МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

Численные методы математического анализа

Методические указания
к выполнению лабораторных вычислительных работ
по курсу «Математический анализ»

В двух частях

Часть 1

Составители:
Н. Ф. Добрынина, Д. В. Тарасов

Пенза
Издательство ПГУ
2013

УДК 621.791
Ч-67

Р е ц е н з е н т ы :
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования
Пензенского государственного университета
Ю. Г. Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин
Пензенского филиала Военной академии
материально-технического обеспечения
имени генерала армии А. В. Хрулева
О. А. Голованов

Ч-67 **Численные методы математического анализа** : метод. указания к выполнению лабораторных вычислительных работ по курсу «Математический анализ» : в 2 ч. / сост.: Н. Ф. Добрынина, Д. В. Тарасов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – Ч. 1. – 68 с.

Издание содержит необходимые теоретические сведения для успешного выполнения лабораторных работ по курсу «Численные методы математического анализа». Включает описание методики выполнения, варианты задач, пример оформления хода и необходимых расчетов работы. Изложение материала сопровождается детальным описанием вычислительных алгоритмов математического анализа и требует от обучающихся проведения сравнительного анализа эффективности существующих (предложенных) методов.

Работа подготовлена на кафедре высшей и прикладной математики и предназначена для студентов кафедры систем автоматизированного проектирования, изучающих курс «Математический анализ», а также может быть использована студентами других специальностей при изучении высшей математики.

УДК 621.791

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

При выполнении лабораторных работ «Численные методы математического анализа» студенты изучают основы и методику решения задач прикладной математики.

В результате изучения этого курса студент должен знать численные методы математического анализа, уметь применять их при решении задач, составлять вычислительные программы и оформлять результат решения в виде бланков и таблиц.

Методические указания состоят из двух частей. Для выполнения практических заданий первой части необходимы знания студентов в области математического анализа, полученные ими на первом году обучения; второй части – на втором курсе.

Первая часть методических указаний содержат следующие лабораторные работы:

1. Приближенные методы решения нелинейных уравнений,
2. Интерполирование функций.
3. Приближенное дифференцирование функций.
4. Численное интегрирование.

В указаниях для каждого метода изложена теория, приведен пример оформления лабораторной работы и даны варианты заданий.

Общие методические указания

Порядок выполнения работы:

1. Получить у преподавателя задание на выполнение очередной работы (вариант и дополнительные указания).
2. Разработать структуру и алгоритм решения данной лабораторной работы.
3. Реализовать алгоритм в виде текста на языке MathCad.
4. Подготовить текстовые наборы данных, необходимые для отладки программы и демонстрации ее работоспособности.
5. Отладить полученную программу, используя подготовленные ранее текстовые наборы данных, и сравнить полученные результаты с ожидаемыми результатами. В случае совпадения можно сделать вывод, что программа работает правильно. В противном случае необходимо продолжить отладку программы.
6. Отлаженную программу исполнить в пошаговом режиме с остановками в контрольных точках, тщательно проверяя полученные промежуточные результаты. Проанализировать полученные конечные результаты.
7. Подготовить и сдать преподавателю отчет о работе.

Лабораторная работа № 1
Методы решения нелинейных уравнений

1.1. Алгебраические и трансцендентные уравнения

При решении практических задач часто приходится сталкиваться с решением уравнений. Всякое уравнение с одним неизвестным можно представить в виде

$$\varphi(x) = g(x). \qquad (1)$$

Уравнение с одним неизвестным можно записать в виде

$$f(x) = 0, \qquad (2)$$

если перенести функцию $g(x)$ в левую часть уравнения (1).

Функция $f(x)$ определена на некотором множестве X, называемом ***областью допустимых значений уравнения***.

Совокупность значений переменной x, при которых уравнение (2) превращается в тождество, называется ***решением*** этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности называется ***корнем*** уравнения.

Решить уравнение – значит, найти множество всех корней этого уравнения.

В зависимости от того, в какой класс функций входит функция в уравнение (2), уравнения разделяются на два класса: алгебраические и трансцендентные.

Функция называется *алгебраической*, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем (операция извлечения корня может быть представлена как операция возведения в степень с показателем $1/n$).

Алгебраическая функция называется ***рациональной*** относительно переменной x, если над x не производится никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Если в рациональную функцию переменная x не входит в качестве делителя или не входит в выражение, являющееся делителем, то такая функция называется ***целой рациональной***. Например:

1) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ (n – натуральное число; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – любые действительные числа, причем $a_0 \neq 0$);

2) $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x+8}{5}$ – целые рациональные функции. Целая рациональная функция определена на всей числовой оси.

Функция вида

$$y=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n},$$

где m – натуральное число; $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ – любые действительные числа, называется **дробно-рациональной.**

Дробно-рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

Функция называется ***иррациональной***, если для получения значения функции по данному значению x нужно выполнить четыре арифметических действия и извлечение корня.

Все рациональные и иррациональные функции относятся к классу алгебраических функций.

Другой класс функций – ***трансцендентные функции***. К ним относятся все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $\log_a x$, тригонометрические $\sin x, \cos x, \mathrm{tg} x, \mathrm{ctg} x,$ обратные тригонометрические $\arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg} x, \mathrm{arcctg} x$ и др.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется *алгебраическим.*

Решение уравнения с одним неизвестным заключается в отыскании ***корней*** уравнения, т.е. тех значений x, при которых уравнение обращается в тождество.

