

2004

Смыслова З.А.
Спецглавы математики. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 103 с.

Данное учебное пособие содержит теоретический материал по теории множеств и комбинаторике, математической логике, основам теории групп, а также варианты двух контрольных работ для студентов специальности 2202 «Автоматизированные системы обработки информации и управления», обучающихся по дистанционной форме. Приведены примеры решения задач контрольных работ.

Пособие может быть использовано для студентов заочной и дневной форм обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1 Множества и операции над ними

1.1.1 Понятие множества

Теория множеств опирается на три первичных понятия:
1) множество;
2) элемент;
3) принадлежность.

Строгого определения этим понятиям не дается, описывается только их применение. Для этих понятий используются обозначения: «$a \in A$» – элемент a принадлежит множеству A; «$c \notin A$» – элемент c не принадлежит множеству A.

Говоря о некотором множестве, мы требуем его:

1) целостности, т.е. возможности рассматривать его как отдельный объект;
2) различимости его элементов;
3) неупорядоченности элементов.

Поэтому записи $\{a,b\}$ и $\{b,a\}$ определяют одно и то же множество.

1.1.2 Способы задания множеств

Множество можно задать, перечислив все его элементы: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{-1,3,6,8\}$. Порядок записи элементов множества произволен. Часто задают множество, указав его характеристическое свойство, которое для каждого элемента позволяет выяснить, принадлежит он множеству или нет.

Например,

$B = \{x \mid x$ – целый корень уравнения $2x^3 - x^2 + 1 = 0\}$,

$C = \{x \mid -1 \le x \le 7, x$ – целое$\}$.

В дальнейшем для известных числовых множеств будут использоваться обозначения:

N = { 1,2,3,…} – множество натуральных чисел;
Z = { …, –2,–1,0,1,2,…} – множество целых чисел;
Q – множество рациональных чисел;
R – множество действительных чисел.

1.1.3 Основные определения

Пустым множеством называется множество $\varnothing$, не содержащее ни одного элемента, т.е. для любого элемента x выполняется $x \notin \varnothing$.

Универсальным называется множество **U** всех элементов, рассматриваемых в данной задаче.

Пример.

Пусть **U** = **Z** и требуется найти все решения уравнения $x^2 = 2$. Множество **M** решений этой задачи есть пустое множество: **M** = $\varnothing$.

Пусть теперь **U** = **R**. Тогда множество **M** решений уравнения $x^2 = 2$ не пусто: $M = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Будем говорить, что множество A ***включается*** во множество B $(A \subseteq B)$, если каждый элемент множества A является элементом множества B (говорят также, что A является подмножеством множества B). Из определения включения следуют свойства:

1) $A \subseteq A$ для любого множества A;
2) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
3) $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A;
4) $A \subseteq \mathbf{U}$ для любого множества A.

Подмножество $A \subseteq B$ называется собственным подмножеством множества B ($A \subset B$ – строгое включение), если A не пусто и не совпадает с B. Например, имеют место строгие включения: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Определим понятие ***равенства*** множеств: A=B тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B, \\ \forall x \in B \Rightarrow x \in A. \end{cases}$$

Свойства равенства множеств:

1) для любого A справедливо A=A;

2) если $A=B$, то и $B=A$;

3) если $A=B$ и $B=C$, то $A=C$.

1.1.4 Диаграммы Эйлера–Венна

Эти диаграммы применяются для наглядного изображения множеств и их взаимного расположения.

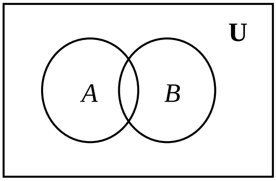


Рис. 1.1 – Диаграмма Эйлера–Венна

Универсальное множество **U** изображается в виде прямоугольника, а произвольные множества – подмножества универсального – в виде кругов (рис. 1.1).

При этом возможны следующие случаи взаимного расположения двух множеств A и B:

1) одно из множеств строго включается в другое ($A \subset B$ или $B \subset A$);

2) множества равны;

3) множества не имеют общих элементов;

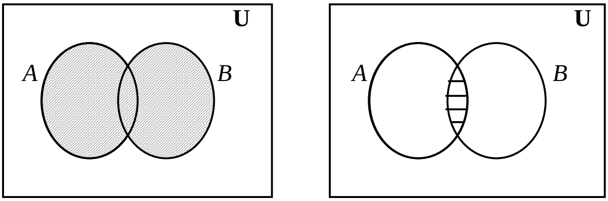
4) множества находятся в общем положении, т.е. не подходит ни один из вышеперечисленных случаев, и множества расположены как на рис. 1.1.

1.1.5 Операции над множествами

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (рис. 1.2, *а*).

Пример.

Если $A = \{0,1,2\}, B = \{-1,2,3\}$, то $A \cup B = \{-1,0,1,2,3\}$.



а) б)

Рис. 1.2 – Операции над множествами:
а) объединение множеств;
б) пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B (рис. 1.2, б).

Пример.

Если $A = \{0,1,2\}, B = \{-1,2,3\}$, то $A \cap B = \{2\}$.

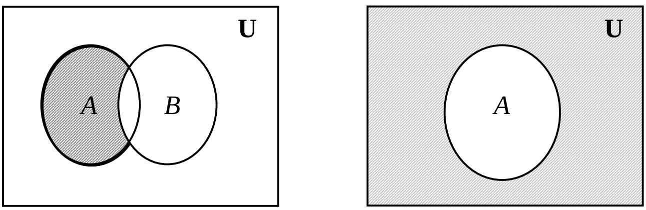
Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$ тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.3, *а*).

Пример.

$$A \setminus B = \{0,1,2\} \setminus \{-1,2,3\} = \{0,1\};$$

$$B \setminus A = \{-1,2,3\} \setminus \{0,1,2\} = \{-1,3\}.$$

Дополнением множества A до универсального **U** называется множество $\overline{A} = \mathbf{U} \setminus A$ (рис. 1.3, *б*).



а) б)

Рис. 1.3 – Операции над множествами:
а) разность множеств A и B;
б) дополнение множества A

Пример.
Если $A = \{0,1,2\}$, $\mathbf{U} = \{0,1,2,3,4,5\}$, то $\overline{A} = \mathbf{U} \setminus A = \{3,4,5\}$.

1.1.6 Системы множеств

Элементы множества сами могут быть множествами: $A = \{\{1\},\{2,3\},\{1,2\}\}$; в таком случае удобно говорить о системе множеств. Рассмотрим такие системы множеств, как булеан, разбиение и покрытие множеств.

Булеаном В***(X)*** множества X называется множество всех подмножеств множества X. Например, для множества $X = \{0,1\}$ булеаном является множество $\mathrm{B}(X) = \{\ \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\ \}$.

Разбиением R***(X)*** множества X называется система его непустых непересекающихся подмножеств, в объединении дающая множество X (рис. 1.4).

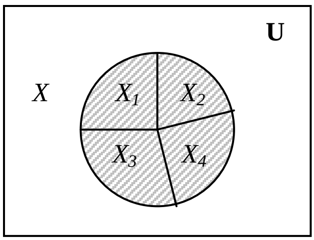


Рис. 1.4 – Разбиение множества $\mathrm{R}(X) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Например, для множества $X = \{1,2,3,4,5\}$ можно построить разбиение $\mathrm{R}_1(X) = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$, состоящее из двух элементов (они называются блоками разбиения), или разбиение $\mathrm{R}_2(X) = \{\{1\},\{2,5\},\{3\},\{4\}\}$ – из четырех блоков; возможны и другие разбиения этого множества X.

Покрытием **Р*(X)*** множества X называется система его непустых подмножеств, в объединении дающая множество X (рис. 1.5).

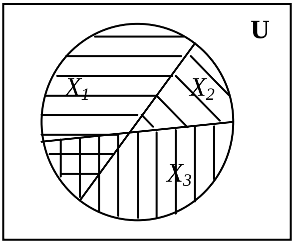


Рис. 1.5 – Покрытие множества
$P(X)=\{X_1, X_2, X_3\}$

В этом определении отсутствует слово «непересекающаяся» – т.е. блоки могут иметь общие элементы.

Пример.
Для множества $X=\{1,2,3,4,5\}$ покрытиями являются системы множеств
$P_1(X)=\{\{1\},\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$ и $P_2(X)=\{\{1,2\},\{2,3,4\},\{5\}\}$.

1.1.7 Законы алгебры множеств

Так же, как операции обычной алгебры, операции над множествами выполняются по законам (табл. 1.1), которые доказываются на основе введенных выше определений. Особенностью алгебры множеств является закон идемпотентности, благодаря которому в алгебре множеств нет числовых коэффициентов и степеней.

Таблица 1.1 – Законы алгебры множеств

№	Формулы	Название
1	$A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$	Свойства пустого множества
2	$A\cup U=U$; $A\cap U=A$; $A\cup\bar{A}=U$	Свойства универсального множества
3	$A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$	Закон коммутативности
4	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	Закон ассоциативности

Окончание табл. 1.1

№	Формулы	Название
5	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Закон дистрибутивности
6	$\overline{\overline{A}} = A$	Закон двойного дополнения
7	$A \cap A = A$; $A \cup A = A$	Законы идемпотентности
8	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;	Законы де Моргана
9	$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$	Законы поглощения

Докажем закон дистрибутивности

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1.1}$$

Обозначим X левую часть равенства (1.1), Y – правую. Согласно определению равенства множеств покажем, что выполняются одновременно $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пусть x – произвольная точка из множества $X = A \cup (B \cap C)$. Тогда по определению объединения множеств ($x \in A$ или $x \in (B \cap C)$). Далее по определению пересечения множеств ($x \in A$ или ($x \in B$ и $x \in C$)). Следовательно, (($x \in A$ или $x \in B$) и ($x \in A$ или $x \in C$)) $\Rightarrow$ (($x \in A \cup B$) и ($x \in A \cup C$)) $\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = Y$.

Таким образом для любого $x \in X$ выполняется $x \in Y$, т.е. $X \subseteq Y$.

Докажем теперь, что $Y \subseteq X$. Пусть y – произвольная точка из множества $Y = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда

($y \in Y$) $\Rightarrow$ ($y \in A \cup B$ и $y \in A \cup C$) $\Rightarrow$ (($y \in A$ или $y \in B$) и ($y \in A$ или $y \in C$)) $\Rightarrow$ ($y \in A$ или ($y \in B$ и $y \in C$)) $\Rightarrow$ ($y \in A$ или $y \in (B \cap C)$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y \in A \cup (B \cap C) = X.$$

В силу произвольности $y \in Y$ заключаем $Y \subseteq X$.

Таким образом, $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, следовательно, $X = Y$, и закон дистрибутивности доказан.

1.1.8 Решение задач 1–3 контрольной работы № 1

Задача 1. Решить задачу, пользуясь диаграммой Эйлера–Венна.

Группа туристов из 100 человек пробыла в городе N три дня. За это время драматический театр посетили 28 туристов, оперный – 42, кукольный – 30. И в драматическом, и в оперном побывало 10 человек; в драматическом и кукольном – 8; в оперном и кукольном – 5. Все три театра посетили три человека. Сколько туристов не были ни в одном театре?

Решение. В задаче идет речь о трех множествах $Д$, $О$, $К$ – зрителей драмы, оперы и кукольного спектакля соответственно. Универсальное множество **U** – это множество туристов группы. Используя обозначение $n(X)$ – количество элементов множества X, запишем кратко условие задачи:

$$n(\mathbf{U}) = 100;$$
$$n(Д) = 28; n(О) = 42; n(К) = 30;$$
$$n(Д \cap О) = 10;\ n(Д \cap К) = 8;\ n(О \cap К) = 5;$$
$$n(Д \cap К \cap О) = 3.$$

В задаче требуется найти $n(\overline{Д \cup О \cup К}) = n(U \setminus (Д \cap О \cap К))$.

Перенесем эти данные на диаграмму Эйлера–Венна. Разметку диаграммы начинаем с множества $Д \cap О \cap К$ – здесь три элемента. В множестве $Д \cap О$ – 10 элементов, но три из них уже учтены. Оставшиеся 7 элементов проставляем на диаграмме и т.д.

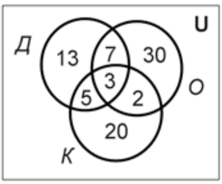


Рис. 1.6 – Диаграмма к задача 1

Теперь на диаграмме (рис. 1.6) все элементы учтены ровно по одному разу, следовательно, количество туристов, которые побывали хотя бы в одном театре, равно

$$n(Д \cup O \cup K) = 13 + 7 + 30 + 5 + 3 + 2 + 20 = 80.$$

Количество туристов, не побывавших ни в одном театре

$$n(\mathbf{U} \setminus (Д \cup O \cup K)) = 100 - 80 = 20.$$

Ответ: не были ни в одном театре 20 человек.

Задача 2. Задано универсальное множество $\mathbf{U} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и множества $X = \{2, 4, 7\}, Y\{1, 3, 5, 7\}, Z = \{2, 3, 5, 6\}$. Перечислить элементы множества $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X$. Записать булеан множества *X*, какое-либо разбиение множества *Y*, покрытие множества *X*.

Решение. Для нахождения множества *W* выполним операции над множествами в следующем порядке:

1) $\overline{Z} = U \setminus Z = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,3,5,6\} = \{1,4,7\}$ – по определению операции дополнения;

2) $\overline{Z} \cap Y = \{1,4,7\} \cap \{1,3,5,7\} = \{1,7\}$ – по определению операции пересечения множеств;

3) $W = (\overline{Z} \cap Y) \cup X = \{1,7\} \cup \{2,4,7\} = \{1,2,4,7\}$.

Итак, $W = \{1,2,4,7\}$.

Для построения булеана множества *X* воспользуемся двоичной записью числа. Если множество *X* содержит *n* элементов, его булеан содержит 2^n подмножеств – в нашем случае 8 подмножеств. Будем записывать номер подмножества трехразрядным двоичным числом от 0 до 7, включая в подмножество только те элементы, которым соответствует единица в двоичном разряде (табл. 1.2).

Таблица 1.2 – Булеан множества *X*

Номер подмножества	Двоичная запись номера	Подмножества множества $X = \{2,4,7\}$
0	000	$\{\} = \varnothing$
1	001	$\{\quad 7\}$
2	010	$\{\ 4\ \}$
3	011	$\{\ 4,7\}$
4	100	$\{2\quad\}$

Окончание табл. 1.2

Номер подмножества	Двоичная запись номера	Подмножества множества $X = \{2,4,7\}$
5	101	$\{2,\ 7\}$
6	110	$\{2,4\ \}$
7	111	$\{2,4,7\}$

Итак, в булеан множества X включаем пустое множество, само множество X, все одноэлементные подмножества, все двухэлементные подмножества множества X:

$$\mathrm{B}(X) = \{\ \varnothing, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,7\}, \{2,4\}, \{4,7\}, \{2,4,7\}\ \}.$$

Для множества Y построим разбиение, состоящее из трех блоков $\mathrm{R}(Y) = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$, например, таким образом:

$$Y_1 = \{1,7\}, Y_2 = \{3\}, Y_3 = \{5\}.$$

Определение разбиения выполняется: множества Y_1, Y_2, Y_3 не пусты, не пересекаются ($Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, $Y_2 \cap Y_3 = \varnothing$, $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$), их объединение равно множеству Y:

$$Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = (Y_1 \cup Y_2) \cup Y_3 = (\{1,7\} \cup \{3\}) \cup \{5\} = \{1,3,7\} \cup \{5\} =$$
$$= \{1,3,5,7\}.$$

Для построения покрытия выберем подмножества $Z_1 = \{4,7\}$ и $Z_2 = \{2,7\}$. Полученная система множеств $\mathrm{P}(X) = \{Z_1, Z_2\}$ состоит из двух блоков, объединение которых равно множеству X:

$$Z_1 \cup Z_2 = \{4,7\} \cup \{2,7\} = \{2,4,7\} = X\ .$$

Задача 3. Упростить выражение, пользуясь законами алгебры множеств:

$$A \cap (\overline{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B\ .$$

Решение. Договоримся считать, что операция пересечения множеств имеет более высокий приоритет, чем объединение множеств, т.е., если нет скобок, изменяющих приоритет, вначале выполняется пересечение, а затем объединение. Пользуясь этим правилом и законом ассоциативности, определим порядок действий:

$$(A\overset{1}{\cap}(\overline{A}\cup B))\overset{3}{\cup}((B\cup C)\overset{2}{\cup}B).$$

Выполним преобразования, указывая номер закона (табл. 1.1) над знаком равенства:

1) $A\cap(\overline{A}\cup B)\overset{5}{=}(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)\overset{1}{=}\varnothing\cup(A\cap B)\overset{1}{=}A\cap B$;

2) $(B\cup C)\cup B\overset{3}{=}(C\cup B)\cup B\overset{4}{=}C\cup(B\cup B)\overset{7}{=}C\cup B$;

3) $(A\cap B)\cup(C\cup B)\overset{3}{=}(A\cap B)\cup(B\cup C)\overset{4}{=}((A\cap B)\cup B)\cup C\overset{3}{=}$
$=(B\cup(A\cap B))\cup C\overset{9}{=}B\cup C$.

Ответ: $B\cup C$.

Задача 4 контрольной работы 1 выполняется аналогично доказательству закона дистрибутивности (1.1) в подразделе 1.1.7.

1.1.9 Контрольные вопросы и упражнения

1. Вставьте обозначения числовых множеств:

____ – множество натуральных чисел;

____ – множество целых чисел;

____ – множество рациональных чисел;

____ – множество действительных чисел.

2. Вставьте пропущенный знак $\in$ или $\notin$:

117 ____ **N**; 22,4 ____ **Z**; 4/3 ____ **Q**;

$\sqrt{2}$ ____ **Q**; $\sqrt{75}$ ____**R**; π ____ Z.

3. Принадлежит ли множеству корней уравнения $x^2-5x+6=0$ число $x=-3$?

4. Какими способами можно задать множество?

5. Запишите множество действительных корней уравнения $3x+4=0$. Как записать ответ, если требуется найти множество целых корней этого уравнения?

6. Что такое подмножество данного множества? Какой символ используется для записи «множество *A* является подмножеством множества *B*»? Запишите его: *A* ____ *B*.

7. Вставьте пропущенный символ $\in$ или $\subseteq$:

1 ____ {1,2,3}; {1}____ {1,2,3};

$\varnothing$ ____ {1,2,3}; {2,3}____ {1,2,3}.

8. Обведите кружком номер правильного ответа:

Множество всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B, называется:

1) объединением множеств A и B;
2) пересечением множеств A и B;
3) разностью множеств A и B.

9. Вставьте пропущенные знаки операций над множествами:

$\{a,b,c\}$ ___$\{d,b,e\}=\{b\}$;

$\{a,b,c\}$ ___ $\{c,d\}=\{a,b,c,d\}$;

$\{a,b,c\}$ ___ $\{a,d\}=\{b,c\}$.

10. Что такое булеан множества X?