Найти значения корней уравнения можно только в исключительных случаях. Поэтому большое значение приобретают методы приближенного вычисления корней уравнения $f(x)=0$. Задача нахождения корней считается решенной, если корни вычислены с заданной степенью точности.

Что означает выражение «корень вычислен с заданной степенью точности»? Пусть ξ – корень уравнения; $\overline{x}$ – приближенное значение, вычисленное с точностью до ε: это означает, что $\left|\xi-\overline{x}\right|\le\varepsilon$. Если установлено, что искомый корень ξ заключен между числами a и b, причем $b-a\le\varepsilon$, то числа a и b – это приближенные значения корня ξ соответственно с недостатком и с избытком с точностью ε, так как $\left|\xi-a\right|<b-a\le\varepsilon$ и $\left|\xi-b\right|<b-a\le\varepsilon$. За приближенное значение корня ξ

с точностью до ε можно принять любое число, содержащееся между a и b. В данной лабораторной работе рассматриваются способы приближенного решения уравнений.

1.2. Графические способы решения уравнений

Одним из методов решения уравнений является графический. Точность такого решения невелика, однако с помощью графика можно разумно выбрать первое приближение, с которого начнется дальнейшее решение уравнения.

Первый способ. Все члены уравнения переносят в левую часть уравнения и представляют его в виде $f(x)=0$. После этого строят график функции $y=f(x)$ в MathCad. Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox являются корнями уравнения (рис. 1.1).

Второй способ. Все члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую – в правой, и представляют уравнение в виде $\varphi(x)=g(x)$. После этого строят графики двух функций $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций служат корнями данного уравнения. Пусть точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, ординаты обоих графиков в этой точке равны между собой, т.е. $\varphi(x_0)=g(x_0)$. Из этого равенства следует, что x_0 – корень уравнения (рис. 1.2).

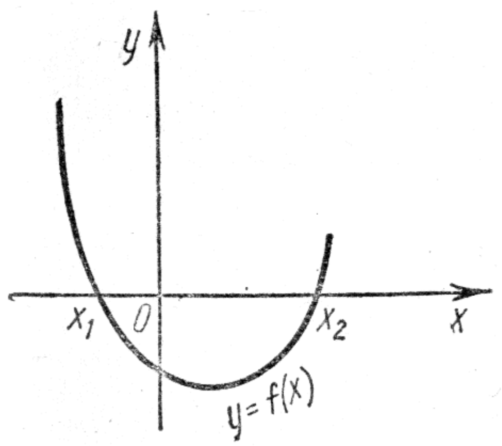


Рис. 1.1

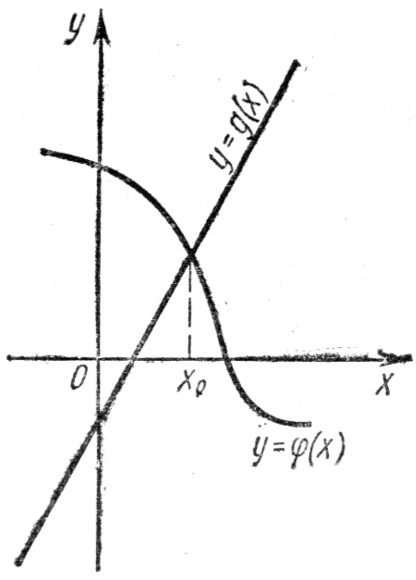


Рис. 1.2

Для графического решения уравнения $f(x)=0$, все корни которого лежат в промежутке $[a,b]$, можно рекомендовать следующую схему:

1. Представить уравнение в виде $\varphi(x)=g(x)$ с таким расчетом, чтобы функции $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$ были просты и удобны для построения.
2. Построить графики функций в MathCad $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$ в промежутке $[a,b]$.
3. Если графики не пересекаются, то корней в данном промежутке нет. Если графики пересекаются, то нужно определить точки их пересечения, найти абсциссы этих точек, которые будут приближенными значениями корней рассматриваемого уравнения.

1.3. Отделение корней

Графический способ решения уравнения дает возможность получить корни с небольшой степенью точности. Поэтому чтобы получить значения корней с заданной степенью точности, необходимо применять методы, которые позволят уточнить найденные значения.

Процесс нахождения приближенных значений корней уравнения разбивается на два этапа:

1) отделение корней;
2) уточнение корней до заданной степени точности.

Рассмотрим первый этап приближенного вычисления корней уравнения – ***отделение корней***.

Корень ξ уравнения $f(x)=0$ считается отделенным на отрезке $[a,b]$, если на этом отрезке уравнение не имеет других корней.

Отделить корни – значит, разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится один корень. Отделение корней можно произвести двумя способами: ***графическим*** и ***аналитическим***.

Графический метод отделения корней

При графическом методе отделения корней строят графики функций $f(x)=0$ или представляют уравнение в виде $\varphi(x)=g(x)$ и строят графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$. Отрезки, в которых заключено только по одному корню, легко находятся.

Замечание. Если график функции $y = f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.3, где кривая трижды пересекает ось абсцисс, то уравнение имеет три простых корня. Если кривая касается оси абсцисс (рис. 1.4), то уравнение имеет двукратный корень.