11. Является ли булеаном множества $\{a,b,c\}$ система подмножеств $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$?

12. Является ли разбиением множества $\{a,b,c\}$ система подмножеств $\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$? Является ли она покрытием данного множества?

13. Нарисуйте диаграмму Эйлера – Венна для множества $A\cap(B\cup C)$. Нарисуйте диаграмму для $(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Сравните заштрихованную часть на обеих диаграммах. Как называется закон, который Вы проиллюстрировали?

14. Нарисуйте диаграммы Эйлера – Венна для левой и правой частей закона де Моргана. Сравните их.

15. Запишите законы алгебры множеств. Запомните их названия.

1.2 Бинарные отношения

1.2.1 Декартово произведение множеств. Соответствие множеств

Декартовым произведением $X\times Y$ двух множеств X и Y называется множество <u>всех</u> упорядоченных пар (x,y) таких, что $x\in X$, а $y\in Y$.

Пример 1. Пусть $X=\{1,2\}, Y=\{-1,0,1\}$. Тогда

$$X\times Y=\{(1,-1),(1,0),(1,1)(2,-1),(2,0),(2,1)\},$$

$$Y\times X=\{(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}.$$

Очевидно, что $X\times Y\neq Y\times X$, т.е. для операции декартова произведения множеств закон коммутативности не выполняется.

Декартовым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будем называть множество $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что $x_i\in X_i, i=1,2,\ldots,n.$ Если $X_1=X_2=\ldots=X_n$, то декартово произведение обозначают X^n.

Будем говорить, что задано соответствие q между множествами X и Y, если задана упорядоченная тройка $q=(X,Y,Q)$, где $Q\subseteq X\times Y$. Множество X называется областью отправления, а Y – областью прибытия соответствия q (обозначают $q: X\to Y$). Каждый элемент y в паре $(x,y)\in Q$ называется образом элемента x (x – прообразом элемента y) при данном соответствии q.

Соответствие $q=(X,Y,Q)$ называется ***отображением*** множества X во множество Y, если каждый элемент $x\in X$ имеет образ $y=q(x)\in Y$, т.е.

$\forall x\in X\ \exists y\in Y:(x,y)\in Q$.

Отображение $f: X\to Y$ называется ***функциональным***, если каждый элемент $x\in X$ имеет ***единственный*** образ $y=f(x)\in Y$:

$\forall x\in X\ \exists! y\in Y: y=f(x)\in Y$.

Множество образов при данном отображении $f: X\to Y$ обозначается $f(X)\subseteq Y$:

$f(X)=\{y|\ \exists x\in X: y=f(x)\}$.

Если множество $f(X)$ совпадает с множеством Y, то говорят, что $f: X\to Y$ осуществляет отображение _на_ множество Y.

Соответствие $f: X\to Y$ называется ***взаимно однозначным (биекцией)***, если

а) является отображением;

б) функционально;

в) отображает X «на» множество Y;

г) из условия $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Другими словами, $f: X \to Y$ является биекцией, если каждый элемент $x \in X$ имеет единственный образ $y = f(x) \in Y$, а каждый элемент $y \in Y$ имеет единственный прообраз $x = f^{-1}(y) \in X$ при данном отображении:

$$\begin{cases} \forall x \in X \ \exists! y \in Y : y = f(x); \\ \forall y \in Y \ \exists! x \in X : x = f^{-1}(y). \end{cases} \tag{1.2}$$

1.2.2 Определение бинарного отношения

Определение. Говорят, что на множестве X задано бинарное отношение R, если задано подмножество декартова произведения $X \times X$ (т.е. $R \subseteq X \times X$).

Пример 2. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$. Зададим на X следующие отношения:

$T = \{(x, y) |\ x, y \in X, x = y\}$ – отношение равенства;

$P = \{(x, y) |\ x, y \in X, x = y - 1\}$ – отношение предшествования;

$Q = \{(x, y) |\ x, y \in X, x$ делится на $y\}$ – отношение делимости.

Все эти отношения заданы с помощью характеристического свойства. Ниже перечислены элементы этих отношений:

$T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$;

$P = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$;

$Q = \{(4,4), (4,2), (4,1), (3,3), (3,1), (2,2), (2,1), (1,1)\}$.

Тот факт, что пара (x, y) принадлежит данному отношению R, будем записывать: $(x, y) \in R$ или xRy. Например, для отношения Q запись $4Q2$ означает, что 4 делится на 2 нацело, т.е. $(4,2) \in Q$.

Областью определения D_R бинарного отношения R называется множество $D_R = \{x |\ (x, y) \in R\}$.

Областью значений E_R называется множество

$E_R = \{y \mid (x, y) \in R\}$.

Так, для отношения P из примера 2 областью определения является множество $D_P = \{1,2,3\}$, а областью значений – $E_P = \{2,3,4\}$.

1.2.3 Способы задания бинарного отношения

Бинарное отношение можно задать, указав характеристическое свойство или перечислив все его элементы. Существуют и более наглядные способы задания бинарного отношения: график отношения, схема отношения, граф отношения, матрица отношения.

График отношения изображается в декартовой системе координат; на горизонтальной оси отмечается область определения, на вертикальной – область значений отношения; элементу отношения (x,y) соответствует точка плоскости с этими координатами. На рис. 1.7,а) приведен график отношения Q примера 2.

Схема отношения изображается с помощью двух вертикальных прямых, левая из которых соответствует области определения отношения, а правая – множеству значений отношения. Если элемент (x,y) принадлежит отношению R, то соответствующие точки из D_R и E_R соединяются прямой. На рис. 1.7,б) приведена схема отношения Q из примера 2.

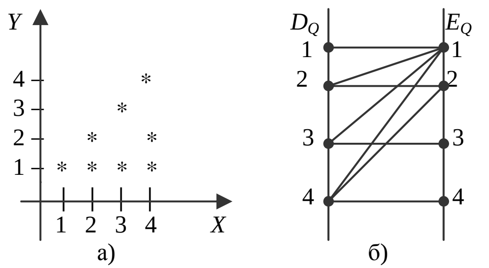


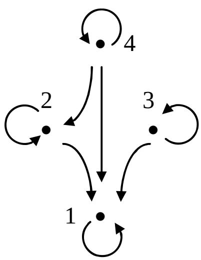
Рис. 1.7 – График отношения Q (a) и схема отношения Q (б)

Граф отношения $R \subseteq X \times X$ строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки – элементы множества X. Пара точек x и y соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (x,y) принадлежит отношению R. На рис. 1.8,а) приведен граф отношения Q примера 2.

Матрица отношения $R \subseteq X \times X$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества X. На пересечении строки x и столбца y ставится 1, если пара $(x, y) \in R$; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй – номеру столбца. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда матрица отношения $R \subseteq X \times X$ имеет n строк и n столбцов, а ее элемент r_{ij} определяется по правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & \text{если } (x_i, y_j) \notin R, \quad i, j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

На рис.1.8,б) приведена матрица отношения Q примера 2.



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

а) б)

Рис. 1.8 – Граф (а) и матрица (б) отношения Q

1.2.4 Свойства бинарных отношений

Бинарные отношения делятся на типы в зависимости от свойств, которыми они обладают. Рассмотрим следующие отношения на множестве $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$:

$G = \{(x, y) \mid x, y \in X, x > y\}$;

$L = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \le y\}$;

$M = \{(x, y) \mid x, y \in X, (x - y)$ делится на $3\}$;

$K = \{(x, y) \mid x, y \in X, x^2 + y^2 \le 20\}$.

Отношение R на множестве X называется ***рефлексивным,*** если для всех $x \in X$ выполняется условие $(x, x) \in R$. Среди приведенных выше отношений рефлексивными являются отношение L (т.к. неравенство $x \le x$ справедливо при всех $x \in X$) и отношение M (т.к. разность $x - x = 0$ делится на 3, значит, пара (x, x) принадлежит отношению M при всех $x \in X$).

Отношение R на множестве X называется ***антирефлексивным***, если условие $(x, x) \in R$ не выполняется ни при одном $x \in X$. Примером антирефлексивного отношения является отношение G (неравенство $x > x$ не выполняется ни при каких значениях x, следовательно, ни одна пара (x, x) не принадлежит отношению G). Отметим, что отношение K не является рефлексивным $(5^2 + 5^2 > 20 \Rightarrow (5,5) \notin K)$ и не является антирефлексивным $(1^2 + 1^2 \le 20 \Rightarrow (1,1) \in K)$.

Отношение R на множестве X называется ***симметричным***, если из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$. Симметричными являются отношения M (если $x - y$ делится на 3, то и $y - x$ делится на 3) и K (если $x^2 + y^2 \le 20$, то и $y^2 + x^2 \le 20$).

Отношение R на множестве X называется ***несимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \notin R$. Несимметричным является отношение G, т.к. условия $x < y$ и $y < x$ не могут выполняться одновременно (только одна из пар (x, y) или (y, x) принадлежит отношению G).

Отношение R на множестве X называется ***антисимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует $x = y$. Антисимметричным является отношение L, т.к. из одновременного выполнения $x \le y$ и $y \le x$ следует $x = y$.

Отношение R на множестве X называется ***транзитивным***, если для любых $x, y, z \in R$ из одновременного выполнения условий $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$. Отношения G, L, M являются транзитивными, а отношение K нетранзитивно: если $x = 3, y = 2, z = 4,$ то $3^2 + 2^2 \le 20$ и $2^2 + 4^2 \le 20$, но $3^2 + 4^2 \ge 20$, то есть выполняются условия $(x, y) \in K$ и $(y, z) \in K$, но $(x, z) \notin K$.

1.2.5 Отношения эквивалентности

Рассмотрим три отношения: *M*, *S*, *H*. Отношение *M* описано в 1.2.4. Отношение *S* введем на множестве *X* всех треугольников следующим образом: этому отношению принадлежат пары треугольников такие, что площадь треугольника *x* равна площади треугольника *y*.

Отношение *H* действует на множестве жителей г. Томска и содержит пары (x, y) такие, что *x* и *y* носят шляпы одинакового размера.

Свойства этих трех отношений приведены в таблице 1.3, где *P* означает рефлексивность, *AP* – антирефлексивность, *C* – симметричность, *AC* – антисимметричность, *HC* – несимметричность, *T* – транзитивность отношения. В качестве упражнения проверьте правильность заполнения таблицы, пользуясь определениями свойств бинарных отношений.

Таблица 1.3 – Свойства отношений

Отношение	Р	АР	С	АС	НС	Т
М	+	–	+	–	–	+
S	+	–	+	–	–	+
Н	+	–	+	–	–	+

Мы видим, что отношения обладают одинаковыми свойствами, поэтому их относят к одному типу.

Определение. Отношение R на множестве X называется отношением ***эквивалентности,*** если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Таким образом, отношения M, S, H являются отношениями эквивалентности на соответствующих множествах X. Важной особенностью отношений эквивалентности является то, что они разбивают все множество X на непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.

Определение. Классом эквивалентности, порожденным элементом $x \in X$, называется подмножество $[x]$ множества X, для элементов которого выполняется условие $(x, y) \in R, y \in X$. Таким образом, класс эквивалентности $[x] = \{y |\ y \in X, (x, y) \in R\}$.

Так, отношение M разбивает множество $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ на три класса эквивалентности: $[1] = \{1,4,7\}, [2] = \{2,5\}, [3] = \{3,6\}$. Класс, порожденный элементом 4, совпадает с классом [1]; [5] = =[2], [3] = [6], [7] = [1].

Классы эквивалентности образуют систему непустых непересекающихся подмножеств множества X, в объединении дающую все множество X – т.е. образуют разбиение множества X (см. 1.1.6).

Отношение эквивалентности обозначают « ≡ », поэтому определение класса эквивалентности можно записать так:

$$[x] = \{y |\ y \in X, x \equiv y\}.$$

Множество различных классов эквивалентности множества X по отношению R называется ***фактор-множеством*** и обозначается $X|_R$. Так, для отношения M фактор-множество состоит из трех элементов:

$$X|_M = \{[1],[2],[3]\}.$$

Теорема 1. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве X и $X|_R$ – совокупность всех различных классов эквивалентности по отношению R. Тогда $X|_R$ – разбиение множества X.

Доказательство. По условию теоремы R – отношение эквивалентности, т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно. Покажем, что $X\big|_R = \{K_1, K_2, ..., K_r\}$ – разбиение множества X, т.е.

а) $K_i \subseteq X$, $K_i \neq \varnothing$;

б) $\bigcup\limits_{i=1}^{r} K_i = X$;

в) $K_i \cap K_j = \varnothing,\ \ i \neq j,\ \ i, j = \overline{1, r}$.

Условие *а* выполняется по определению класса эквивалентности и по свойству рефлексивности, т.к. $x \in [x]$ для любого $x \in X$.

Условие *б* выполняется, так как каждый элемент множества X попадает в какой-либо класс эквивалентности и $\bigcup\limits_{x \in X} [x] = X$.

Условие *в* докажем методом «от противного». Пусть $K_i = [x]$ и $K_j = [y]$ – разные классы эквивалентности (т.е. K_i и K_j отличаются хотя бы одним элементом). Покажем, что они не пересекаются. Предположим противное: найдется элемент $z \in X$ такой, что $z \in K_i$ и $z \in K_j$. По определению класса эквивалентности $z \equiv x$ и $z \equiv y$. По свойствам симметричности и транзитивности отношения R имеем: $(x \equiv z$ и $z \equiv y) \Rightarrow (x \equiv y)$ – отсюда следует равенство множеств K_i и K_j .

Действительно, возьмем произвольный элемент $a \in K_i : a \in [x] \Rightarrow a \equiv x \Rightarrow a \equiv y \Rightarrow a \in K_j$ в силу произвольности a следует $K_i \subseteq K_j$.

Возьмем произвольный элемент $b \in K_j$: $b \in [y] \Rightarrow b \equiv y \Rightarrow b \equiv x \Rightarrow b \in K_i$ – в силу произвольности b следует $K_j \subseteq K_i$. По определению равенства множеств $K_i = K_j$.

Условие *в* доказано: если классы эквивалентности не совпадают, то они не пересекаются.

Следовательно, фактор-множество $X\big|_R$ является разбиением множества *X*.

Теорема 2. Всякое разбиение множества *X* порождает на *X* отношение эквивалентности.

Доказательство. Пусть $\{X_1, X_2, ..., X_r\}$ – разбиение множества *X*. Рассмотрим на *X* отношение $R = \{(x, y)\big|$ найдется $X_i, i = \overline{1, r} : x \in X_i$ и $y \in X_i\}$.

Покажем, что *R* – отношение эквивалентности.

Рефлексивность отношения *R* следует из условия $\bigcup\limits_{i=1}^{r} X_i = X$. Каждый элемент множества *X* попадает в одно из множеств $X_i, i = \overline{1, r}$, поэтому

$$\forall x \in X \; \exists X_i, i = \overline{1, r} : x \in X_i \Rightarrow (x, x) \in R.$$

Покажем, что отношение *R* симметрично. Пусть $(x, y) \in R$. Это означает, что

$$\exists X_i, i = \overline{1, r} : x \in X_i \text{ и } y \in X_i \Rightarrow y \in X_i \text{ и } x \in X_i \Rightarrow (y, x) \in R.$$

Покажем, что *R* транзитивно. Пусть $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$. Тогда найдется множество $X_i : x \in X_i$ и $y \in X_i$ и множество $X_j : y \in X_j$ и $z \in X_j$. Но так как различные блоки разбиения не пересекаются, а $y \in X_i \cap X_j$, то $X_i = X_j$. Следовательно, $(x, z) \in R$ и *R* транзитивно.

Отношение *R* обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, т.е. является отношением эквивалентности. Теорема доказана.

1.2.6 Отношения порядка

Рассмотрим отношения *G*, *L* из 1.2.4, отношение *Q* из 1.2.2 и отношение включения *V* на множестве всех подмножеств целых чисел (**B**(**Z**) – булеан множества **Z**):

$$V = \{(X, Y)\big| \; X, Y \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}), X \subseteq Y\}.$$

Таблица 1.4 – Свойства отношений

Отношение	Р	АР	С	АС	НС	Т
G	–	+	–	–	+	+
L	+	–	–	+	–	+
Q	+	–	–	+	–	+
V	+	–	–	+	–	+

Мы видим, что по свойствам эти отношения разделились на два типа.

Определение. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности, называется отношением ***порядка*** на множестве X (обозначается «$\preceq$»).

Определение. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами антирефлексивности, несимметричности, транзитивности, называется отношением ***строгого порядка***.

Таким образом, отношения L, Q, V являются отношениями порядка на соответствующих множествах, а отношение G – отношением строгого порядка.

1.2.7 Частично упорядоченные множества

Если на множестве X введено отношение порядка $\preceq$, то получен новый объект $(X, \preceq)$ – частично упорядоченное множество. Так, различные частично упорядоченные множества (**N**, $\leq$) и (**N**, $\mid$) можно получить, рассматривая на множестве **N** натуральных чисел отношения сравнения « $\leq$ » ($x \leq y$ – x меньше или равно y и делимости « $\mid$ » ($x \mid y$ – x является делителем y). Слово «частично» используется потому, что не все элементы множества могут быть сравнимы между собой. Для частично упорядоченного множества (**N**, $\mid$) несравнимы элементы $2 \in$ **N** и $3 \in$ **N**, так как ни один из них не является делителем другого.

Если все элементы множества сравнимы между собой, мы имеем линейный порядок, например, ($\mathbf{N}$, $\le$) – линейно упорядоченное множество.

1.2.8 Диаграммы Хассе

Для наглядного представления частично упорядоченного множества (X, R) используют диаграмму Хассе – граф отношения R без петель и транзитивно замыкающих дуг.

Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим на множестве X отношения порядка « $\le$ « и « $|$ «. Получим два частично упорядоченных множества (X, $\le$) и (X, $|$), различия которых наглядно отражают их диаграммы Хассе (рис.1.9).

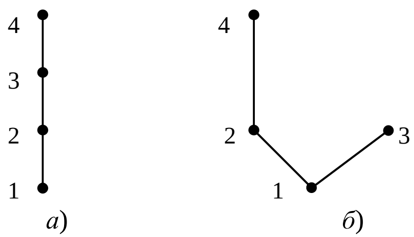


Рис. 1.9 – Диаграммы Хассе частично упорядоченных множеств (X, $\le$) (а) и (X, $|$) (б)

Определение. Элемент $w \in X$ называется ***наибольшим*** элементом частично упорядоченного множества $(X, \preceq)$, если $\forall x \in X \Rightarrow x \preceq w$. Элемент $u \in X$ называется ***максимальным*** элементом частично упорядоченного множества $(X, \preceq)$, если в множестве X нет элемента y такого, что $u \preceq y$.

Элемент $w = 4$ является наибольшим и одновременно максимальным для (X, $\le$) (рис. 1.9,а). В частично упорядоченном множестве (X, $|$) есть два максимальных $u_1 = 4$ и $u_2 = 3$, но нет наибольшего (рис. 1.9,б).

Аналогично определяются понятия наименьшего и минимального элементов частично упорядоченного множества.

Теорема. Всякое частично упорядоченное множество имеет не более одного наибольшего элемента.

Доказательство. Пусть $(X, \preceq)$ – частично упорядоченное множество. Теорема утверждает, что если в множестве $(X, \preceq)$ имеется наибольший элемент, то он единственный. Предположим противное: пусть имеется два различных наибольших элемента $w \in X$ и $w' \in X$. Тогда по определению наибольшего элемента $w \preceq w'$ и $w' \preceq w$, откуда в силу антисимметричности отношения порядка « $\preceq$ » следует $w' = w$ – противоречие, что и доказывает теорему.

1.2.9 Изоморфизм частично упорядоченных множеств

Частично упорядоченные множества $(X, \preceq)$ и $(Y, \preceq')$ ***изоморфны***, если существует биекция $\varphi : X \to Y$, сохраняющая отношение порядка, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \preceq x_2$, выполняется $\varphi(x_1) \preceq' \varphi(x_2)$, $\varphi(x_1), \varphi(x_2) \in Y$.

Пример. Рассмотрим множество T точек горизонтальной прямой, упорядоченное отношением L – «лежит левее или совпадает», и множество действительных чисел $\mathbf{R}$ с введенным на нем отношением порядка «≤». Тогда (T,L) изоморфно $(\mathbf{R}, \leq)$ и, решив задачу на множестве $\mathbf{R}$, мы иллюстрируем решение с помощью множества T, так как структура этих множеств одинакова.

Теорема. Всякое частично упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству его булеана, упорядоченному отношением включения.

Пример. Рассмотрим частично упорядоченное множество $(X, \mid)$ из 1.2.7. Так как $X = \{1, 2, 3, 4\}$ состоит из $n = 4$ элементов, то его булеан $\mathbf{B}(X)$ содержит $2^4 = 16$ элементов – подмножеств множества X. Выберем из них 4 подмножества следующим образом: сопоставим каждому элементу $x \in X$ подмножество

$S_x \in$ **B**(X), включающее те и только те элементы y, которые являются делителями элемента x:

$$S_x = \{y \mid y \in X, y \mid x\}.$$

Получим множество $F = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \subseteq$ **B**(X), где $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1,2\}$, $S_3 = \{1,3\}$, $S_4 = \{1,2,4\}$. Частично упорядоченные множества $(X, \mid)$ и $(F, \subseteq)$ изоморфны (рис. 1.10).

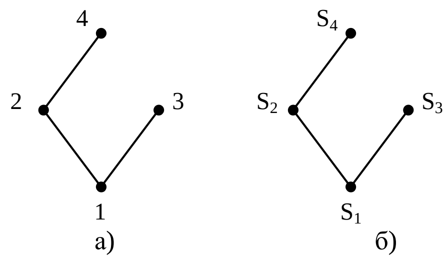


Рис. 1.10 – Диаграммы Хассе изоморфных частично упорядоченных множеств $(X, \mid)$ (а) и $(F, \subseteq)$ (б)

Доказательство теоремы. Пусть задано произвольное упорядоченное множество $(X, \preceq)$. Построим подмножество $F \subseteq$ **B**(X) с помощью соответствия: каждому элементу $x \in X$ сопоставим $f(x) = S_x = \{y \mid y \in X, y \preceq x\}$ и обозначим $F = \{S_x\}_{x \in X}$.

Покажем, что соответствие $f: X \to F$ является биекцией, т.е. выполняются условия *а – г* определения биекции из 1.2.1. Условия *а – в* выполняются согласно способу построения множества F: каждый элемент $x \in X$ имеет единственный прообраз $f(x) = S_x$, а каждый элемент S_x множества F имеет прообраз $x \in X$. Покажем, что этот прообраз – единственный. Предположим противное: существует два различных элемента $a, b \in X$, имеющие одинаковые прообразы $f(a)$ и $f(b)$, т.е. $a \neq b$, но $S_a = f(a) = f(b) = S_b$.

В силу рефлексивности отношения порядка «$\preceq$» имеем:

$a \preceq a \Rightarrow a \in S_a \Rightarrow a \in S_b \Rightarrow a \preceq b.$

Аналогично,

$b \preceq b \Rightarrow b \in S_b \Rightarrow b \in S_a \Rightarrow b \preceq a.$

Так как отношение порядка антисимметрично, получим $a = b$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, различные элементы $S_a, S_b \in F$ имеют различные прообразы: $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$, а отображение $f: X \to F$ является биекцией.

Докажем, что биекция $f: X \to F$ сохраняет порядок, т.е. если $a, b \in X$ и $a \preceq b$, то $f(a) = S_a \subseteq S_b = f(b)$. Согласно определению включения множеств достаточно показать, что $\forall x \in S_a$ выполняется $x \in S_b$.

Возьмем произвольный элемент $x \in S_a$. Тогда $x \preceq a$, но $a \preceq b$, поэтому $x \preceq b$ (в силу транзитивности отношения порядка) и $x \in S_b$. Доказано включение $S_a \subseteq S_b$.

Итак, построенное отображение $f: X \to F \subseteq \mathbf{B}(X)$ является биекцией, сохраняющей отношение порядка. Следовательно, частично упорядоченные множества $(X, \mid)$ и $(F, \subseteq)$ изоморфны. Теорема доказана.

1.2.10 Решение задач 5,6 контрольной работы № 1

Задача 5. На множестве $X = \{1,2,3,4,5\}$ задано бинарное отношение $R \subseteq X \times X : R = \{(x, y) \mid x, y \in X, (x + 2y)\text{ делится на } 3\}$. Представить отношение R различными способами; выяснить, какими свойствами оно обладает; является ли отношение R отношением эквивалентности или отношением порядка.

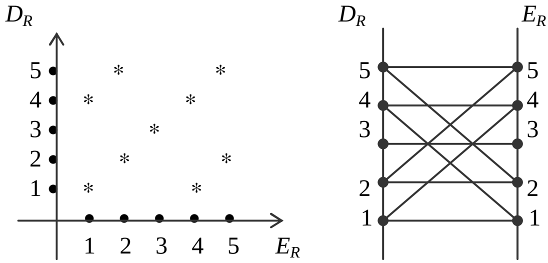
Решение. Отношение R можно задать перечислением всех элементов:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,4),(4,1),(5,2),(2,5)\}.$$

Наглядно представить отношение R можно с помощью графика (рис. 1.11,а), схемы (рис. 1.11,б), графа (рис. 1.12,а), матрицы отношения (рис. 1.12,б).

Выясним, какими свойствами обладает отношение.

Покажем, что отношение рефлексивно. При $x = y$ условие «$x + 2y$ делится на 3» принимает вид $x + 2x = 3x$ – делится на 3 (выполняется при любых значениях $x \in X$).



а) б)

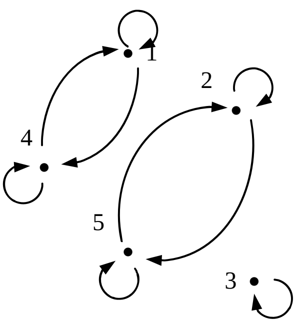
Рис. 1.11 – График (а) и схема (б) отношения R

Проверим, является ли отношение симметричным. Пусть $x + 2y$ делится на 3 (т.е. $(x, y) \in R$). Составим пару (y, x) и для нее проверим характеристическое свойство отношения:

$$y + 2x = y + 2x + (x + 2y) - (x + 2y) = 3y + 3x - (x + 2y) =$$

$$= 3(y + x) - (x + 2y).$$

Очевидно, что $3(y + x)$ делится на 3, а $x + 2y$ делится на 3 по условию, следовательно, $y + 2x$ делится на 3, т.е. $(y, x) \in R$. Отношение симметрично.



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

а) б)

Рис. 1.12 – Граф (а) и матрица (б) отношения R

Проверим, является ли отношение транзитивным. Пусть $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, т.е. $x+2y$ делится на 3 и $y+2z$ делится на 3. Будет ли делиться на 3 выражение $x+2z$, т.е. будет ли $(x,z)\in R$?

Преобразуем $x+2z=$
$$=x+3y+2z-3y=x+2y+y+2z-3y=(x+2y)+(y+2z)-3y$$
делится на 3, т.к. первые два слагаемых делятся на 3 по условию и третье слагаемое $(-3y)$ делится на 3. Значит $(x,z)\in R$, и отношение транзитивно.

Отношение R обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, следовательно, является отношением эквивалентности. На графе отношения R (рис. 1.12, *а*) хорошо видны классы эквивалентности – это подмножества {1,4}, {2,5}, {3} множества X.

Задача 6. Дано множество $X=\{2,3,4,6,12\}$ и отношение $R=\{(x,y)\big|\ x,y\in X, x-\text{делитель } y\}$. Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существуют ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

Решение. Покажем, что отношение R рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Рефлексивность имеет место, так как любое число является своим делителем, т.е. $\forall x\in X\Rightarrow(x,x)\in R$.

Пусть одновременно выполняются условия: $(x,y)\in R$ и $(y,x)\in R$. Тогда $x=y$. Действительно, $(x,y)\in R$ означает, что x – делитель y, т.е. найдется целое число m такое, что $y=m\cdot x$. Одновременно найдется целое число n такое, что $x=n\cdot y$. Отсюда $y=m\cdot n\cdot y$ и $m\cdot n=1$. Последнее равенство выполняется при $m=n=1$ или $m=n=-1$, но все элементы множества X – положительные числа, и второй случай невозможен. Следовательно, $m=n=1$, т.е. $x=y$, и отношение R антисимметрично.

Пусть $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, значит, найдутся $m,k\in\mathbf{Z}$ такие, что $y=m\cdot x$, $z=k\cdot y$. Тогда $z=k\cdot(m\cdot x)=(k\cdot m)\cdot x=n\cdot x$, где $n = m \cdot k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, x является делителем z и $(x, z) \in R$. Отношение R транзитивно.

Отношение R рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е. является отношением порядка. Построим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X, R). На нижнем (первом) уровне диаграммы поместим элементы $x \in X$, не имеющие других делителей, кроме себя ($x = 2$ и $x = 3$). На втором уровне – элементы, не имеющие других делителей, кроме себя и элементов нижнего уровня ($x = 4$ и $x = 6$). Оставшийся элемент $x = 12$ делится на себя, на все элементы второго и первого уровней – помещаем его на третий уровень. Соединяем отрезком элементы соседних уровней, если элемент нижнего уровня является делителем элемента соседнего верхнего уровня. Диаграмма Хассе построена (рис. 1.13). Пара элементов $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда двигаясь по диаграмме только вверх, мы можем пройти от элемента x до элемента y.

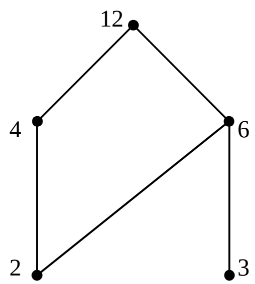


Рис. 1.13 – Диаграмма Хассе

По диаграмме Хассе легко обнаружить несравнимые элементы: 4 и 3; 2 и 3. Наибольшим элементом является $w = 12$ (для всех $x \in X$ выполнено условие «x является делителем 12»). Наименьшего элемента нет, но есть два минимальных: $u_1 = 2$ и $u_2 = 3$.

1.2.11 Контрольные вопросы и упражнения

1. Вставьте пропущенный знак «=» или «≠»:
   {3,5} _____ {5,3}; (3,5) _____ (5,3).
2. Нарисуйте график декартова произведения $X \times Y$, где $X = \{1,5\}$, $Y = \{2,3\}$. Совпадает ли он с графиком $Y \times X$?
3. Дайте определение бинарного отношения на множестве *X*.
4. Обведите кружком номер правильного ответа:
   Областью определения бинарного отношения *R* называется множество
   1) $\{(x, y) |\ x, y \in R\}$;
   2) $\{x |\ x, y \in R\}$;
   3) $\{y |\ x, y \in R\}$.
5. Найдите область определения и область значений отношения *Q* из примера 2 (п.п. 1.2.2).
6. Какими способами можно задать бинарное отношение?
7. Нарисуйте график и схему отношения *P* из примера 2 (см. 1.2.2).
8. Какое отношение является рефлексивным?
9. Какой особенностью обладает матрица рефлексивного отношения? А матрица симметричного отношения?
10. Вставьте пропущенное слово:
    Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, называется отношением ________________ .
11. Запись $[x]$ используется для обозначения
    ________________ .
12. Какое отношение называется отношением порядка?
13. Что такое частично упорядоченное множество?
14. Пусть *R* – отношение делимости. Какой порядок (частичный или линейный) задает это отношение на множестве $X = \{1, 3, 6, 12\}$? А на множестве $Y = \{1, 2, 3, 6,\}$? Построить диаграммы Хассе для (X, R) и (Y, R).
15. Что такое изоморфизм частично упорядоченных множеств? Изоморфны ли (X, R) и (Y, R) ?

1.3 Реляционная алгебра

1.3.1 Применение отношений для обработки данных

Отношение может быть не только бинарным, в общем случае отношением называется подмножество $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, т.е. элементом отношения является упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i, i = 1,2,\ldots,n$. При обработке данных наборы из n элементов называют ***записями***, i-му элементу набора соответствует i-ое поле записи. Записи группируются в файлы, и если файлы содержат совокупность записей, удовлетворяющих некоторым отношениям, мы получаем ***базу данных***. Таким образом, отношение удобно представлять в виде таблицы, каждая строка которой соответствует записи, а каждый столбец – определенному полю записи.

Любая ли таблица может задавать отношение? Очевидными являются следующие ***требования***:

1) порядок столбцов таблицы фиксирован;
2) каждый столбец имеет название;
3) порядок строк таблицы произволен;
4) в таблице нет одинаковых строк.

Число n столбцов таблицы называется ***степенью*** отношения (говорят, что задано n-арное отношение). Число строк в таблице – количество элементов отношения. Математическая модель, описывающая работу с такими таблицами, называется ***реляционной алгеброй***.

1.3.2 Теоретико-множественные операции реляционной алгебры

Так как отношения являются множествами, к ним применимы обычные операции теории множеств: пересечение, объединение, разность. Но в отличие от алгебры множеств в реляционной алгебре эти операции могут быть применены не к любым, а только к ***совместимым*** отношениям. Два отношения будем называть совместимыми, если их степени равны, а соответствующие поля относятся к однотипным множествам. Первое требование означает, что объединение, пересечение и разность определяются только для таблиц с одинаковым количеством столбцов, а второе – в соответствующих столбцах должны располагаться однотипные данные (не выполняется операция пересечения множества фамилий и множества зарплат).

Пересечением двух отношений *R* и *S* называется множество $R \cap S$ всех записей, каждая из которых принадлежит как *R*, так и *S* (рис. 1.14, а, б).

Объединением двух отношений *R* и *S* называется множество $R \cup S$ записей, которые принадлежат хотя бы одному из отношений *R* или *S* (рис.1.14, а, в).

Разностью двух отношений *R* и *S* называется множество $R \setminus S$ всех записей, каждая из которых принадлежит отношению *R*, но не принадлежит отношению *S* (рис.1.14, а, г).

R

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*a*
b	*a*	*c*
b	*c*	*a*

S

B_1	B_2	B_3
a	*b*	*c*
b	*c*	*a*

а)

$R \cap S$

C_1	C_2	C_2
b	*c*	*a*

б)

$R \cup S$

D_1	D_2	D_3
a	*b*	*a*
b	*a*	*c*
b	*c*	*a*
a	*b*	*c*

в)

$R \setminus S$

E_1	E_2	E_3
a	*b*	*a*
b	*a*	*c*

г)

Рис. 1.14 – Операции над совместимыми отношениями
а) данные отношения *R* и *S*;
б) пересечение отношений *R* и *S*;
в) объединение отношений *R* и *S*;
г) разность отношений *R* и *S*

В реляционной алгебре вводится операция расширенного декартова произведения. Пусть $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – элемент *n*-арного отношения *R*, а $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ – элемент *m*-арного отношения *S*. ***Конкатенацией*** записей *r* и *s* назовем запись

$(r,s)=(r_1,r_2,\dots,r_n,s_1,s_2,\dots,s_m)$, полученную приписыванием записи *s* к концу записи *r*.

R

A_1	A_2
a	b
a	c
c	e

S

B_1	B_2	B_3
k	l	m
b	k	c

$R\times S$

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
a	b	k	l	m
a	b	b	k	c
a	c	k	l	m
a	c	b	k	c
c	e	k	l	m
c	e	b	k	c

Рис. 1.15 – Расширенное декартово произведение отношений *R* и *S*

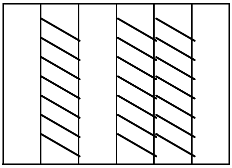
Расширенным декартовым произведением отношений *R* и *S* называется множество $R\times S=\{(r,s)|\ r\in R, s\in S\}$, элементами которого являются все возможные конкатенации записей $r\in R$ и $s\in S$. Отметим, что полученное отношение имеет степень $n+m$ и важен порядок выполнения операции: $R\times S\neq S\times R$.

В качестве упражнения запишите расширенное декартово произведение $S\times R$ для отношений *R* и *S* (рис. 1.15) и сравните с отношением $R\times S$.

1.3.3 Специальные операции реляционной алгебры

При поиске информации в базе данных мы часто выполняем однотипные действия: выбор записей, отвечающих заданному условию; исключение полей, содержащих не интересующие нас в данный момент факты и т.п. Поэтому, кроме теоретико-множественных, в реляционной алгебре применяются и специальные операции. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть задано отношение *R* и список $c=(i_1,i_2,\dots,i_k)$ – упорядоченное подмножество номеров столбцов. ***Проекцией*** отношения *R* на список *c* называется отношение $\pi_c R=\{r[c]|\ r\in R\}$, записи которого содержат только те поля, которые указаны в списке *c*. Таким образом, операция проекции позволяет получить « вертикальное « подмножество отношения *R* (рис. 1.16,а). Операция проекции выполняется в два этапа: 1) выписываем записи отношения *R*, включая только те поля, которые указаны в списке *c*; 2) вычеркиваем в полученной таблице повторяющиеся строки (рис. 1.16, б, в).



а)

R

A_1	A_2	A_3
a	b	c
a	d	c
b	l	k
l	m	d

б)

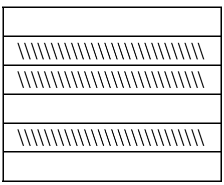
$\pi_{(3,1)}R$

B_1	B_2
c	a
k	b
d	l

в)

Рис. 1.16 – Операции проекции
а) проекция – «вертикальное» подмножество;
б) данное отношение *R*;
в) проекция $\pi_{(3,1)}R$ отношения *R* на список c = (3,1)

Операция селекции (выбора) дает возможность построения «горизонтального» подмножества отношения, т.е. подмножества записей, обладающих заданным свойством. Обозначим *F* – логическое условие, которому должны удовлетворять искомые записи. ***Селекцией*** отношения *R* по условию *F* называется отношение $\sigma_F R$, содержащее те и только те записи отношения *R*, для которых условие *F* истинно (рис. 1.17).