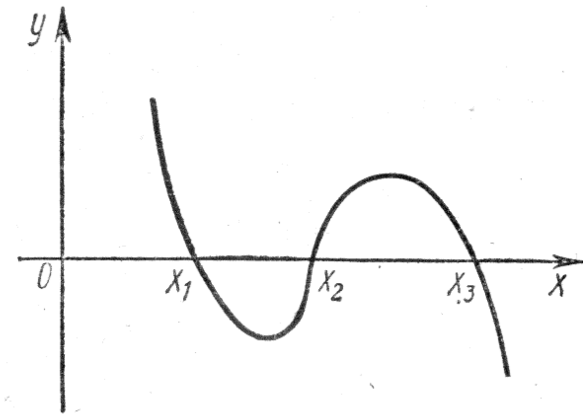


Рис. 1.3

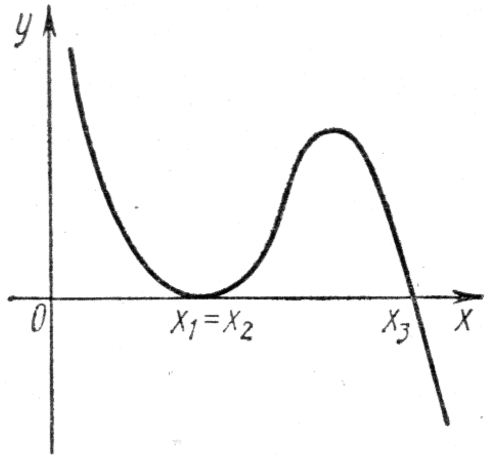


Рис. 1.4

Если уравнение имеет трехкратный действительный корень, то в месте касания с осью кривая имеет точку перегиба (рис. 1.5).

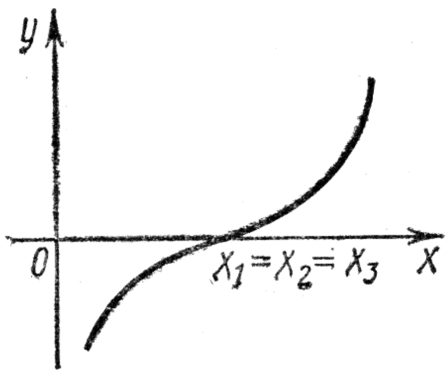


Рис. 1.5

Графический метод отделения корней не обладает большой точностью. Он дает возможность грубо определить интервалы изоляций корня. Далее корни уточняются одним из способов приближенного вычисления.

Аналитический метод отделения корней

Аналитически корни уравнения $y = f(x)$ можно отделить, используя некоторые свойства функций, изучаемые в курсе математического анализа. Сформулируем без доказательств теоремы, необходимые при отделении корней.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ существует по крайней мере один корень уравнения $f(x)=0$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ содержится корень уравнения $f(x)=0$ и этот корень единственный.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует корень уравнения $f(x)=0$ и притом единственный.

Используем сведения из математического анализа.

Если функция $f(x)$ задана аналитически, то ***областью определения функции*** называется ***совокупность*** всех действительных значений аргумента, при которых функция не теряет числового смысла.

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей***, если с возрастанием аргумента значение функции увеличивается (рис. 1.6,*а*,*в*) и ***убывающей***, если с возрастанием аргумента значение функции уменьшается (рис. 1.6,*б*, *г*).

Функция называется ***монотонной***, если она на заданном промежутке либо возрастает, либо убывает.

Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак на интервале (a,b). Тогда если во всех точках интервала (a,b) первая производная положительная ($f'(x)>0$), то функция $f(x)$ в этом интервале ***возрастает*** (рис. 1.6,*а*,*в*).

Если во всех точках интервала (a,b) первая производная отрицательная ($f'(x)<0$), то функция в этом интервале убывает (рис. 1.6,*б*,*г*). Корнем уравнения служит абсцисса точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox.

Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет производную второго порядка, которая сохраняет постоянный знак на всем отрезке. Тогда если $f''(x)>0$, то график функции является ***выпуклым вниз*** (рис. 1.6,*а*,*г*), если $f''(x)<0$, то график функции является ***выпуклым вверх*** (рис. 1.6,*б*,*в*).

Точки, в которых первая производная функции равна нулю или не существует, но функция сохраняет непрерывность, называются ***критическими,*** или ***экстремальными***.