а)

R

A_1	A_2	A_3
a	b	c
a	d	c
b	l	k
l	m	d

б)

$\sigma_{”A1=a”}R$

B_1	B_2	B_3
a	b	c
a	d	c

в)

Рис. 1.17 – Селекция отношения *R* по условию $F=\sigma_{”A1=a”}R$

Соединение отношений по условию F обозначается $R \underset{F}{\triangleright\triangleleft} S$ и представляет собой отношение, записями которого являются конкатенации (r, s), удовлетворяющие условию F. Таким образом, соединение можно выполнить в два этапа: 1) выполнить операцию расширенного декартова произведения $R \times S$; 2) выполнить селекцию полученного отношения по условию F.

$$R \underset{F}{\triangleright\triangleleft} S = \sigma_F (R \times S)$$

На рис. 1.18. приведен пример соединения отношений R и S по условию F – "$A_1 < B_1$", где знак « < » означает лексикографический (алфавитный) порядок.

R

A_1	A_2
a	b
b	c

S

B_1	B_2	B_3
a	b	c
c	a	b
b	c	a

$R \underset{F}{\triangleright\triangleleft} S$

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
a	b	c	a	b
a	b	b	c	a
b	c	c	a	b

Рис. 1.18 – Соединение отношений R и S

1.3.4 Решение задачи 7 контрольной работы № 1

Задача. Отношения R и S заданы в виде таблиц (рис. 1.19,а). Совместимы ли эти отношения? Записать обозначение проекции R на список $c = (3,2)$ и выполнить эту операцию. Записать обозначение соединения отношений R и S по условию F – «$A_2 \geq B_1$» и выполнить эту операцию.

Решение. Степень отношения R равна 3 (три столбца в таблице), степень отношения S равна 2 (два столбца), значит, отношения R и S несовместимы и над ними нельзя выполнять операции пересечения, объединения, разности.

Обозначение операции проекции $\pi_{(3,2)} R$. Чтобы выполнить эту операцию, выписываем третье и второе поле всех записей в новую таблицу (вычеркнули столбец A_1, столбцы A_2 и A_3 поменяли местами); одинаковых строк нет (рис. 1.19,б).

R

A_1	A_2	A_3
a	b	c
k	m	t
b	a	d

S

B_1	B_2
b	k
c	m
d	t

а)

$\pi_C R$

C_1	C_2
c	b
t	m
d	a

б)

$R \underset{F}{\triangleright\triangleleft} S$

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a	b	c	b	k
k	m	t	b	k
k	m	t	c	m
k	m	t	d	l

в)

Рис. 1.19 – Операции над отношениями R и S
а) данные отношения;
б) проекция отношения R на список c =(3,2);
в) соединение отношений R и S по условию F= «$A_2 \geq B_1$»

Обозначение операции соединения –

$$R \underset{A_2 \geq B_1}{\triangleright\triangleleft} S = \sigma_{A_2 \geq B_1}(R \times S).$$

Результат операции $R \times S$ – девять записей (к каждой строке таблицы R приписываем строку таблицы S). Вычеркиваем строки, не удовлетворяющие условию "$A_2 \geq B_1$", т.е. строки, второй элемент которых стоит в алфавите раньше четвертого (рис. 1.19,в).

1.3.5 Контрольные вопросы и упражнения

1. При каких условиях таблица является аналогом n-арного отношения?
2. Что называется степенью такого отношения?
3. Какие отношения в реляционной алгебре называются совместимыми?
4. Составьте конкатенацию записей « пас « и « тор «.
5. Отношение R имеет степень 3, отношение S – 4. Какую степень будет иметь отношение $R \times S$?
6. Операция проекции отношения R на список столбцов обозначается ______________________ .

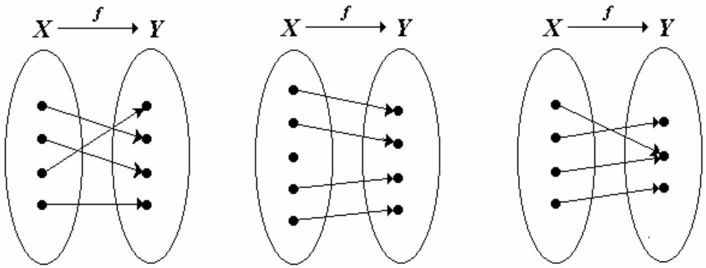
7. Как выполняется операция селекции отношения R по условию F?
8. Какие операции и в каком порядке нужно выполнить:

$$\pi_{(3,2)}(\sigma_{A_1<A_2}(R \cup S))\,?$$

1.4 Конечные и бесконечные множества

1.4.1 Равномощные множества

Напомним, что отображение $f: X \to Y$ является биекцией (см. 1.2.1) тогда и только тогда, когда каждый элемент x множества X имеет единственный образ $y = f(x) \in Y$, а каждый элемент $y \in Y$ имеет единственный прообраз $x \in X$, т.е. $x = f^{-1}(y)$. Так, соответствие между множествами X и Y на рис. 1.20,а является биекцией, а на рис. 1.20, б, в – не является биекцией (объясните почему).



а) б) в)

Рис. 1.20 – Соответствие множеств X и Y
а) биективное;
б) в) не биективное

Определение. Будем говорить, что множества X и Y ***равномощны***, если существует биекция множества X на множество Y.

Пример. Покажем, что множества $X = [0;1]$ и $Y = [1;3]$ равномощны. Действительно, можно установить биекцию $f: X \to Y$, например, по закону $y = 2x + 1$ (рис. 1.19,а). Биекцию между множествами X и Y можно установить и геометрически (рис. 1.19,б). Через левые концы отрезков проведена прямая l , через правые – прямая m. Точка пересечения прямых l и m обозначена M. Из точки M проводим лучи, пересекающие оба отрезка; при этом точке пересечения с лучом на первом отрезке соответствует единственная точка пересечения с лучом на втором отрезке (и наоборот).

1.4.2 Классы равномощных множеств

Введенное в 1.4.1 отношение равномощности является отношением эквивалентности « ≡ ». В самом деле, оно рефлексивно: для каждого множества X справедливо $X \equiv X$ (X равномощно X), так как существует тождественное отображение множества X на множество X. Это отношение симметрично: если существует биекция X на Y , то обратное отображение также является биекцией (если $X \equiv Y$, то $Y \equiv X$). Отношение транзитивно: если существует биекция $f: X \to Y$ и существует биекция $g: Y \to Z$, то соответствие $z = g(f(x))$ отображает X на Z биективно (если $X \equiv Y$ и $Y \equiv X$, то $X \equiv Z$).

По свойству отношения эквивалентности (см. 1.2.5) получаем разбиение всех множеств на непересекающиеся классы равномощных множеств. Каждому классу присвоим название – ***кардинальное число***. Таким образом, кардинальное число – это то общее, что есть у всех равномощных множеств. Обозначим кардинальное число множества $X - card\ X$ или $|X|$. Пустое множество имеет кардинальное число $card\ \varnothing$ =0; для всех конечных множеств кардинальное число совпадает с количеством элементов множества; а для обозначения кардинального числа бесконечных множеств используется буква $\aleph$ (алеф). Понятие кардинального числа (мощности множества) обобщает понятие «количество элементов « на бесконечные множества.

1.4.3 Сравнение множеств по мощности

Расположим классы эквивалентности равномощных множеств в порядке возрастания кардинальных чисел:

$0,1,2,\ldots,n,\ldots,\aleph_0,\aleph_1,\aleph_{2,\ldots}$.

Для конечных множеств это не вызывает затруднений: $|X|<|Y|$ означает для конечных множеств, что количество элементов множества X меньше количества элементов множества Y, и класс $|X|$ расположен левее класса $|Y|$ в последовательности классов равномощных множеств. А что означает неравенство $|X|<|Y|$ для бесконечных множеств? Договоримся о следующих обозначениях:

1) если множества X и Y попадают в один класс эквивалентности, пишем $|X|=|Y|$;

2) если класс эквивалентности множества X находится левее класса эквивалентности Y в ряду кардинальных чисел, используем обозначение $|X|<|Y|$;

3) если класс эквивалентности множества X находится правее класса эквивалентности множества Y, то $|X|>|Y|$;

4) в теории множеств строго доказано, что случай, когда множества X и Y несравнимы по мощности, невозможен – это означает, что классы равномощных множеств можно вытянуть в цепочку без разветвлений по возрастанию мощности.

Следующая теорема, приведенная без доказательства, позволяет устанавливать равномощность бесконечных множеств.

Теорема Кантора–Бернштейна. Пусть X и Y два бесконечных множества. Если во множестве X есть подмножество, равномощное множеству Y, а во множестве Y есть подмножество, равномощное X, то множества X и Y равномощны.

Пример. Пусть $X=[0;1], Y=(0;+\infty)$. Покажем, что $|X|=|Y|$. Непосредственно биекцию X на Y построить трудно, т.к. X – отрезок с включенными концами, а Y – открытый интервал.

Применим теорему Кантора–Бернштейна. Возьмем в качестве подмножества X_1 множества X открытый интервал: $X_1=(0;1)\subseteq[0;1]=X$. Биекция X_1 на Y легко устанавливается: например, по закону $y=\log_{0,5}x$ (рис. 1.22), осуществляется взаимно однозначное отображение интервала $(0;1)$ на интервал $(0;+\infty)$.

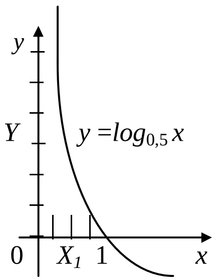


Рис. 1.22 – Биекция множества X_1=(0;1)
на множество Y = (0;+∞)

В качестве подмножества $Y_1 \subseteq Y$ возьмем любой замкнутый интервал из Y, например, $Y_1 = [1;3] \subseteq (0;+\infty) = Y$. В 1.4.1 уже показано, что $\left|[1;3]\right| = \left|[0;1]\right|$ (существует биекция $y = 2x + 1$). Таким образом, условия теоремы Кантора–Бернштейна выполняются, следовательно, множества $X = [0;1]$ и $Y = (0;+\infty)$ равномощны ($\left|X\right| = \left|Y\right|$).

1.4.4 Свойства конечных множеств

Множество X называется ***конечным***, если существует биекция $f : X \to \{1,2,\ldots,n\}$, т.е. множество X можно взаимно однозначно отобразить на отрезок натурального ряда $\{1,2,\ldots,n\}$; при этом $\left|X\right| = n$.

Все множества, для которых такую биекцию установить невозможно, будем называть ***бесконечными.***

Пустое множество принято относить к конечным множествам и обозначать $\left|\varnothing\right|$=0.

Сформулируем свойства конечных множеств в виде теорем (не все теоремы будут строго доказаны).

Теорема (правило суммы). Пусть множество X является объединением r непересекающихся конечных множеств $X_i, i = 1,2,\ldots r$. Тогда

$$\left|X\right| = \sum_{i=1}^{r} \left|X_i\right| .$$

Согласно условию теоремы система множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ является разбиением множества *X*. Доказательство проведем методом математической индукции по числу *r* блоков разбиения.

Шаг 1. Покажем, что теорема справедлива при $r = 2$. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и множества X_1, X_2 конечны, т.е. существует биекция $f_1 : X \to \{1,2,\ldots,n_1\}$ и $f_2 : X \to \{1,2,\ldots,n_2\}$. Установим биекцию $f : X \to \{1,2,\ldots,n_1 + n_2\}$ следующим образом: всем элементам множества X_1 оставим прежние номера, а номера элементов множества X_2 увеличим на число n_1. Полученное отображение

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{если } x \in X_1; \\ n_1 + f_2(x), \text{если } x \in X_2 \end{cases}$$

является биекцией $f : X \to \{1,2,\ldots,n_1 + n_2\}$ в силу биективности f_1 и f_2. Следовательно, $|X| = n_1 + n_2 = |X_1| + |X_2|$. Основание индукции доказано.

Шаг 2 . Индукционный переход заключается в следующем: предположим, что теорема справедлива при числе блоков разбиения $r-1$; докажем, что в этом случае она будет справедлива и при числе блоков *r*.

Предположение: множества $Y_i, i = 1,2,\ldots r-1$, конечны и образуют разбиение множества *Y*. Тогда $|Y| = \sum_{i=1}^{r-1} |Y_i| = \sum_{i=1}^{r-1} n_i$.

Рассмотрим разбиение множества *X* на *r* конечных множеств. Тогда $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i = (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{r-1}) \cup X_r$ по закону ассоциативности объединения. Обозначим $Y = \bigcup_{i=1}^{r-1} X_i$. Опираясь на основание индукции (шаг 1), имеем $|X| = |Y \cup X_r| = |Y| + |X_r|$, а по индукционному предположению

$$\left|X\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{r-1} X_i\right| + \left|X_r\right| = \sum_{i=1}^{r-1}\left|X_i\right| + \left|X_r\right| = \sum_{i=1}^{r}\left|X_i\right|.$$

Индукционный переход доказан.

Заключение. Согласно методу математической индукции, теорема справедлива для любого натурального числа r блоков разбиения.

Теорема (правило произведения). Пусть конечное множество X представлено в виде декартова произведения r конечных множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$. Тогда $\left|X\right| = \left|X_1\right| \cdot \left|X_2\right| \cdot \ldots \cdot \left|X_r\right|$.

Правило произведения доказывается методом математической индукции аналогично правилу суммы.

Теорема (о мощности булеана конечного множества). Пусть множество X конечно и $\left|X\right| = n$. Тогда $\left|\mathrm{B}(X)\right| = 2^n$.

Напомним, что **B**(X) есть булеан множества X, т.е. множество всех подмножеств множества X. При построении булеана в 1.1.8 мы использовали эту теорему без доказательства.

Доказательство. Множество X конечно, значит, существует биекция $f: X \to \{1, 2, ..., n\}$. Зафиксируем порядок элементов множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и рассмотрим множество V всех упорядоченных наборов длины n, состоящих из нулей и единиц:

$$V = \{(v_1, v_2, ..., v_n) \mid v_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Установим взаимно однозначное соответствие (биекцию) $\varphi: V \to \mathrm{B}(X)$ следующим образом: элементу $(v_1, v_2, ..., v_n) \in V$ сопоставляем множество $Y \in \mathrm{B}(X)$, содержащее те и только те элементы $x_i \in X$, для которых $v_i = 1, i = 1, 2, ..., n$. Легко проверить, что данное соответствие является биекцией. Таким образом, множество V и $\mathrm{B}(X)$ равномощны. Но множество V является декартовым произведением n одинаковых сомножителей $E = \{0,1\}$, т.е. $V = E^n$ и по теореме о мощности произведения $\left|V\right| = \left|E^n\right| = \left|E\right|^n = 2^n$, следовательно, и $\left|\mathrm{B}(X)\right| = 2^n$.

Теорема (правило включения – исключения). Пусть X_1 и X_2 конечные множества. Тогда $\left|X_1 \cup X_2\right| = \left|X_1\right| + \left|X_2\right| - \left|X_1 \cap X_2\right|$.

Доказательство теоремы опирается на правило суммы. Представим множество $X_1 \cup X_2$ в виде объединения непересекающихся множеств $X_1 \cup X_2 = A \cup B \cup C$, где $A = X_1 \setminus X_2$, $B = X_1 \cap X_2$, $C = X_2 \setminus X_1$ (рис.1.23). Тогда по правилу суммы $\left|X_1 \cup X_2\right| = |A| + |B| + |C|$, но $X_1 = A \cup B,\ X_2 = B \cup C$, поэтому $\left|X_1\right| = |A| + |B|$, $\left|X_2\right| = |B| + |C|$. Имеем $\left|X_1\right| + \left|X_2\right| = |A| + |B| + |B| + |C|$, отсюда $\left|X_1 \cup X_2\right| = \left|X_1\right| + \left|X_2\right| - |B| = \left|X_1\right| + \left|X_2\right| - \left|X_1 \cap X_2\right|$.

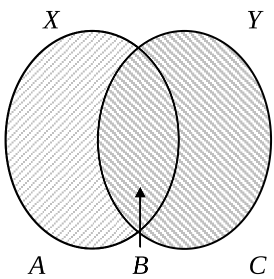


Рис. 1.23 – Правило включения-исключения

Теорема (обобщенное правило включения – исключения). Пусть конечное множество X является объединением r конечных множеств: $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$. Тогда

$$\left|X\right| = \sum_{i=1}^{r} \left|X_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le r} \left|X_i \cap X_j\right| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le r} \left|X_i \cap X_j \cap X_k\right| - \ldots + (-1)^{r+1} \left|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_r\right|.$$

Теорема доказывается методом математической индукции по числу r блоков покрытия множества X.

1.4.5 Определение счетного множества

Будем говорить, что множество X ***счетно***, если оно равномощно множеству натуральных чисел **N**.

Пример 1. Пусть X множество нечетных натуральных чисел. Покажем, что X счетно. Для этого нужно установить биекцию множества X на множество натуральных чисел, т.е. занумеровать элементы множества X так, чтобы каждому элементу X соответствовал ровно один номер, а любому натуральному числу соответствовал ровно один элемент из X. Очевидно, соответствие $f_n = 2n - 1, n \in$ **N**, удовлетворяет этим требованиям:

$$\begin{array}{l} X = \{1, 3, 5, \ 7, \ldots, 2n-1, \ldots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \qquad \updownarrow \\ N = \{1, 2, 3, \ 4, \ldots, \ \ n, \ldots\} \end{array}$$

Таким образом, $|X| = |\mathbf{N}|$ и X счетно.

Пример 2. Пусть X=**N**×**N** – декартово произведение множества N на себя. Покажем, что X счетно. Расположим все элементы X в виде матрицы (рис. 1.24) и занумеруем его элементы « по диагоналям «: номер 1 присвоим элементу (1,1), номер 2 – элементу (2,1), 3 – (1,3) и т.д.

	1	2	3	…
1	$(1,1)_1$	$(1,2)_3$	$(1,3)_6$	…
2	$(2,1)_2$	$(2,2)_5$	$(2,3)_9$	…
3	$(3,1)_4$	$(3,2)_8$	$(3,3)_{13}$	…
…	…	…	…	…

Рис. 1.24 – Множество X = **N**×**N**

Полученное отображение X на **N** также является биекцией (хотя записать формулу в явном виде сложнее, чем в примере 1).

Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$. Когда мы пишем $|X| = \aleph_0$, мы утверждаем, что множество X счетно, т.е. относится к тому же классу эквивалентности, что и множество натуральных чисел. А множество **N** считается эталоном (образцом) счетных множеств.

1.4.6 Свойства счетных множеств

Покажем, что класс счетных множеств расположен в ряду мощностей левее любых других классов бесконечных множеств, а предшествуют ему только классы конечных множеств (рис. 1.25).