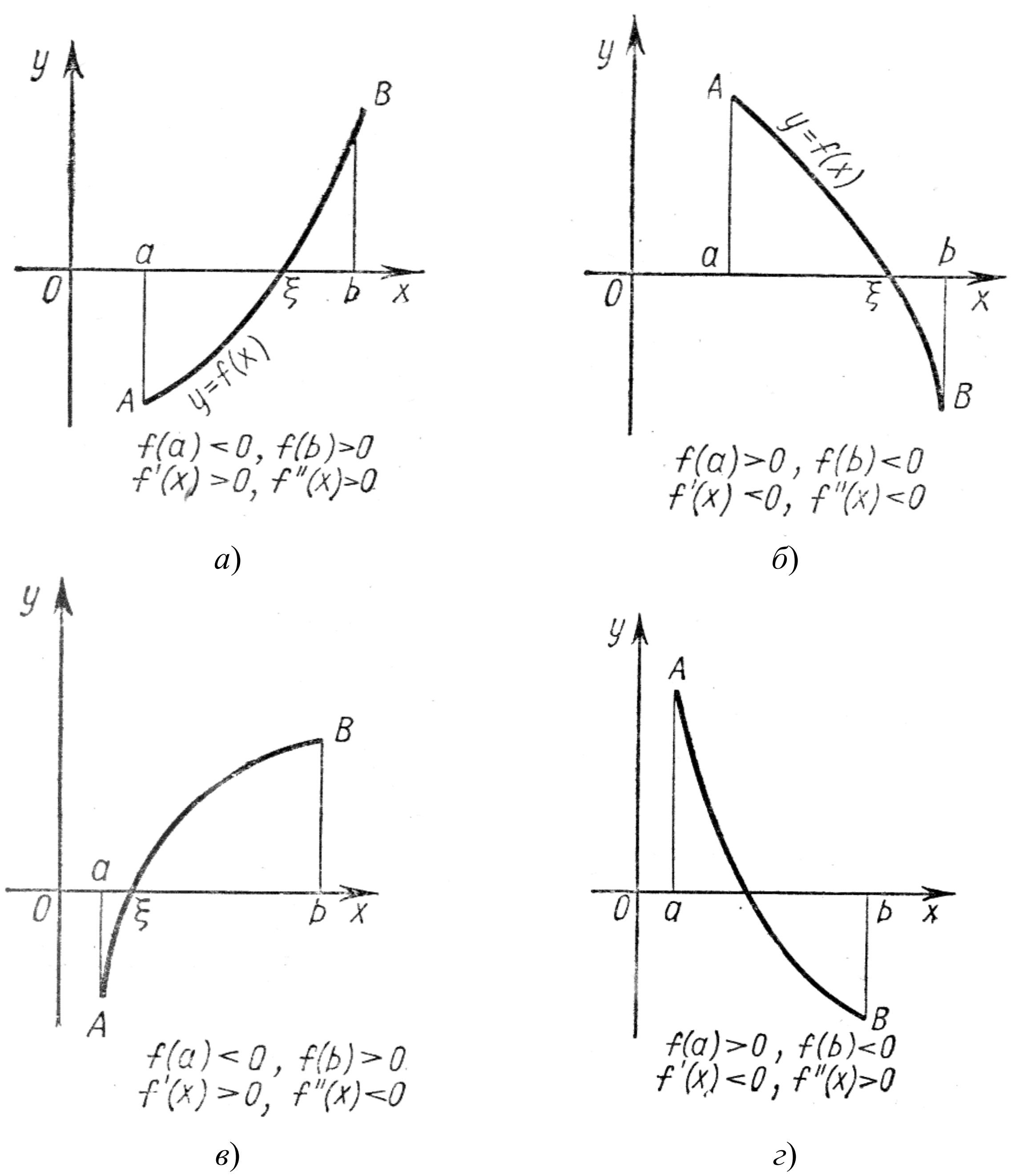


Рис. 1.6

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает *наибольшее* и *наименьшее* значения. Этих значений функция достигает в критических точках или на концах отрезка.

Обобщая изложенное, можно рекомендовать следующий порядок действий для определения корней уравнения аналитическим методом:

1. Найти первую производную $f'(x)$.
2. Составить таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным:

− критическим значениям производной;
− граничным значениям.

3. Определить интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

1.4. Метод хорд

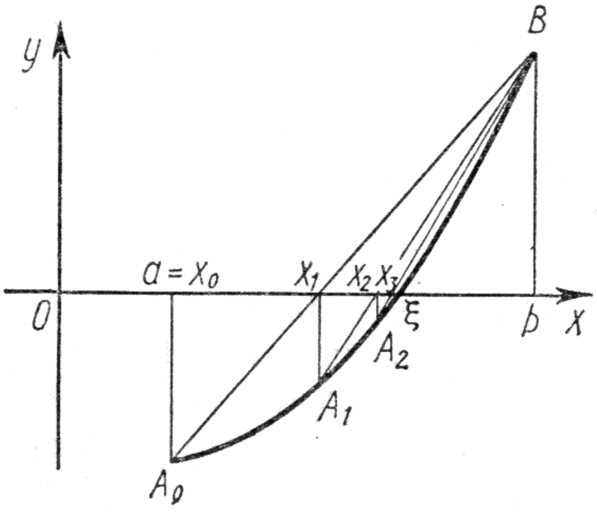
Метод хорд является одним из распространенных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

Пусть дано уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ – непрерывная функция, имеющая в интервале (a,b) производные первого и второго порядков. Корень считается отделенным и находится на отрезке $[a,b]$. При этом выполняется следующее условие: $f(a)\cdot f(b)<0$.

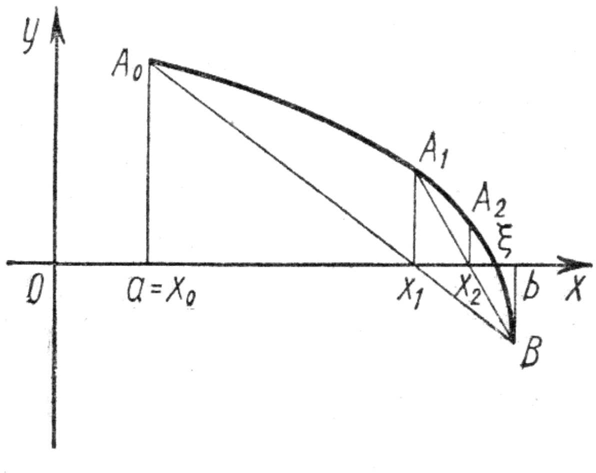
Идея метода хорд состоит в том, что на достаточно малом промежутке $[a,b]$ дуга кривой $y=f(x)$ заменяется стягивающей ее хордой. В качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью Ox.

Рассмотрим случай, когда первая и вторая производные имеют *одинаковые* знаки ($f'(x)\cdot f''(x)>0$).

Пусть, например, $f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$ (рис. 1.7). График функции проходит через точки $A_0(a;f(a)), B(b;f(b))$. Искомый корень уравнения $f(x)=0$ есть абсцисса точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью Ox. Это и будет первое приближенное значение корня.



а)



б)

Рис. 1.7

Уравнение хорды, проходящей через точки A_0 и B, имеет вид

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Найдем значение $x=x_1$, для которого $y=0$:

$$x_1=a-\frac{f(a)\left(b-a\right)}{f(b)-f(a)}. \qquad (1)$$

Эта формула называется формулой метода хорд. Теперь корень ξ находится внутри отрезка $\left[x_1,b\right]$. Если значение корня x_1 нас не устраивает, то его можно уточнить, применяя метод хорд к отрезку $\left[x_1,b\right]$. Соединим точку $A_1(x_1;f(x_1))$ с точкой $B(b;f(b))$. Найдем x_2 – точку пересечения хорды A_1B с осью Ox:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b-f(x_1)}.$$

Продолжая этот процесс, находим

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)}.$$

В общем виде

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}. \qquad (2)$$

Процесс продолжается до тех пор, пока не получим приближенный корень с заданной степенью точности.

По приведенным формулам вычисляются корни и для случая, когда $f(a)>0, f(b)>0, f'(x)<0, f''(x)<0$ (см. рис. 1.7).

Рассмотрим случаи, когда первая и вторая производные имеют *разные* знаки ($f'(x)\cdot f''(x)<0$).

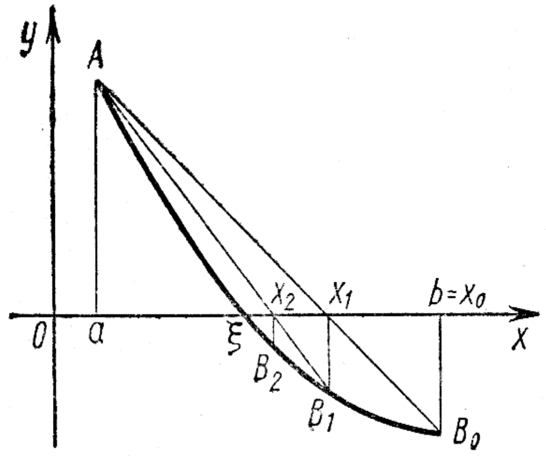
Пусть, например, $f(a)>0, f(b)<0, f'(x)<0, f''(x)>0$ (рис. 1.8,*a*). Соединим точки $A(a;f(a))$ и $B_0(b;f(b))$ и запишем уравнение хорды, проходящей через A и B_0:

$$\frac{y-f(b)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-b}{b-a}.$$

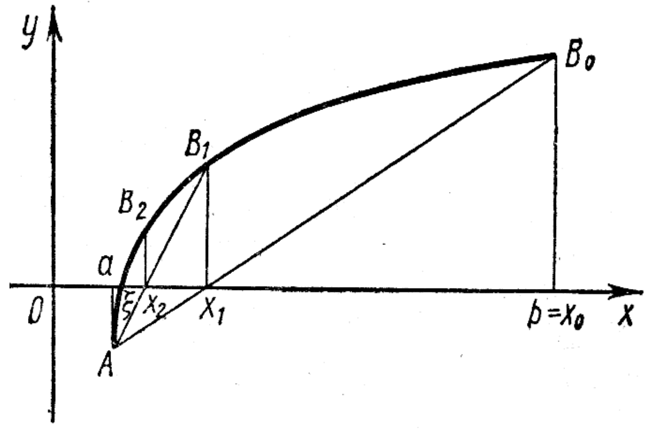
Найдем x_1 как точку пересечения хорды с осью Ox, полагая $y=0$:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}, \tag{3}$$

теперь корень ξ заключен внутри отрезка $[a, x_1]$.



а)



б)

Рис. 1.8

Применяя метод хорд к отрезку $[a, x_1]$, получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)}.$$

В общем случае

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}. \tag{4}$$

По этим же формулам находится приближенное значение корня и для случая, когда $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$ (рис. 1.8,*б*).

Итак, если $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то приближенный корень вычисляется по формулам (1) и (2); если $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то по формулам (3) и (4).

Выбор тех или иных формул можно сделать, пользуясь правилом: *неподвижным концом отрезка является тот, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной.*

Если $f(b) \cdot f''(x) > 0$, то неподвижен конец b, а все приближения к корню ξ лежат со стороны конца a (формулы (1) и (2)). Если $f(a) \cdot f''(x) > 0$, то неподвижен конец a, а все приближения к корню ξ лежат со стороны конца b (формулы (3) и (4)).