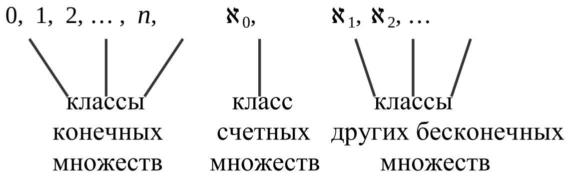


Рис. 1.25 – Ряд мощностей множеств

Основой для такого утверждения служат следующие теоремы о счетных множествах.

Теорема 1. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Пусть X – счетное множество, а $Y \subseteq X$ – произвольное его подмножество. Занумеруем элементы множества $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ и выберем тот элемент, который имеет минимальный номер и принадлежит подмножеству Y, – обозначим его y_1. Затем рассмотрим множество $X \setminus \{y_1\}$ и найдем в нем элемент с минимальным номером, принадлежащий Y, – обозначим y_2, и т.д. Если на n-ом шаге мы не обнаружим в множестве $X \setminus \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ элементов множества Y, то Y конечно и $|Y|=n$. В противном случае (если процесс будет продолжаться бесконечно) множество Y счетное, т.к. указан способ нумерации его элементов.

Теорема 2. Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

Пусть X – бесконечное множество. Выберем произвольный элемент $x_1 \in X$. Так как X бесконечно, то $X \setminus \{x_1\} \neq \varnothing$. Обозначим x_2 произвольный элемент из $X \setminus \{x_1\}$. Далее найдется

$x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, $x_4 \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}, \ldots$. Поскольку X бесконечно, этот процесс не может оборваться из-за «нехватки» элементов, и мы получим счетное подмножество Y множества X: $Y = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq X$.

Теорема 3. Объединение конечного или счетного количества счетных множеств есть множество счетное.

Пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – счетные множества. Будем считать, что они попарно не пересекаются (в противном случае перейдем от множеств X_n к множествам $Y_n = X_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} X_k$, которые попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$). Все элементы множества X запишем в виде бесконечной матрицы:

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots \\ x_{31} & x_{34} & x_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} ,$$

где в первой строке записаны элементы множества X_1, во второй – X_2 и т.д. Занумеруем эти элементы «по диагонали» (как в примере 2 из 1.4.5), при этом устанавливается биекция между множествами X и **N**, т.е. X – счетное множество.

Теорема 4. Пусть X бесконечное множество, а Y – счетное. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.

Теорема утверждает, что добавление счетного множества элементов не увеличивает мощность бесконечного множества.

Доказательство. Рассмотрим множество $Z = X \cup Y$ и представим его в виде объединения непересекающихся множеств $Z = X \cup Y_1$, где $Y_1 = Y \setminus X$. Так как Y счетно, то Y_1 конечно или счетно (по теореме 1). Множество X бесконечно, значит, существует счетное подмножество $X_1 \subseteq X$ (по теореме 2). Тогда $X = X_1 \cup (X \setminus X_1)$, а

$$Z = X \cup Y_1 = X_1 \cup (X \setminus X_1) \cup Y_1 = (X \setminus X_1) \cup (X_1 \cup Y_1).$$

По теореме 3 $X_1 \cup Y_1$ счетно, т.е. $|X_1 \cup Y_1| = |X_1|$. Поэтому $|Z| = |(X \setminus X_1) \cup X_1| = |X|$. Теорема доказана.

В примере 1 из 1.4.5 мы установили, что множество **N** равномощно своему собственному подмножеству. Рассуждения, близкие к доказательству теоремы 4, позволяют утверждать, что таким свойством обладает не только множество **N**, но любые бесконечные множества.

Рассмотренные четыре теоремы показывают, что среди бесконечных множеств счетные множества являются наименьшими по мощности. Существуют ли множества более чем счетные?

1.4.7 Несчетные множества

Рассмотрим множество $X = [0;1] \subset \mathbf{R}$. Сравним его с множеством **N**. Очевидно, что $|\,[0;1]\,| \geq |\,\mathbf{N}\,|$. Действительно, отрезок [0;1] содержит счетное подмножество $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$, значит, является не менее, чем счетным. Покажем, что [0;1] и **N** не являются равномощными множествами, т.е. что $|\,[0;1]\,| \neq \aleph_0$.

Теорема. Множество точек отрезка [0;1] не является счетным.

Проведем доказательство методом «от противного». Предположим, что множество [0;1] счетно, т.е. существует биекция **N** на [0;1], и каждому элементу отрезка можно присвоить номер: $[0;1] = \{a_i \mid a_i \in [0;1], i \in \mathbf{N}\}$. Каждый элемент отрезка [0;1] представляется в виде бесконечной десятичной дроби $a_i = 0,\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}\ldots$, где α_{ij} – j-я десятичная цифра i-го элемента. Запишем все элементы $a_i, i \in \mathbf{N}$, в порядке возрастания номеров. Покажем, что найдется элемент b, принадлежащий отрезку [0;1], но не совпадающий ни с одним из занумерованных элементов $a_i, i \in \mathbf{N}$. Метод построения такого элемента называется диагональной процедурой Кантора и заключается в следующем. Будем строить элемент b в виде бесконечной десятичной дроби $b = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$, где β_i – i-я десятичная цифра. В качестве β_1 возьмем любую цифру, не совпадающую с α_{11}, β_2 – любую цифру, не совпадающую с α_{22}, и т.д., $\beta_n \neq \alpha_{nn}$ при любых $n \in \mathbf{N}$ (рис. 1.26). Построенный таким образом элемент b принадлежит отрезку [0;1], но отличается от каждого из занумерованных элементов α_i хотя бы одной цифрой. Следовательно, предположение о том, что существует биекция $f : \mathbf{N} \to [0;1]$ ошибочно, и множество [0;1] не является счетным.

$$\begin{array}{llll}
a_1 = 0,\boxed{\alpha_{11}}\alpha_{12}\alpha_{13} & \ldots \\
a_2 = 0,\alpha_{21}\boxed{\alpha_{22}}\alpha_{23} & \ldots \\
a_3 = 0,\alpha_{31}\alpha_{32}\boxed{\alpha_{33}} & \ldots \\
\ldots \quad \ldots & \ldots \\
a_n = 0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} & \ldots \\
\ldots \quad \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 1.26 – Диагональная процедура Кантора

Итак, мы показали, что $|[0;1]| > |\mathbf{N}|$, т.е. класс эквивалентности, которому принадлежит отрезок [0;1], расположен правее класса $\aleph_0$ счетных множеств в ряду мощностей (рис. 1.25). Обозначим этот класс $\aleph$ (без индекса). Множества, принадлежащие этому классу, называются ***несчетными*** или множествами мощности ***континуум*** (континуум – непрерывный). Этому классу принадлежат и интервал (0;1), и множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, и множество точек круга на плоскости.

Пример. Множество $\mathbf{R}$ имеет мощность континуума, т.к. равномощно отрезку [0;1]. Действительно, по теореме Кантора-Бернштейна (см. 1.4.3) $|[0;1]| = |(0;1)|$. Биекцию интервала (0;1) на множество $\mathbf{R}$ можно задать с помощью сложной функции $y = f(g(x))$, где $z = g(x)$ имеет вид $z = \pi x - \frac{\pi}{2}$ и отображает интервал (0;1) на интервал $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, а $y = f(z)$ отображает интервал $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ на **R** по закону $y = tg\, z$.

1.4.8 Булеан бесконечного множества. Выводы

Мы показали, что несчетные множества имеют мощность большую, чем счетные. А существуют ли множества наибольшей мощности? На этот вопрос отвечает теорема, на основании которой мы можем утверждать, что не существует множества наибольшей мощности: для каждого множества *X* мы можем построить его булеан, т.е. множество большей мощности. Это означает, что ряд мощностей (рис. 1.25) неограничен.

Теорема. Пусть *X* – бесконечное множество. Мощность булеана множества *X* больше мощности множества *X*.

Доказательство. Очевидно, что мощность булеана **B**(*X*) не меньше мощности множества *X*: булеан имеет подмножество одноэлементных множеств, равномощное множеству *X*. Остается показать, что $|\mathrm{B}(X)| \neq |X|$.

Предположим противное: пусть $|\mathrm{B}(X)| = |X|$. Это означает, что существует биекция $\varphi : X \to \mathrm{B}(X)$, т.е. каждый элемент *x* множества *X* имеет единственный прообраз $\varphi(x) = M_x \in \mathrm{B}(X)$, а каждый элемент булеана имеет единственный прообраз во множестве *X*. Рассмотрим множество $M_0 = \{x |\ x \in X, x \notin \varphi(x)\}$. Покажем, что множество M_0 хотя и принадлежит булеану $\mathrm{B}(X)$, но не имеет прообраза x_0 во множестве *X*.

Действительно, пусть такой элемент x_0 существует, т.е. $x_0 \in X, \varphi(x_0) = M_0$. Тогда возможны два варианта: а) $x_0 \in M_0$, б) $x_0 \notin M_0$.

Случай а) невозможен, т.к. $M_0 = \varphi(x_0)$ и $\forall x \in M_0$ выполняется $x \notin \varphi(x)$, следовательно, $x_0 \notin \varphi(x_0) = M_0$. Аналогично невозможен и случай б): $x_0 \notin M_0$, значит, $x_0 \in \varphi(x_0)$, но $\varphi(x_0) = M_0$. Полученное противоречие показывает, что не существует элемента $x_0 \in X$, являющегося прообразом множества $M_0 \in \mathrm{B}(X)$.

Следовательно, предположение о равномощности множеств X и $\mathrm{B}(X)$ неверно и остается принять $|\mathrm{B}(X)| > |X|$.

Итак, используя понятие «мощность», мы сравниваем между собой не только конечные, но и бесконечные множества. Мощность – это то общее, что есть у всех равномощных множеств, а общим у них является класс эквивалентности. Мы говорим, что множество имеет мощность $\aleph_0$, и это означает, что оно принадлежит тому же классу эквивалентности, что и множество натуральных чисел; мы говорим, что множество имеет мощность континуума, и это означает, что оно принадлежит тому же классу, что и отрезок [0;1] (табл. 1.5). Другие классы бесконечных множеств используются реже, чем счетные и несчетные.

Таблица 1.5 – Мощность множества

Множество	Эталон	Мощность
Конечное	{1, 2, … ,n}	n
Счетное	**N**	$\aleph_0$
Несчетное	[0;1]	$\aleph$

1.4.9 Решение задач 8, 9 контрольной работы 1

Задача 8. Даны множества $A = \{-2, -1, 0\}$ и $B = \{4n-1 | \ n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

Решение. Множество A конечно и задано перечислением своих элементов, множество B задано характеристическим свойством. Запишем несколько первых элементов множества $B = \{3, 7, 11, 15, \ldots\}$. Видим, что $A \cap B = \varnothing$ и $|A \cap B| = 0$, т.е. множество $A \cap B$ конечно.

Покажем, что множество $A \cup B = \{-2, -1, 0, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$ счетно. Занумеруем его элементы:

$$z_n = \begin{cases} -2, & n=1, \\ 0, & n=2, \\ 4n-13, & n \ge 3. \end{cases} \qquad n \in N.$$

Задана биекция множества **N** на множество $A \cup B$, следовательно, $A \cup B$ счетно и $\left|A \cup B\right| = \aleph_0$.

По определению декартова произведения $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. Запишем элементы этого множества в виде матрицы (рис. 1.27) и занумеруем их по столбцам.

$A\downarrow B\rightarrow$	3	7	11	15	…
-2	$(-2,3)_1$	$(-2,7)_4$	$(-2.11)_7$	$(-2,15)_{10}$	…
-1	$(-1,3)_2$	$(-1,7)_5$	$(-1,11)_8$	$(-1,15)_{11}$	…
0	$(0,3)_3$	$(0,7)_6$	$(0,11)_9$	$(0,15)_{12}$	…

Рис. 1.27 – Множество $A \times B$

Замечаем, что если номер n делится на 3 без остатка, то первый элемент пары равен 0; если номер n делится на 3 с остатком 1, то первый элемент пары равен –2; если номер n делится на 3 с остатком 2, то первый элемент пары равен –1. Поэтому способ нумерации может быть задан следующим образом:

$$z_n = \begin{cases} (0, 4k-1), & \text{если } n = 3k, \\ (-2, 4k-1), & \text{если } n = 3k-2, \\ (-1, 4k-1), & \text{если } n = 3k-1. \end{cases} \qquad k \in N,$$

и множество $A \times B$ счетно, т.е. имеет мощность $\aleph_0$.

Задача 9. Равномощны ли множества $X = (0;+\infty)$ и $Y = \{-1\} \cup [0;1]$?

Решение. Покажем, что множества равномощны по теореме Кантора–Бернштейна, т.е. покажем, что найдется $X_1 \subseteq X$ такое, что X_1 равномощно Y, и найдется $Y_1 \subseteq Y$ такое, что Y_1 равномощно X.

Выберем в качестве X_1 множество $\{1\} \cup [3;4]$ и установим биекцию $f : X_1 \to Y$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } x = 1; \\ x - 3, \text{ если } x \in [3,4]. \end{cases}$$

Множества X_1 и Y равномощны.

Пусть $Y_1=(0;1)\subseteq Y$. Установим биекцию $g:Y_1\to X$ по закону $g(x)=\log_{0,5}x$. Множества Y_1 и X равномощны. По теореме Кантора–Бернштейна $|X|=|Y|$.

1.4.10 Контрольные вопросы и упражнения

1. Является ли биекцией отображение $f(x)=x^2$, заданное на отрезке $[-1;1]$? А заданное на $[0;1]$?
2. Являются ли равномощными множества $X=[0;1]$ и $Y=[-2;0]$?
3. Являются ли равномощными множество $X=\{1,2\}$ и множество корней квадратного уравнения $x^2+x+4=0$?
4. Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна.
5. Покажите, пользуясь теоремой Кантора–Бернштейна, что множества $X=[0;1]$ и $Y=[0;3]\cup[4;5]$ равномощны.
6. Даны множества $X=\{2,5,7\}$ и $Y=\{3,6,8\}$. Чему равно $|X\cup Y|$?
7. Впишите ответ:
   Если $X=\{2,5,7\}$, $Y=\{3,5,8\}$, то $|X\cup Y|=$________ .
8. Пусть $X=\{2,4\}$. Тогда $|B(X)|$=______,
   $B(X)$={_______________}.
9. Сколько подмножеств имеет множество $X=\{1,3,5,7\}$?
10. Какое множество называется счетным?
11. Покажите, что множество целых чисел **Z** счетно.
12. Мощность счетного множества обозначается _____ .
13. Сформулируйте свойства счетных множеств.
14. Множество X – все натуральные числа, делящиеся на 3; множество Y – натуральные числа, делящиеся на 4. Какова мощность множества $X\cup Y$?
15. Используя обобщенное правило включения-исключения (см. 1.4.4) решите задачу 1 контрольной работы 1.

2 КОМБИНАТОРИКА. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП

2.1 Комбинаторика

2.1.1 Задачи комбинаторики

Комбинаторика решает для конечных множеств задачи следующего типа:

а) выяснить, сколько существует элементов, обладающих заданным свойством;

б) составить алгоритм, перечисляющий все элементы с заданным свойством;

в) отобрать наилучший по некоторому признаку среди перечисленных элементов.

Мы будем заниматься только задачами первого типа. При этом будет идти речь об отборе r элементов с заданным свойством из конечного множества X, состоящего из n элементов. Результат такого отбора будем называть ***выборкой***. Нас будет интересовать вопрос о количестве выборок заданного типа.

2.1.2. Типы выборок

Выборки делятся на типы по двум признакам: а) важен ли порядок отбора элементов; б) есть ли среди отобранных элементов одинаковые. Будем обозначать n – количество элементов в исходном множестве X, r – количество элементов в выборке.

Упорядоченный набор элементов, среди которых нет повторяющихся, называется ***размещением*** из n элементов по r. Количество размещений обозначается A_n^r (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Типы выборок

	Повторений элементов нет	Повторения элементов есть
Порядок важен	A_n^r размещения	$\overline{A}_n^r$ размещения с повторениями
Порядок не важен	C_n^r сочетания	$\overline{C}_n^r$ сочетания с повторениями

Пример. Определяя трех победителей олимпиады среди 20 участников, мы составляем размещения из 20 элементов по 3, т.к. порядок в этом списке важен (первое, второе, третье место), и ни одна фамилия не может появиться в нем дважды.

Упорядоченный набор элементов, среди которых могут быть одинаковые, называется ***размещением с повторениями***. Количество таких выборок обозначается $\overline{A}_n^r$.

Пример. Составляя всевозможные четырехзначные телефонные номера из десяти цифр, мы получаем размещения с повторениями из 10 по 4, т.к. в телефонном номере могут встретиться одинаковые цифры, порядок записи цифр важен.

Неупорядоченный набор элементов, среди которых нет повторяющихся, называется ***сочетанием*** из n элементов по r. Количество сочетаний обозначается C_n^r.

Пример. Из восьми человек нужно выбрать троих, чтобы вручить им лопаты для уборки снега. Здесь порядок отбора не важен, и одному человеку вручить две лопаты не удастся – имеем сочетание из восьми по три.

Неупорядоченный набор элементов, среди которых могут быть одинаковые, называется ***сочетанием с повторениями***. Количество таких выборок обозначается $\overline{C}_n^r$.

Пример. С трех различных негативов хотим напечатать пять фотографий. Здесь порядок печати не важен, а в полученном наборе обязательно будут одинаковые фотографии – это сочетания с повторениями из трех элементов по пять.

2.1.3 Основные правила комбинаторики

В 1.4.6 мы доказывали теоремы о свойствах конечных множеств. Именно они, лишь в другой формулировке, используются при выводе формул комбинаторики как основные правила.

Правило суммы. Если элемент a может быть выбран m способами, а элемент b ***другими*** k способами, то выбор одного из этих элементов – a или b может быть сделан $m+k$ способами.

Пример. На конюшне четыре лошади и два пони. Сколько возможностей выбрать себе скакуна? Здесь используем правило суммы: выбираем один элемент из двух множеств (лошадь или пони) $4+2=6$ способами.

Правило произведения. Если элемент a может быть выбран m способами, а после этого элемент b выбирается k способами, то выбор пары элементов (a,b) в заданном порядке может быть произведен $m \cdot k$ способами.

Пример. Пару лыж можно выбрать шестью способами, пару ботинок – тремя. Сколькими способами можно выбрать лыжи с ботинками? Здесь выбираем пару элементов (лыжи, ботинки) – всего $6 \cdot 3 = 18$ способов.

Правило включения-исключения. Если свойством S обладает m элементов, а свойством P обладает k элементов, то свойством S или P обладает $m+k-l$ элементов, где l – количество элементов, обладающих одновременно и свойством S, и свойством P.

Пример. На полке стоят банки с компотом из яблок и груш. В десяти банках есть яблоки, в шести – груши, в трех – и яблоки, и груши. Сколько всего банок на полке? Здесь $m=10, k=6, l=3$, т.е. всего на полке $m+k-l=10+6-3=13$ банок.