При *оценке погрешности* приближения можно воспользоваться формулой

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}|, \tag{5}$$

где ξ – точное значение корня, а x_{n-1} и x_n – приближения к нему, полученные на $(n-1)$-м и n-м шагах. Соотношением (5) можно пользоваться, если выполнено условие

$$M \le 2m, \tag{6}$$

где

$$M = \max_{[a,b]} |f'(x)|, \quad m = \min_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Отчет о результатах вычислений нужно представить в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

n	x_n	$x_n - a$ $(b - x_n)$	$f(x_n)$	$-\dfrac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$ $\left(-\dfrac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}\right)$
0 1 2 3 …				

1.5. Метод Ньютона (метод касательных)

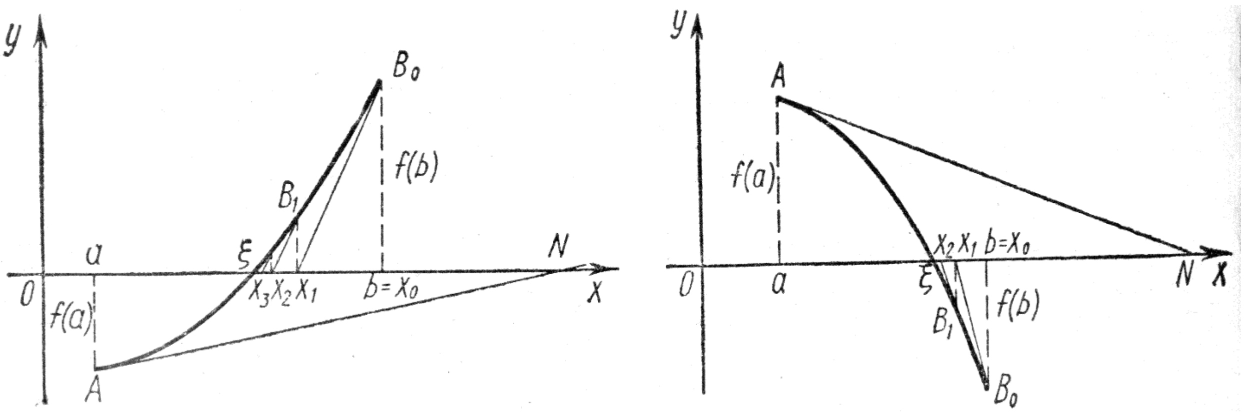
Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ определен на отрезке $[a,b]$, производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки на всем отрезке $[a,b]$.

Геометрический смысл *метода Ньютона* состоит в том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к этой кривой. Второе название метода: *метод касательных.*

Первый случай. Пусть $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ (рис. 1.9,*а*) или $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$ (рис. 1.9,*б*).

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0(b; f(b))$ и найдем абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox. Известно, что уравнение касательной в точке $B_0(b; f(b))$ имеет вид

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$



а) *б*)

Рис. 1.9

Полагая $y=0,\ x=x_1$, получим

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{1}$$

Теперь корень уравнения находится на отрезке $\left[a, x_1\right]$. Применяя снова метод Ньютона, проведем касательную к кривой в точке $B_1\left(x_1; f(x_1)\right)$ и получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}.$$

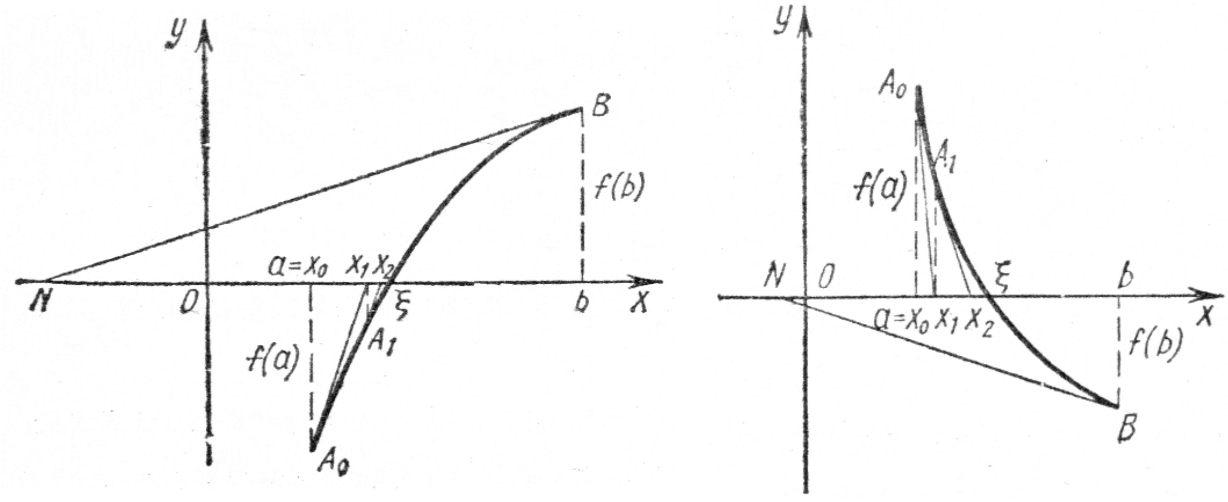
В общем случае

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

Получаем последовательность приближенных значений $x_1, x_2, \ldots,$ $x_n, \ldots$ Каждый последующий член последовательности ближе к корню ξ, чем предыдущий. Однако все корни x_n остаются больше истинного корня ξ. Значение x_n – приближенное значение корня ξ с избытком.