2.1.4 Размещения с повторениями

Задача. Определить количество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ длины r, которые можно составить из элементов множества X ($|X| = n$), если выбор каждого элемента $x_i, i=1,2,\ldots,r$, производится из всего множества X.

Упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – это элемент декартова произведения $X \times X \times \ldots \times X = X^r$, состоящего из r одинаковых множителей X. По правилу произведения количество элементов множества X^r равно $|X^r| = |X|^r = n^r$. Мы вывели формулу $\overline{A}_n^r = n^r$.

Пример. Сколько четырехзначных телефонных номеров можно составить, если использовать все десять цифр?

Здесь $n = 10, r = 4$, и количество телефонных номеров равно $\overline{A}_{10}^{4} = 10^4 = 10000.$

2.1.5 Размещения без повторений

Задача. Сколько упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ можно составить из n элементов множества X, если все элементы набора различны?

Первый элемент x_1 можно выбрать n способами. Если первый элемент уже выбран, то второй элемент x_2 можно выбрать лишь $n-1$ способами, а если уже выбран $r-1$ элемент $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$, то элемент x_r можно выбрать $n-(r-1) = n-r+1$ способами (повторение уже выбранного элемента не допускается). По правилу произведения получаем

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

Эта формула записывается иначе с использованием обозначения $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Так как

$$A_n^r \cdot (n-r)! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

то

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Пример. Сколько может быть различных списков победителей олимпиады (первое, второе, третье место), если участвовало 20 человек?

Здесь $n = 20, r = 3$, искомым является число

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

2.1.6 Перестановки без повторений

Рассмотрим частный случай размещения без повторений: если $n = r$, то в размещении участвуют все элементы множества X, т.е. выборки имеют одинаковый состав и отличаются друг от друга только порядком элементов. Такие выборки называются ***перестановками***. Количество перестановок из n элементов обозначают P_n:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Пример. Сколькими способами можно выстроить очередь в кассу, если хотят получить зарплату шесть человек?

$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = 720$.

2.1.7 Перестановки с повторениями

Пусть множество X состоит из k различных элементов: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. ***Перестановкой с повторениями*** состава $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ будем называть упорядоченный набор длины $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$, в котором элемент x_i встречается r_i раз $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Количество таких перестановок обозначается $P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

Пример. Из букв $\{a, b, c\}$ запишем перестановку с повторением состава $(2,2,1)$. Ее длина $n = 2 + 2 + 1 = 5$, причем буква a входит 2 раза, b – 2 раза, c – один раз. Такой перестановкой будет, например, (a, b, a, b, c) или (b, c, a, a, b).

Выведем формулу количества перестановок с повторениями. Занумеруем все одинаковые элементы, входящие в перестановку, различными индексами, т.е. вместо перестановки (a, b, a, b, c) получим (a_1, b_1, a_2, b_2, c). Теперь все элементы перестановки различны, а количество таких перестановок равно $n! = (r_1 + r_2 + \ldots + r_k)!$. Первый элемент встречается в выборке r_1 раз. Уберем индексы у первого элемента (в нашем примере получим перестановку (a, b_1, a, b_2, c)), при этом число различных перестановок уменьшится в $r_1!$ раз, т.к. при изменении порядка одинаковых элементов наша выборка не изменится. Уберем индексы у второго элемента – число перестановок уменьшится в $r_2!$ раз. И так далее, до элемента с номером k – число перестановок уменьшится в $r_k!$ раз. Получим формулу

$$P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}.$$

Пример. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы слова «передача»?

В этом слове буквы «е» и «а» встречаются два раза, остальные по одному разу. Речь идет о перестановке с повторением состава $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$ длины $n = 2+2+1+1+1+1 = 8$. Количество таких перестановок равно

$$P_8(2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 7! \cdot 2 = 10080 .$$

2.1.8 Сочетания

Задача. Сколько различных множеств из r элементов можно составить из множества, содержащего n элементов?

Будем составлять вначале упорядоченные наборы по r элементов в каждом. Количество таких наборов (это размещения из n элементов по r) равно $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$. Теперь учитываем, что порядок записи элементов нам безразличен. При этом из $r!$ различных размещений, отличающихся только порядком элементов, получим одно сочетание. Например, два различных размещения (a, b) и (b, a) из двух элементов соответствуют одному сочетанию $\{a, b\}$. Таким образом, число сочетаний C_n^r в $r!$ раз меньше числа размещений A_n^r:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Пример. Количество способов, которыми мы можем выбрать из восьми дворников троих равно

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$$

2.1.9 Сочетания с повторениями

Задача. Найти количество $\overline{C}_n^r$ сочетаний с повторениями из n предметов по r.

Рассмотрим вывод формулы на примере с фотографиями (см. 2.1.2). Имеется n типов предметов ($n = 3$ негатива). Нужно составить набор из r предметов ($r = 5$ фотографий). Наборы различаются своим составом, а не порядком элементов. Например, разными будут наборы состава $(3,1,1)$ и $(1,0,4)$ – один содержит три фотографии с первого негатива и по одной со второго и с третьего, а другой – одну с первого и четыре с третьего. Разложим эти наборы на столе, разделяя фотографии разного типа карандашами. Карандашей нам понадобится $n-1=3-1=2$, а фотографий $r = 5$. Мы будем получать различные сочетания с повторениями, переставляя между собой эти $(n-1)+r$ предметов, т.е. $\overline{C}_n^r = P_{n-1+r}(n-1, r)$ – число сочетаний с повторениями из n предметов по r равно числу перестановок с повторениями длины $n-1+r$ состава $(n-1, r)$. В нашем примере

$$\overline{C}_3^5 = P_{3-1+5}(3-1,5) = P_7(2,5) = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21.$$

Иначе формулу сочетаний с повторениями можно записать

$$\overline{C}_n^r = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\cdot r!} = C_{n-1+r}^r.$$

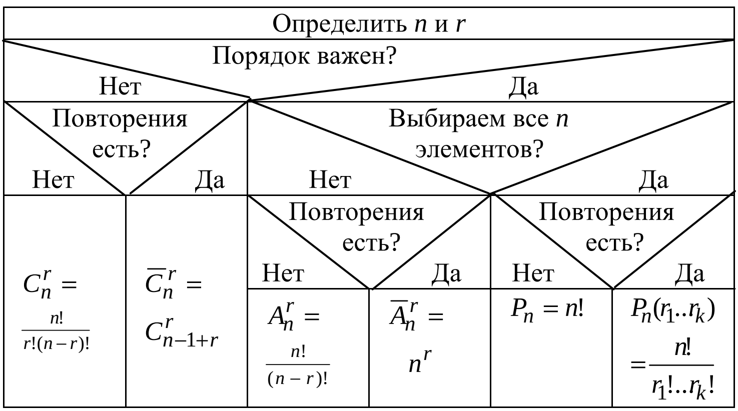


Рис. 2.1 – Выбор формулы

1.2.10 Решение задач 2,3 контрольной работы № 2

При решении задач комбинаторики рекомендуем выбирать нужную формулу, пользуясь блок-диаграммой (рис. 2.1).

Задача 3. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Составим список в порядке: председатель, заместитель, казначей. Выбираем трех из 9 человек, т.е. $n=9, r=3$. Порядок важен? Да, выбираем правую часть блок-диаграммы (рис. 2.1). Следующий вопрос: выбираем все n элементов? Нет. Повторения есть? Нет. Следовательно, наша выборка – размещение без повторений и количество таких выборок

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Задача 2. Сколькими способами 40 человек можно рассадить в три автобуса, если способы различаются только количеством человек в каждом автобусе?

Решение. Выстроим 40 человек в очередь и выдадим каждому билет с номером автобуса. Получим выборку, например, такую: $1,1,2,2,3,1,\ldots,2,1$. В этой выборке 40 элементов ($r=40$), а значений – номеров автобусов – три ($n=3$). Порядок важен? Чтобы ответить на этот вопрос, поменяем местами двух человек в очереди и посмотрим, изменилась ли выборка. Выборка не изменилась, т.к. количество людей в каждом автобусе осталось прежним. Порядок не важен, поэтому выбираем левую часть блок-диаграммы (рис. 2.1). Повторения есть? Да, в нашей выборке номер автобуса может встречаться несколько раз. Следовательно, выборка является сочетанием с повторениями из $n=3$ по $r=40$ элементов:

$$\overline{C}_3^{40} = \frac{(3-1+40)!}{40! \cdot (3-1)!} = \frac{42!}{40! \cdot 2!} = 41 \cdot 21 = 861.$$

2.1.11 Бином Ньютона

В школе изучают формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Бином Ньютона позволяет продолжить этот ряд формул. Раскроем скобки в следующем выражении:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \quad раз}$$

Общий член суммы будет иметь вид $Ca^k b^{n-k}$. Чему равен коэффициент C? Он равен количеству способов, которыми можно получить слагаемое $a^k b^{n-k}$ (т.е. количеству способов, которыми можно выбрать k скобок с множителем a, а из остальных $n-k$ скобок взять множитель b). Например, если $n=5$, $k=2$, то слагаемое a^2b^3 можем получить, выбрав множитель a из первой и пятой скобки. Каков тип выборки? Порядок перечисления не важен (выбираем сначала первую, затем пятую скобки, или, наоборот, сначала пятую, затем первую – безразлично), повторяющихся элементов (одинаковых номеров скобок) в выборке нет. Это сочетание без повторений. Количество таких выборок равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, формула бинома для произвольного натурального n имеет вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n$$

или

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Пример. При $n=4$ получим формулу

$$(a+b)^4 = C_4^0 b^4 + C_4^1 ab^3 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^3 b + C_4^4 a^4 =$$
$$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4,$$

т.к. $C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1;\quad C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4;\quad C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6;\ldots$

Проверьте правильность формулы, перемножив $(a+b)^3$ на $(a+b)$.

Строгое доказательство формулы бинома Ньютона проводится методом математической индукции.

2.1.12 Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальными коэффициентами являются величины

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

которые выражают число сочетаний из n элементов по k. Эти величины обладают следующими свойствами.

Свойство симметрии.

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В формуле бинома это означает, что коэффициенты, стоящие на одинаковых местах от левого и правого концов формулы, равны, например: $C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15.$

Действительно, C_n^k – это количество подмножеств, содержащих k элементов, множества, содержащего n элементов. А C_n^{n-k} – количество дополнительных к ним подмножеств. Сколько подмножеств, столько и дополнений.

Свойство Паскаля.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Число C_n^k – это количество подмножеств из k элементов множества X. Разделим все подмножества на два класса:

1) подмножества, не содержащие элемент x_1, – их будет C_{n-1}^k;

2) подмножества, содержащие элемент x_1, – их будет C_{n-1}^{k-1}.

Т.к. эти классы не пересекаются, то по правилу суммы количество всех k-элементных подмножеств множества X будет равно $C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}$.

На этом свойстве основано построение треугольника Паскаля (рис. 2.2), в n-ой строке которого стоят коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$.

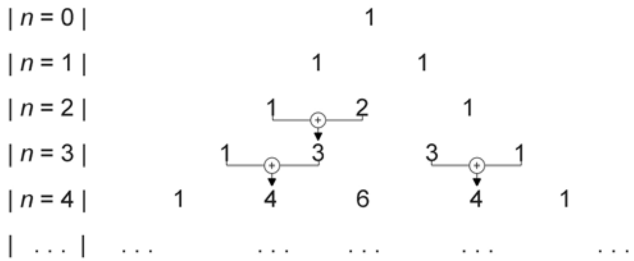


Рис. 2.2 – Треугольник Паскаля

Свойство суммы.

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n.$$

Подставим в формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$$

значения $a=1,\ b=1$. Получим

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 1^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.$$

Заметим, что с точки зрения теории множеств сумма $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$ выражает количество всех подмножеств n-элементного множества. По теореме о мощности булеана (см. 1.4.4) это количество равно 2^n.

Свойство разности.

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3...+(-1)^n C_n^n=0.$$

Положим в формуле бинома Ньютона $a=1, b=-1$. Получим в левой части $(1-1)^n=0$, а в правой – биномиальные коэффициенты с чередующимися знаками, что и доказывает свойство.

Последнее свойство удобнее записать, перенеся все коэффициенты с отрицательными знаками в левую часть формулы:

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=C_n^0+C_n^2+\ldots,$$

тогда свойство легко запоминается в словесной формулировке: « сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна сумме биномиальных коэффициентов с четными номерами».

Задача. Найти член разложения бинома $\left(x+\dfrac{1}{x^4}\right)^n$, не содержащий *x*, если сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна 512.

Решение. По свойству разности сумма биномиальных коэффициентов с четными номерами также равна 512, значит, сумма всех коэффициентов равна 512+512=1024. Но по свойству суммы это число равно $2^n=2^{10}=1024$. Поэтому $n=10$. Запишем общий член разложения бинома и преобразуем его:

$$T_{k+1}=C_n^k a^k b^{n-k}=C_n^k x^k\left(\frac{1}{x^4}\right)^{n-k}=C_n^k x^{k-4n+4k},\quad k=0,1,\ldots,n;$$

при $n=10$ получим:

$$T_{k+1}=C_{10}^k x^{5k-40},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

Член разложения T_{k+1} не содержит *x*, если $5k-40=0$, т.е. $k=8$. Итак, девятый член разложения не содержит *x* и равен $T_9=C_{10}^8=\dfrac{10!}{8!(10-8)!}=45.$

Свойство максимума. Если степень бинома *n* – четное число, то среди биномиальных коэффициентов есть один максимальный при $k=\dfrac{n}{2}$. Если степень бинома нечетное число, то максимальное значение достигается для двух биномиальных коэффициентов при $k_1 = \frac{n-1}{2}$ и $k_2 = \frac{n+1}{2}$.

Так, при $n=4$ максимальным является коэффициент $C_4^2 = 6$, а при $n = 3$ максимальное значение равно $C_3^1 = C_3^2 = 3$ (рис. 2.2).

2.1.13 Приближенные вычисления с помощью бинома Ньютона

Положим в формуле бинома Ньютона $b = 1, a = x$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 + ... + x^n.$$

Эту формулу удобно применять для приближенных вычислений при малых значениях x ($|x| < 1$).

Пример 1. Используя формулу бинома Ньютона, вычислить $(1{,}0018)^5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}0001$.

По приведенной выше формуле имеем:

$$1{,}0018^5 = (1+0{,}0018)^5 = 1 + 5\cdot 0{,}0018 + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0{,}0018^2 + ... + 0{,}0018^5.$$

Оценим третье слагаемое в этой сумме.

$$\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 0{,}0018^2 = 10\cdot 0{,}00000324 < 0{,}00004 < 0{,}0001,$$

остальные слагаемые еще меньше. Поэтому все слагаемые, начиная с третьего, можно отбросить. Тогда

$$1{,}0018^5 \approx 1 + 5\cdot 0{,}0018 = 1{,}009.$$

Пример 2. Вычислить $4{,}98^4$ с точностью до 0,01.

$$4{,}98^4 = (5-0{,}02)^4 = 5^4\cdot\left(1+\frac{(-0{,}02)}{5}\right)^4 = 5^4\cdot(1+(-0{,}004))^4 =$$

$$5^4\cdot(1 - 4\cdot 0{,}004 + \frac{4\cdot 3}{2}\cdot 0{,}004^2 - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3}\cdot 0{,}004^3 + 0{,}004^4).$$

Оценим третье слагаемое:

$$\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 0{,}004^2\cdot 5^4 = 10^{-6}\cdot 6\cdot 2^4\cdot 5^4 = 6\cdot 10^{-2} = 0{,}06\,.$$

Оценим четвертое слагаемое:

$$5^4\cdot 4\cdot 4^3\cdot 10^{-9} = 5^4\cdot 2^4\cdot 4^2\cdot 10^{-9} = 10^4\cdot 16\cdot 10^{-9} = 16\cdot 10^{-5} =$$

$$= 0{,}00016 < 0{,}01.$$

Значит все слагаемые, начиная с четвертого, можно отбросить. Получим

$$4{,}98^4 = 5^4\cdot(1-0{,}016+0{,}000096) = 625\cdot 0{,}984096 = 615{,}06.$$

2.1.14 Контрольные вопросы и упражнения

1. Выборка, среди элементов которой нет одинаковых, а порядок записи элементов важен, является ___________________ .
2. Выборка, среди элементов которой нет одинаковых, а порядок записи элементов безразличен, является _____________ .
3. Количество размещений с повторениями из *n* элементов по *r* элементов определяется по формуле

___________ = ___________________________ .

4. Количество сочетаний из *n* элементов по *r* элементов определяется по формуле

_____________ = ___________________________ .

5. Сформулируйте основные правила комбинаторики.
6. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для письма, если имеется 5 конвертов и 4 марки?
7. Сколько пятизначных номеров можно составить из девяти цифр {1,2,3,4,5,6,7,8,9}?
8. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (все полосы горизонтальные), если имеются ткани пяти различных цветов?
9. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 7 футбольных команд, если известно, что все команды набрали различное количество очков?

10. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек, если имеется 7 бегунов?

11. Сколькими способами можно разложить 12 различных предметов по четырем различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по три предмета?

12. Сколькими способами можно разложить 6 одинаковых шаров по четырем различным ящикам?

13. Запишите разложение бинома $(a-b)^5$.

14. Докажите свойство симметрии биномиальных коэффициентов, сравнив формулы для C_n^k и C_n^{n-k}.

15. Найдите максимальный числовой коэффициент в разложении бинома $(1+x)^8$.

16. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислите $0{,}082^5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}0001$.

2.2 Группы подстановок

2.2.1 Понятие группы

Теория групп начала оформляться в качестве самостоятельного раздела математики в конце XVIII века. Она дала мощные средства для исследования алгебраических уравнений, геометрических преобразований, а также для решения ряда задач топологии и теории чисел. Специалисты, занимающиеся обработкой информации, используют методы теории групп при кодировании и декодировании информации.

Мы рассмотрим лишь небольшую часть теории групп и некоторые ее приложения. Наша первая задача – выяснить, что же такое группа.

Для этого сначала определим понятие ***бинарной алгебраической операции*.**

Бинарная операция на множестве – это соответствие, при котором каждой упорядоченной паре элементов данного множества отвечает однозначно определенный элемент того же множества. Так, действие сложения есть бинарная операция на множестве целых чисел; в самом деле, если r и s – любые два целых числа, то $r+s$ тоже является целым числом.

Определение 1. Непустое множество G с заданной на нем бинарной алгебраической операцией $\otimes$ называется ***группой***, если:

1) операция $\otimes$ ассоциативна;

2) существует единичный элемент $e \in G$ такой, что для каждого $x \in G$ выполняется условие: $x \otimes e = e \otimes x = x$;

3) для каждого $x \in G$ существует обратный элемент $x^{-1} \in G$ такой, что $x^{-1} \otimes x = x \otimes x^{-1} = e$.