Второй случай. Пусть $f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0, f''(x)<0$ (рис. 1.10,*а*) или $f(a)>0, f(b)<0, f'(x)<0, f''(x)>0$ (рис. 1.10,*б*). Если снова провести касательную к кривой $y=f(x)$ в точке B, то она пересечет ось абсцисс в точке, не принадлежащей отрезку $\left[a,b\right]$. Поэтому проведем касательную к кривой в точке $A_0(a; f(a))$ и запишем ее уравнение для данного случая:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$



а) *б*)

Рис. 1.10

Полагая $y=0, x=x_1$, находим

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{3}$$

Корень ξ находится теперь на отрезке $[x_1, b]$. Применяя снова метод Ньютона, проведем касательную в точке $A_1(x_1; f(x_1))$ и получим

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

В общем виде имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4}$$

Получаем последовательность приближенных значений $x_1, x_2, \ldots,$ $x_n, \ldots,$ каждый последующий член которой ближе к истинному корню ξ, чем предыдущий. Значение x_n – приближенное значение корня ξ с недостатком.

Сравнивая формулы (2) и (4), замечаем, что они отличаются друг от друга только выбором начального приближения.

При выборе начального приближения корня необходимо руководствоваться следующим правилом: *за исходную точку следует выбирать тот конец отрезка* $[a,b]$, *в котором знак функции совпадает со знаком второй производной.* В первом случае $f(b) \cdot f''(x) > 0$, и в качестве начального приближения берем $b = x_0$; во втором $f(a) \cdot f''(x) > 0$, и в качестве начального приближения берем $a = x_0$.

Для *оценки погрешности* можно пользоваться общей формулой

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{5}$$

где

$$m = \min_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Отчет о выполнении работы нужно представить в виде табл. 1.2.

Таблица 1.2

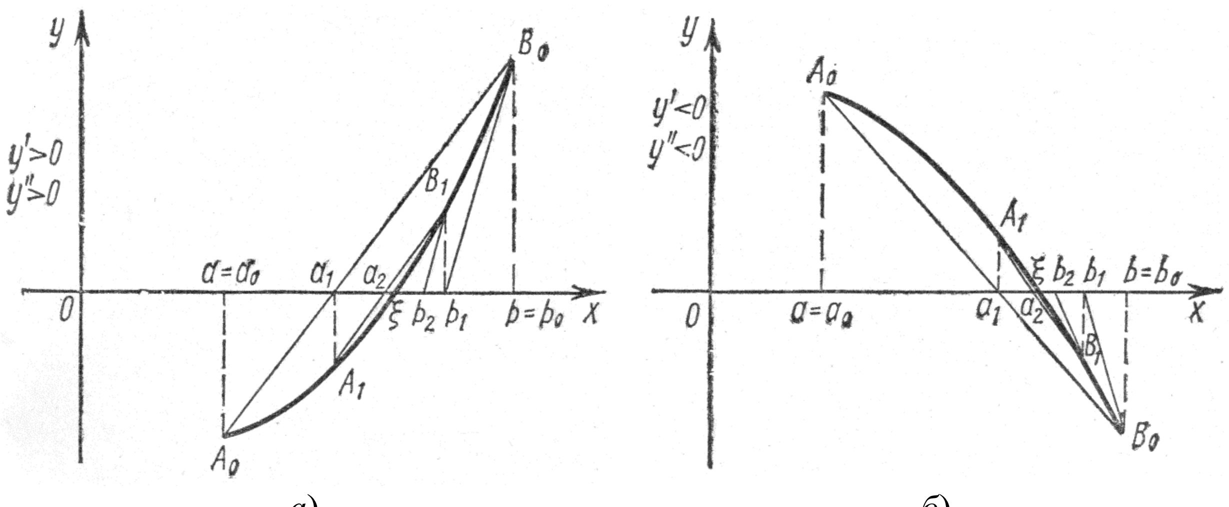
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1 2 3 …				

1.6. Комбинированный метод хорд и касательных

Методы хорд и касательных дают приближения корня с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом, и уточнение корня происходит быстрее.

Пусть дано уравнение $f(x)=0$, корень ξ определен и находится на отрезке $[a,b]$. Применим *комбинированный метод хорд и касательных*, учитывая тип графика функции.

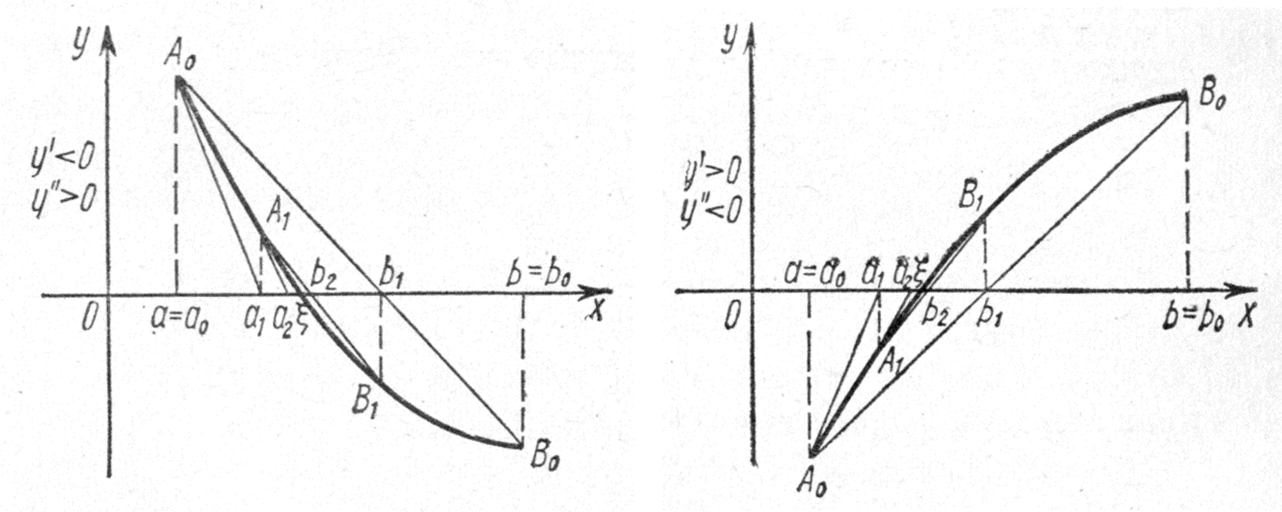
Если $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то *метод хорд* дает приближения корня с *недостатком*, а *метод касательных – с избытком* (рис. 1.11).