Пример 1. Пусть на множестве G = **Z** задана операция сложения целых чисел. Проверить, является ли группой пара (**Z**, +).

Первое требование определения выполняется, так как сложение целых чисел ассоциативно: для любых $a, b, c \in \mathbf{Z}$ справедливо $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Единичным элементом относительно сложения целых чисел является число нуль. Действительно, для любого $x \in \mathbf{Z}$ выполняется условие: $0 + x = x + 0 = x$.

Обратным элементом для произвольного целого числа x является противоположное ему число ($-x$). В самом деле, для каждого $x \in \mathbf{Z}$ найдется элемент $-x \in \mathbf{Z}$, такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Итак, множество целых чисел с заданной на нем операцией сложения (**Z**, +) является группой.

Пример 2. Рассмотрим теперь множество целых чисел с заданной на нем операцией умножения. Покажем, что пара (**Z**, ·) не является группой.

Умножение целых чисел ассоциативно, а единичным элементом является число 1: для каждого $x \in \mathbf{Z}$ выполняется условие $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. Но обратный элемент существует не для каждого целого числа. Например, для целого числа $x = 2 \in \mathbf{Z}$ невозможно найти целое число y такое, чтобы $2 \cdot y = 1$.

Следовательно, множество целых чисел с заданной на нем операцией умножения не является группой.

Определение 2. Множество $H \subseteq G$ называется *подгруппой* группы $(G,\otimes)$, если оно замкнуто относительно операции $\otimes$, содержит единичный элемент группы G ($e \in H$) и для каждого $x \in H$ обратный элемент $x^{-1} \in H$.

2.2.2 Группа подстановок

Пусть множество X состоит из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расположенных в произвольном, но фиксированном порядке.

Биекция $\varphi : X \to X$ называется *подстановкой*.

В случаях, когда природа элементов не имеет значения, удобно обращать внимание только на индексы и считать, что мы имеем дело с множеством $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, равномощным X. Следовательно,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим S_n – множество всех подстановок на A. Очевидно, что $|S_n| = P_n = n!$.

На множестве S_n будем рассматривать операцию перемножения (композиции) подстановок φ_1 и φ_2:

$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$ для любого $x \in A$.

Эта операция обладает свойствами:

1) $(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 = \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3)$ – выполняется свойство ассоциативности;

2) существует подстановка $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$, для которой $e \circ \varphi = \varphi \circ e = \varphi$ для каждого $\varphi \in S_n$, т.е. существует единичный элемент;

3) для любого $\varphi \in S_n$ существует $\varphi^{-1} \in S_n$ такое, что $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = e$ – существует обратный элемент.

Следовательно, множество S_n образует группу относительно операции перемножения перестановок. Отметим, что эта операция не является коммутативной, то есть $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$, например,

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\psi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольную подстановку $\pi \in S_n$. Элемент $x \in A$ такой, что $\pi(x) = x$ будем называть ***стационарным*** относительно подстановки π.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_k$ – все нестационарные элементы подстановки π, причем,

$$\pi(x_1) = x_2, \pi(x_2) = x_3, ..., \pi(x_{k-1}) = x_k, \pi(x_k) = x_1,$$

где k – наименьшее из всех возможных. Такая подстановка называется ***циклом*** длины k и записывается в виде $\pi = (x_1, x_2, ..., x_k)$.

Пример 1. Пусть $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Стационарный элемент $x = 2$. Подстановка π является циклом длины $k = 3$ и может быть записана в виде $\pi = (1, 3, 4)$.

Пример 2. Пусть $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Подстановка p не является циклом, но может быть представлена в виде композиции двух циклов:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1,5,3) \circ (2,4),$$

причем эти циклы являются непересекающимися, т.е. не имеют общих нестационарных элементов.

Теорема 1. Любая подстановка $\pi \in S_n$ может быть представлена в виде композиции непересекающихся циклов длины ≥ 2:

$$\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r .$$

Доказательство теоремы дает процедуру построения циклов.

Найдем в A наименьший нестационарный относительно π элемент x_1, т.е. $\pi(x_1) \neq x_1$ и для каждого $x \in A$ выполняется условие: если $x < x_1$, то $\pi(x) = x$. (Если такого элемента не существует, то π является тождественной подстановкой ($\pi = e$) и ее можно рассматривать как пустое произведение циклов).

Будем строить образы элемента $x_1, \pi(x_1), \pi^2(x_1), \ldots$ до тех пор, пока не получим $\pi^k(x_1) = x_1$ при наименьшем из возможных k ($1 < k \leq n$). Тогда подстановка

$$\sigma_1 = \left(x_1, \pi(x_1), \pi^2(x_1), \ldots, \pi^{k-1}(x_1)\right)$$

определяет цикл длины k внутри подстановки π. Если все нестационарные элементы подстановки π содержатся в σ_1, то $\pi = \sigma_1$. В противном случае найдем x_2 – наименьший из нестационарных элементов подстановки π, не входящий в цикл σ_1. Строим цикл

$$\sigma_2 = \left(x_2, \pi(x_2), \pi^2(x_2), \ldots, \pi^{m-1}(x_2)\right).$$

Очевидно, что σ_1 и σ_2 – непересекающиеся. Если все нестационарные элементы исчерпаны, то $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2$, в противном случае повторяем процесс, пока каждый нестационарный элемент не войдет в какой-либо цикл. В конечном итоге получим $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r$.

Пример. Представить в виде композиции циклов подстановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 1; \pi(x_1) = 3; \pi^2(x_1) = \pi(3) = 1$, значит $\sigma_1 = (1,3)$;
$x_2 = 2; \pi(x_2) = 4; \pi^2(x_2) = \pi(4) = 6; \pi^3(x_2) = 2$,значит $\sigma_2 = (2,4,6)$;
$x_5 = 5$ – стационарный элемент.

Следовательно, $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 = (1,3) \circ (2,4,6)$.

Определение. Порядком подстановки π называется наименьшее натуральное число p такое, что $\pi^p = e$.

Теорема 2. Порядок подстановки равен наименьшему общему кратному порядков циклов в ее разложении на непересекающиеся циклы.

В качестве упражнения предлагается провести доказательство теоремы самостоятельно.

2.2.3 Изоморфизм групп

Определение. Группы G_1 и G_2 называются ***изоморфными***, если существует биекция $f : G_1 \to G_2$, сохраняющая групповую операцию, т.е. $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ для всех $x, y \in G_1$.

Пример. Пусть G_1 – группа преобразований правильного треугольника в себя $G_1 = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$, где $\varphi_0 = e$ – тождественное преобразование, φ_1 – поворот вокруг точки O на 120°, φ_2 – поворот вокруг точки O на 240°, $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ – отражение относительно осей симметрии I, II, III соответственно (рис. 2.3).

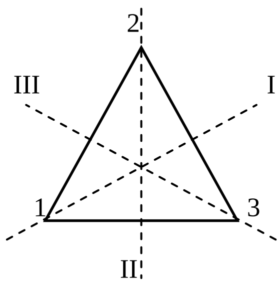


Рис. 2.3 – Преобразование правильного треугольника

В качестве группы G_2 рассмотрим группу подстановок на множестве $X=\{1,2,3\}$ вершин треугольника $G_2=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5\}$, где

$$\pi_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \pi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что биекция $f(\varphi_i)=\pi_i,\, i=\overline{1{,}5}$ группы G_1 на группу G_2 является ***изоморфизмом***.

Будем называть порядком конечной группы G количество ее элементов $n=|G|$.

Теорема (Кэли). Всякая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы подстановок S_n.

Доказательство. Пусть G произвольная подгруппа порядка n. Обозначим S_n группу подстановок на множестве G. Зафиксируем произвольный элемент $a\in G$ и рассмотрим отображение $\varphi_a: G\to G$ такое, что $\varphi_a(x)=x\circ a$ для любого $x\in G$. Очевидно, образы различных элементов x и y, принадлежащих G, различны и, следовательно, множество значений $E(\varphi_a)=G$. Действительно, предположим, что $\varphi_a(x)=\varphi_a(y)$ при $x\neq y$. Тогда

$$x\circ a=a\circ x\Rightarrow x\circ a=y\circ a$$

$$\Rightarrow (x\circ a)\circ a^{-1}=(y\circ a)\circ a^{-1}\Rightarrow x\circ(a\circ a^{-1})==y\circ(a\circ a^{-1})\Rightarrow x=y.$$

Значит, отображение φ_a является подстановкой на множестве G, причем $\varphi_a\in S_n$, $\varphi_a^{-1}=\varphi_{a^{-1}}\in S_n$, $e=\varphi_{a^{-1}}\circ\varphi_a$, т.е. множество $F=\{\varphi_a \mid a\in G\}\subseteq S_n$ образует подгруппу группы S_n. При этом

$$\varphi_{a\circ b}(x)=x\circ(a\circ b)=(x\circ a)\circ b=\varphi_a(x)\circ b=\varphi_b(\varphi_a(x)).$$

Следовательно, отображение $f: G \to F \subseteq S_n$ такое, что $f(x) = \varphi_x \; \forall x \in G$ является изоморфизмом, т.к. $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$.

2.2.4 Самосовмещения фигур

Обширный и очень важный класс разнообразных групп как конечных, так и бесконечных составляют группы «самосовмещений» геометрических фигур. Под *самосовмещением* данной геометрической фигуры *F* понимают такое перемещение фигуры *F* (в пространстве или на плоскости), которое переводит *F* в самое себя, т.е. совмещает фигуру *F* с самой собой.

Мы уже познакомились с одной из простейших групп самосовмещений, а именно с группой поворотов правильного треугольника на плоскости и показали, что она изоморфна некоторой подгруппе группы подстановок S_n. Аналогичным образом можно построить группы самосовмещений других геометрических фигур и показать их изоморфизм с подгруппой группы S_n.

Задача. Построить группу симметрий квадрата.

Решение. Занумеруем вершины квадрата и оси симметрий (рис. 2.4). Обозначим *O* – центр симметрии квадрата.

В группу самосовмещений войдет тождественное перемещение – поворот вокруг точки *O* на 0°; повороты вокруг этой точки на 90°, на 180° и на 270°; отражения относительно четырех осей симметрии. Итого, получаем восемь элементов группы симметрий.

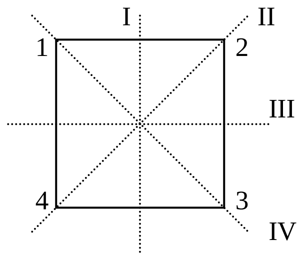


Рис. 2.4

Тождественное перемещение описывает тождественная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вращения на $90°$, на $180°$ и на $270°$ – подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ соответственно.

Поворот относительно оси I описывает подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; относительно оси II – подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; оси III – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; оси IV – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, мы получили группу подстановок, изоморфную группе самосовмещений квадрата:

$$S_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2.2.5 Контрольные вопросы и упражнения

1. Что такое группа?

2. Дано множество $X = \{-1,1\}$. Проверить, является ли данное множество группой относительно операции умножения.

3. Что такое подгруппа?

4. Привести пример подстановки, которая является полным циклом.

5. Объяснить процедуру разложения подстановки в произведение независимых циклов.

6. Чему равен порядок подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$?

7. Какие группы называются изоморфными?

8. Приведите примеры самосовмещений геометрических фигур.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

Четырнадцать спортсменов участвовали в кроссе, 16 – в соревнованиях по плаванию, 10 – в велосипедных гонках. Восемь участников участвовали в кроссе и заплыве, 4 – в кроссе и велосипедных гонках, 9 – в плавании и велосипедных гонках. Во всех трех соревнованиях участвовали три человека. Сколько всего было спортсменов?

2. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{1,3,6,7\}, Y=\{3,4,7,8\}, Z=\{3,4,7,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(X \setminus Y)\cap \overline{Z}$.

3. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(A\cap B)\cup(B\cap C)=\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})}\cap B.$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

5. Пусть $X=\{1,2,3,4\}$. Бинарное отношение $R\subseteq X\times X$ задано характеристическим свойством:

$R=\{(a,b)|\ a+b-\text{четное},\quad a,b\in X\}$.

Представить отношение различными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

6. Дано множество $X=\{1,2,3,6\}$ и отношение $R=\{(x,y)|\ x,y\in X,\ x-\text{делитель } y\}$. Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	b	C
a	c	d
b	d	a
d	a	b

S:

B_1	B_2	B_3
a	d	b
a	c	d
b	d	a

Записать обозначения операций и выполнить их:

а) селекция отношения *R* по условию « $A_2 > b$ »;

б) проекция на список (3,1) объединения отношений *R* и *S*.

8. Даны множества $A = \{-1, 0, 1\}$ и $B = \{3n - 2 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

9. Равномощны ли множества $X = [-2;0]$ и $Y = (1;5)$?

Вариант 2

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

В туристском клубе несколько раз за лето организуются походы, причем все члены клуба хотя бы раз в них участвуют. Сорок человек побывали в пеших походах, 28 – в конных, 25 – в лодочных. И в пеших, и в конных походах побывало 20 человек, в пеших и лодочных – 15, в конных и лодочных – 8, во всех видах походов побывало 6 человек. Сколько туристов в клубе?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{3, 5, 6, 7, 8\}, Y = \{1, 2, 4, 6\}, Z = \{1, 2, 7, 8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(Z \cap Y) \cup \overline{X}$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$A \cup (A \cap B) = A .$$

5. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid a + b < 5, a,b \in X\}.$$

Задать отношение другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

6. Дано множество $X = \{1,2,3,4,6\}$ и отношение $R = \{(x,y) \mid x,y \in X, x -$ делитель $y\}$. Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*c*
a	*c*	*d*
b	*d*	*a*
d	*a*	*b*

S:

B_1	B_2
a	*d*
a	*c*
c	*d*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция отношения R на список (1,3);

б) соединение отношений R и S по условию «$A_2 = B_1$».

8. Даны множества $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{3n-1 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

9. Равномощны ли множества $X = [-3;1]$ и $Y = (0;+\infty)$.

Вариант 3

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

В отделе НИИ работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Английский язык знают шесть человек, немецкий – шесть человек, французский – семь. Четыре человека знают английский и немецкий языки, три человека – немецкий и французский, два – французский и английский, один знает все три языка. Сколько человек работает в отделе?

2. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{5,6,7,8\}, Y=\{1,3,5,6,8\}, Z=\{1,2,5,7\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{X}\cap(Y\setminus Z)$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cup B).$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$A\cup(B\cap\overline{A})=A\cup B.$$

5. Пусть $X=\{-2,-1,0,1,2,3\}$. Бинарное отношение $R\subseteq X\times X$ задано характеристическим свойством:

$$R=\{(a,b)|\ a+b=3, a,b\in X\}.$$

Представить отношение *R* другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

6. Дано множество $X=\{2,3,6,18\}$ и отношение $R=\{(x,y)|\ x,y\in X, x-\text{делитель } y\}$. Показать, что отношение *R* является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве *X* наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*D*
b	*c*	*D*
b	*a*	*D*
a	*b*	*C*

S:

B_1	B_2
b	*c*
a	*c*
a	*d*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция отношения *R* на список (1,3);

б) соединение отношений *R* и *S* по условию «$A_1>B_1$».

8. Даны множества $A=\{0,1,2,3\}$ и $B=\{4n-2 \mid n\in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A\cap B, A\cup B, A\times B$?

9. Равномощны ли множества $X=(1;3)$ и $Y=[-1;2]$?

Вариант 4

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

Из 80 студентов занимаются баскетболом 30 человек, легкой атлетикой 25 человек, шахматами – 40 человек. Баскетболом и легкой атлетикой занимается 8 человек, шахматами и легкой атлетикой – 10 человек, шахматами и баскетболом – 5 человек. Тремя видами спорта занимаются три человека. Сколько человек занимаются спортом?

2. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{1,5,6,7,8\}, Y=\{2,3,6,7,8\}, Z=\{1,3,5,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{Y}\cap(X\setminus Z)$.

3. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$A\cap(A\cap B)\cup\overline{B}=A\cup\overline{B}.$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$(A\cup B)\cap(A\cap B)=A\cap B.$$

5. Отношение *R* на множестве *X* задано перечислением своих элементов: $R=\{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1),(3,1),(3,3)\}$. Нарисуйте график, схему и граф отношения. Запишите его матрицу. Какими свойствами обладает отношение? Является ли оно отношением эквивалентности? Объясните ответ.

6. Дано множество $X=\{1,2,4,8\}$ и отношение $R=\{(x,y)\mid x,y\in X, x-\text{делитель } y\}$. Показать, что отношение *R* является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве *X* наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
c	*e*	*f*
a	*b*	*d*
d	*e*	*f*
c	*d*	*c*

S:

B_1	B_2
f	*d*
e	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция отношения *R* на список (2,3);

б) соединение отношений *R* и *S* по условию «$A_3 = B_1$».

8. Даны множества $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{4n-3 \mid n\in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A\cap B, A\cup B, A\times B$?

9. Равномощны ли множества $X=(-\infty;-1)$ и $Y=[2;3]$?

Вариант 5

1. Решить задачу, пользуясь диаграммой Эйлера–Венна.

Десять читателей взяли в библиотеке фантастику, 11 – детективы, 8 – приключения. Фантастику и приключения взяли 4 человека, фантастику и детективы – 6, приключения и детективы – 3, двое взяли три вида книг. Сколько читателей побывало в библиотеке?

2. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{2,4,5,7,8\}, Y=\{1,2,3,4,6\}, Z=\{1,5,6,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{X}\setminus(Z\cap Y)$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$A\cap(\overline{A}\cup B)\cup B\cap(B\cup C)\cup B.$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$A\cup(A\cap B\cap C)=A.$$

5. Пусть $X=\{0,1,2,3,4\}$. Бинарное отношение $R\subseteq X\times X$ задано характеристическим свойством:

$$R=\{(a,b)\mid\, a+b \quad \text{делится на } 3, a,b\in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Какими свойствами оно обладает?

6. Дано множество $X=\{3,6,9,18\}$ и отношение $R=\{(x,y)\mid\, x,y\in X,\, x - \text{делитель } y\}$. Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*c*
b	*a*	*c*
a	*c*	*b*
a	*d*	*b*

S:

B_1	B_2	B_3
a	*c*	*b*
a	*d*	*e*
a	*d*	*b*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения R по условию «$A_2 > A_3$»;

б) проекция на список (3,1) объединения отношений R и S.

8. Даны множества $A=\{0,1,2\}$ и $B=\{5n-4\mid\, n\in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A\cap B, A\cup B, A\times B$?

9. Равномощны ли множества $X=(0;7)$ и $Y=[5;10]$?

Вариант 6

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

Из 10 участников ансамбля шестеро умеют играть на гитаре, пятеро на ударных инструментах, пятеро на духовых. Двумя инструментами владеют: гитарой и ударными – трое, ударными и духовыми – двое, гитарой и духовыми – четверо. Остальные участники ансамбля только поют. Сколько певцов в ансамбле?

2. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{2,5,6,7,8\}, Y = \{2,4,6,8\}, Z = \{1,2,3,4\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $X \setminus (Y \cap \overline{Z})$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap C} \cap \overline{\overline{A} \cap B} \cap \overline{A} \cap C.$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

5. Пусть $X = \{1,2,3,4,5\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid a+b \ \text{ делится на } 2, a,b \in X\}.$$

Представить отношение *R* другими возможными способами. Какими свойствами обладает это отношение? Является ли оно отношением эквивалентности?

6. Дано множество $X = \{1,3,5,15\}$ и отношение $R = \{(x,y) \mid x,y \in X, x - \text{делитель } y\}$. Показать, что отношение *R* является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X, R). Существует ли в множестве *X* наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2
s	*t*
u	*v*
x	*z*

S:

B_1	B_2	B_3
s	*u*	*t*
u	*v*	*t*
z	*s*	*x*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения S по условию «$B_1 > B_3$»;

б) соединение отношений R и S по условию «$A_1 = B_2$».

8. Даны множества $A = \{-1, 0, 2\}$ и $B = \{3n-1 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

9. Равномощны ли множества $X = [-2; 2]$ и $Y = [1; +\infty)$?

Вариант 7

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

Каждый из студентов группы занимается хотя бы одним видом спорта. Пятеро занимаются альпинизмом, шестеро – волейболом, 10 человек – борьбой. Известно, что двое занимаются и альпинизмом, и волейболом; трое – волейболом и борьбой; четверо – альпинизмом и борьбой; а один занимается всеми тремя видами спорта. Сколько студентов занимается только борьбой?

2. Задано универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и множества $X = \{2, 4, 5, 7, 8\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 6\}, Z = \{4, 5, 6, 8\}$. Записать булеан множества X, любое разбиение множества Y, покрытие множества Z. Выполнить действия $\overline{X} \setminus (Z \cap Y)$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$A \cap (\overline{A} \cup B) \cup B \cap (B \cup C) \cup B.$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B.$$

5. Пусть $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid a + b \quad \text{делится на } 3, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Какими свойствами обладает это отношение? Является ли оно отношением эквивалентности?

6. Дано множество $X=\{1,3,6,9\}$ и отношение $R=\{(x,y)|\ x,y\in X,\ x-\text{делитель } y\}$. Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*e*	*d*
a	*b*	*c*
d	*a*	*b*

S:

B_1	B_2	B_3
a	*b*	*c*
b	*e*	*d*
d	*e*	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) селекция отношения *R* по условию « $A_1 > A_2$ »;

б) проекция на список (2,3) объединения отношений *R* и *S*.

8. Даны множества $A=\{0,2,4\}$ и $B=\{4n|\ n\in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A\cap B, A\cup B, A\times B$?

9. Равномощны ли множества $X=(-\infty;+1)$ и $Y=[2;5)$?

Вариант 8

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

В одной из студенческих групп все студенты умеют программировать. Десять человек умеют работать на Бейсике, 10 – на Паскале, 6 – на Си. Два языка знают: 6 человек Бейсик и Паскаль, 4 – Паскаль и Си, 3 – Бейсик и Си. Один человек знает все три языка. Сколько студентов в группе?

2. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{1,2,4,6,7\}, Y=\{2,3,5,7,8\}, Z=\{1,4,7,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(X\cup\overline{Y})\cap Z$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(((A \cap B) \cup B) \cap \overline{A}) \cup B.$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

5. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R = \{(a,b) \mid a + b < 4, a, b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

6. Дано множество $X = \{3, 5, 15, 30\}$ и отношение $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, x - \text{делитель } y\}$. Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X, R). Существует ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2
x	*y*
y	*z*
x	*t*

S:

B_1	B_2	B_3
u	*t*	*v*
x	*z*	*y*
y	*z*	*v*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (2,1) отношения S;

б) соединение отношений R и S по условию «$A_1 < B_2$».

8. Даны множества $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{5n - 3 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

9. Равномощны ли множества $X = [3; 7]$ и $Y = (-1; 23)$?

Вариант 9

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

При изучении читательского спроса оказалось, что 60% опрошенных читает журнал «Огонек», 50% – журнал «Юность», 50% – журнал «Аврора». Журналы «Огонек» и «Юность» читают 30% опрошенных, «Юность» и «Аврора» – 20%, «Огонек» и «Аврора» – 40%, все три журнала – 10%. Сколько процентов опрошенных не читают ни один журнал?

2. Задано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X = \{2,3,4,5,7\}, Y = \{1,2,4,8\}, Z = \{2,5,7,8\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $\overline{Z} \setminus (X \cap Y)$.

3. Доказать, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) = U.$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A}).$$

5. Пусть $X = \{1,2,3,4,5\}$. Отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством: $R = \{(a,b) \mid |a-b| = 2, a,b \in X\}$. Представить отношение *R* другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает. Является ли *R* отношением эквивалентности?

6. Дано множество $X = \{1,5,7,10,14\}$ и отношение $R = \{(x,y) \mid x,y \in X, x - \text{делитель } y\}$. Показать, что отношение *R* является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве *X* наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*d*	*e*
d	*c*	*b*
b	*d*	*a*

S:

B_1	B_2
d	*e*
d	*c*
a	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (2,1) отношения *R*;

б) соединение отношений *R* и *S* по условию « $A_1 \ge B_1$ ».

8. Даны множества $A=\{1,2,4,6\}$ и $B=\{n^2 \mid n\in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A\cap B, A\cup B, A\times B$?

9. Равномощны ли множества $X=[2;9]$ и $Y=(0;+\infty)$?

Вариант 10

1. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера–Венна.

В день авиации всех желающих катали на самолете, планере, дельтаплане. На самолете прокатилось 30 человек, на планере – 20, на дельтаплане – 15. И на самолете, и на планере каталось 10 человек, на самолете и дельтаплане – 12, на планере и дельтаплане – 5, два человека прокатились и на самолете, и на планере, и на дельтаплане. Сколько было желающих прокатиться?

2. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множества $X=\{1,3,5,7,8\}, Y=\{2,5,6,8\}, Z=\{1,3,5,6\}$. Записать булеан множества *X*, любое разбиение множества *Y*, покрытие множества *Z*. Выполнить действия $(X\cap\overline{Y})\cup Z$.

3. Упростить, используя законы и тождества алгебры множеств (перечислить используемые законы):

$$A\cup\overline{A\cup\overline{\overline{B}}}\cap U.$$

4. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A.$$

5. Пусть $X=\{1,2,3,4,5\}$. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$R=\{(a,b) \mid a-b>1, a,b \in X\}.$$

Представить отношение R другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

6. Дано множество $X=\{5,10,15,20\}$ и отношение $R=\{(x,y) \mid x,y \in X,\ x - \text{делитель } y\}$. Показать, что отношение R является отношением порядка. Построить диаграмму Хассе частично упорядоченного множества (X,R). Существует ли в множестве X наибольший и наименьший элементы? Существуют ли несравнимые элементы?

7. Заданы отношения:

R:

A_1	A_2	A_3
a	*b*	*c*
a	*c*	*d*
b	*c*	*d*

S:

B_1	B_2
b	*e*
b	*c*
d	*c*

Записать обозначения операций реляционной алгебры и выполнить их:

а) проекция на список (3,2) отношения R;

б) соединение отношений R и S по условию «$A_1 = B_1$».

8. Даны множества $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{n^2-1 \mid n \in \mathrm{N}\}$. Какова мощность множеств $A \cap B, A \cup B, A \times B$?

9. Равномощны ли множества $X=(-3;+\infty)$ и $Y=[2;4]$?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. В корзине лежат серые котята. У трех из них есть рыжие пятнышки, у четырех – белые. Трехцветный котенок только один. Сколько всего котят в корзине, если все они с пятнышками.

Какое правило используется для решения задачи?

2. Шесть старушек вышли во двор поболтать. На скамейке помещаются только четыре из них. Сколькими способами их можно рассадить на скамейке?

3. На веревке сушатся четыре белых полотенца и три желтых. Сколькими способами их можно разместить, если полотенца одного цвета не различаются между собой?

4. Из 12 разных книг 4 – в твердом переплете. Сколькими способами можно выбрать 5 книг так, чтобы среди них две были в твердом переплете?

5. Решить уравнение $C_n^{n-2} = 6$.

6. Вычислить значение $1{,}023^6$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, пользуясь формулой бинома Ньютона.

7. Возвести подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ в четвертую степень.

8. Построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис. 1.

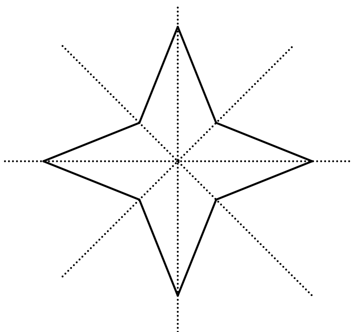


Рис. 1

Вариант 2

1. В избушку Бабы Яги можно попасть по одной из пяти тропинок, а вернуться только по одной из двух. Сколько всего маршрутов для того, чтобы сходить к ней в гости?

Какое правило используется при решении задачи?

2. Доказать, что число трехбуквенных слов, которые можно образовать из букв слова «гипотенуза», равно числу всех перестановок букв, составляющих слово «призма».

3. Сколькими способами 20 человек можно рассадить в три автобуса, если способы отличаются лишь количеством человек в каждом автобусе?

4. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 2 пешки, коня, ферзя и короля одного цвета. Пешки неразличимы.

5. Сравнить $(C_{99}^{50} \cdot C_{101}^{50})$ и (C_{100}^{50}).

6. Вычислить значение $3{,}042^5$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, пользуясь формулой бинома Ньютона.

7. Доказать, что подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ является обратной к подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис. 2.

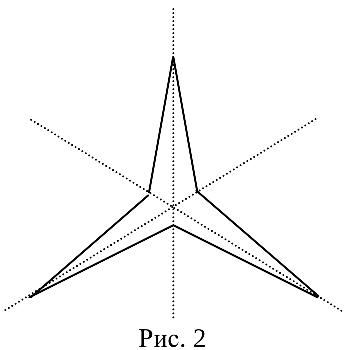


Рис. 2

Вариант 3

1. В буфете три вида воды и два – сока. Сколькими способами можно выбрать один стакан? Какое правило используется при решении задачи?

2. В библиотеку пришло девять новых книг. Сколькими способами читатель может выбрать две из них?

3. В елочной гирлянде восемь лампочек: две желтых, три красных, три синих. Сколькими способами их можно расположить в гирлянде?

4. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске двух белых и двух черных коней? Конь может стоять на любой клетке, одноцветные фигуры неразличимы.

5. Сколько решений имеет уравнение $15 \le C_y^x \le 20$?

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $0{,}085^4$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$.

7. Представить подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ в виде композиции независимых циклов.

8. Построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис. 3.

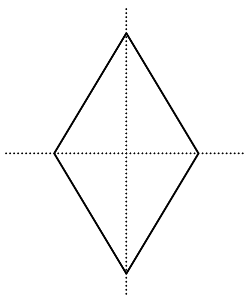


Рис. 3

Вариант 4

1. Все первоклассники пришли в школу с букетами ромашек и астр. В шести из них были астры, в четырех – ромашки; в двух букетах были и те, и другие цветы. Сколько всего было букетов? Какое правило используется при решении задачи?

2. Сколько слов, состоящих из двух гласных и трех согласных можно составить из букв слова «пуговица»?

3. Сколько чисел, больших 5000000, можно составить из цифр 7, 5, 4, 4, 3, 3, 1.

4. В колоде 32 карты. Сколькими способами можно пять карт так, что среди них окажутся две карты из пяти одинакового, а остальные – разных номиналов?

5. Решить уравнение $C_{n-1}^2 = 3$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $0{,}005^6$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

7. Выполнить действия над подстановками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис.4.

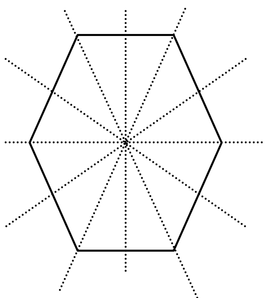


Рис. 4

Вариант 5

1. На рынке продается четыре щенка и пять котят. Сколько всего возможностей выбрать себе четвероногого друга? Какое правило используется при решении задачи?

2. Пятнадцать студентов пришли на занятия, но в аудитории оказалось только 13 стульев. Сколькими способами они могут выбрать двоих, чтобы отправить их на поиски стульев?

3. Сколькими способами можно составить расписание для сдачи четырех экзаменов (способы различаются порядком сдачи экзаменов)?

4. В городе N автобусы ходят без кондукторов, и пассажиры пробивают талоны компостером. Сколько различных пробивок можно установить на компостере, если он пробивает отверстия не менее, чем на трех из девяти возможных мест, но не на всех девяти?

5. Сравнить $(C_{79}^{40} \cdot C_{81}^{40})$ и $(C_{80}^{40})^2$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $2{,}005^4$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$.

7. Возвести подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ в третью степень.

8. Построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис.5.

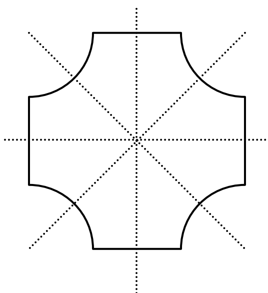


Рис. 5

Вариант 6

1. На обед в кафе можно взять одно из трех мясных блюд или одно из двух рыбных. Сколько всего способов пообедать, если денег хватает только на одну порцию? Какое правило используется для решения задачи?

2. Сколькими способами можно составить расписание четырех экзаменов (способы различаются порядком сдачи экзаменов).

3.Требуется покрасить шесть железных гаражей, на каждый из которых расходуется одна банка краски. Сколькими способами можно покрасить гаражи, если есть две банки красной краски, три – зеленой и одна синей?

4. Восемь туристов отправились в путь на двух лодках, в меньшей из которых могли поместиться не более четверых, а в большей – не более шестерых человек. Сколькими различными способами они могут распределиться в разные лодки? (Распределения считаются различными, если хотя бы один турист окажется в другой лодке).

5. Вычислить $\dfrac{C_{15}^{13}}{C_{10}^{8}}$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $5{,}005^5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

7. Представить подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ в виде композиции независимых циклов.

8. Построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис. 6.

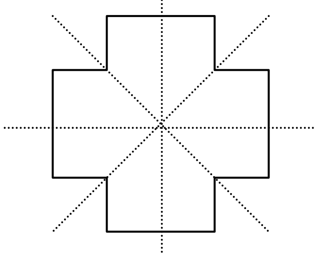


Рис. 6

Вариант 7

1. Поехали как-то три богатыря на поиски противника. А навстречу им два Змея-Горыныча. Сколько у них способов составить одну пару для поединка? Какое правило используется при решении задачи?

2. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде четырех человек при условии, что они поедут в разных вагонах?

3. В библиотеке стоят три одинаковых учебника по математике и четыре разных по программированию. Сколькими способами их можно расставить на полке?

4. В колоде 32 карты. Сколькими способами можно выбрать пять карт так, чтобы среди них оказались две «двойки» («двойка» – пара карт одного номинала).

5. Решить уравнение $C_{n-2}^{1} = 20$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $1{,}025^6$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

7. Выполнить действия над подстановками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис. 7.

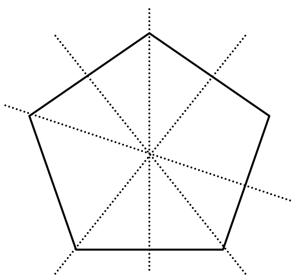


Рис. 7

Вариант 8

1. В группе 23 человека, каждый из них умеет кататься на коньках или на лыжах; 12 – умеют кататься на коньках, 18 – на лыжах. Сколько человек умеют кататься и на коньках, и на лыжах? Какое правило используется для решения задачи?

2. Семеро рыбаков отправились на остров на двух лодках. Ночью одна лодка уплыла. Сколькими способами они могут отправить троих в погоню за уплывшей лодкой?

3. Сколькими способами можно расставить 12 книг по трем полкам, если на каждой полке могут поместиться все книги? Способы различаются лишь количеством книг на полках.

4. В колоде 32 карты. Сколькими способами можно выбрать пять карт так, что среди них окажутся три карты одного номинала и две – другого?

5. Сравнить $C_{59}^{30} \cdot C_{61}^{30}$ и $(C_{60}^{30})^2$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $0{,}088^6$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

7. Возвести подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ в третью степень.

8. Построить группу симметрий фигуры, изображенной на рис. 8.

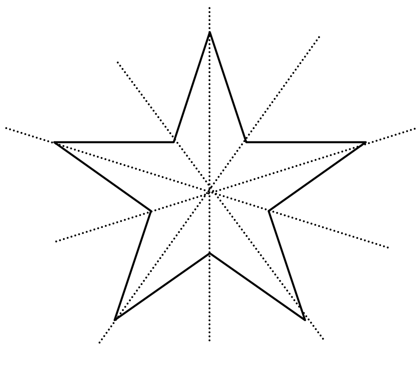


Рис. 8

Вариант 9

1. В городе Т три программы телевидения и три радио. Сколько возможностей выбрать программу? Какое правило используется для решения задачи?

2. На столе лежат 8 яблок. Сколькими способами можно выбрать два из них?

3. Сколькими способами можно рассадить шесть кустов пионов на трех клумбах, если на каждой клумбе помещаются все шесть?

4. Сколькими способами восемь человек можно рассадить за круглым столом так, чтобы два фиксированных лица сидели друг против друга?

5. Решить уравнение $C_n^2 = 28$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $4{,}095^5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$.

7. Представить подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ в виде композиции независимых циклов.

8. Построить группу симметрий для фигуры, изображенной на рис.9.

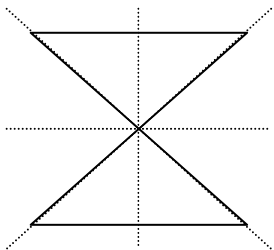


Рис. 9

Вариант 10

1. Для окраски фона можно использовать один из четырех цветов, для окраски текста – один из трех других цветов. Сколько способов написать цветной текст на цветном экране? Какое правило используется для решения задачи?

2. В магазине продается восемь типов ручек. Сколькими способами можно выбрать себе три ручки?

3. Сколькими способами можно разложить восемь монет различного достоинства в два кармана?

4. Десять кресел поставлены в ряд. Сколькими способами два человека могут сесть на них так, чтобы между ними было хотя бы одно пустое кресло?

5. Вычислить $C_{20}^{16} \cdot C_4^3$.

6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $4{,}095^5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$.

7. Выполнить действия над подстановками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Построить группу симметрий для фигуры, изображенной на рис.10.

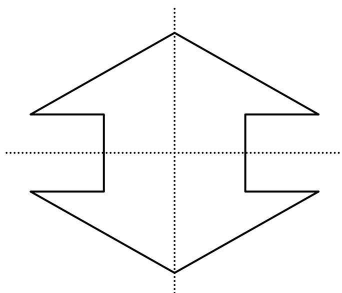


Рис. 10