а) *б*)

Рис. 1.11

Если $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то *методом хорд* получаем значение корня с *избытком*, а *методом касательных – с недостатком* (рис. 1.12).



а) *б*)

Рис. 1.12

Во всех случаях истинный корень заключен между приближенными корнями, получающимися по методу хорд и по методу касательных. Выполняется неравенство

$$a<\overline{x_n}<\xi<\overline{\overline{x_n}}<b,$$

где $\overline{x_n}$ – приближенное значение корня с недостатком; $\overline{\overline{x_n}}$ – с избытком.

Вычисления следует вести в следующем порядке: если $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу хорд, а со стороны конца b – значения, полученные по методу касательных. Тогда

$$a_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)},\quad b_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \qquad (1)$$

Теперь корень находится на интервале $[a_1,b_1]$. Применяя к этому интервалу комбинированный метод, получаем

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)(b_1-a_1)}{f(b_1)-f(a_1)},\quad b_2=b_1-\frac{f(b_1)}{f'(b_1)}.$$

В общем случае

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)},\quad b_{n+1}=b_n-\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}. \qquad (2)$$

Если $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то со стороны конца a лежат приближенные значения корня, полученные по методу касательных, а со стороны конца b – значения, полученные по методу хорд. Тогда

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \tag{3}$$

Применяя к отрезку $[a_1, b_1]$ комбинированный метод, получаем

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \quad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)(b_1-a_1)}{f(b_1)-f(a_1)}.$$

В общем виде

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}. \tag{4}$$

Комбинированный метод очень удобен при оценке погрешности вычислений. Процесс вычислений прекращается, как только станет выполняться неравенство $\left|\overline{\overline{x}}_n - \overline{x}_n\right| < \varepsilon$. За приближенное значение корня следует принять $\xi = \frac{1}{2}\left(\overline{x}_n = \overline{\overline{x}}_n\right)$, где $\overline{x}_n$ и $\overline{\overline{x}}_n$ – приближенные значения корня с недостатком и с избытком.

Вычисления проводятся по формулам (2), где

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \quad \Delta a_n = -\frac{f(a_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)};$$

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \quad \Delta b_n = -\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

Вычисления сводим в табл. 1.3.

Таблица 1.3

n	$\frac{a_n}{b_n}$	$b_n - a_n$	$\frac{a_n^2}{b_n^2}$	$\frac{a_n^3}{b_n^3}$	$\frac{f(a_n)}{f(b_n)}$	$f'(a_n)$	$f(b_n)-$ $-f(a_n)$	$\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$	$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$
0									
1									
2									

1.7. Метод итераций (метод последовательных приближений)

Пусть задано уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Требуется определить вещественный корень этого уравнения, заключенный на отрезке $[a,b]$.

Заменим уравнение $f(x)=0$ равносильным ему уравнением

$$x=\varphi(x). \tag{1}$$

Выберем каким-либо способом $x_0 \in [a,b]$ и подставим его в правую часть уравнения (1); тогда получим $x_1=\varphi(x_0)$. Затем это значение x_1 снова подставим в правую часть уравнения (1) и получим $x_2=\varphi(x_1)$.

Повторяя этот процесс, получаем последовательность чисел $x_n=\varphi(x_{n-1})$. Возможны два случая:

1) последовательность $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ *сходится*, т.е. имеет предел, и тогда этот предел будет корнем уравнения $f(x)=0$;

2) последовательность $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ *расходится*, т.е. не имеет предела.

Приведем без доказательства теорему, выражающую условие, при котором итерационный процесс сходится.

Теорема. *Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется единственный корень уравнения $x=\varphi(x)$ и во всех точках этого отрезка производная $f'(x)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Если при этом выполняется и условие $a \le \varphi(x) \le b$, то итерационный процесс сходится, а за нулевое приближение x_0 x_0 можно взять любое число из отрезка $[a,b]$.*

Теорема утверждает, что все приближения $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ находятся на отрезке $[a,b]$ и чем меньше $|\varphi'(x)|$, тем лучше сходимость итерационного процесса.

Рассмотрим вопрос об определении точности вычисленных приближений значений корня. Пусть ξ – точное значение корня уравнения $x=\varphi(x)$, а число q определяется из соотношения $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Тогда справедливо соотношение

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

Если поставить условие, что истинное значение корня ξ должно отличаться от приближенного значения на величину ε, то приближения $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ надо вычислять до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q}.$$

Уравнение $f(x)=0$ можно привести к виду $x=\varphi(x)$ различными способами, однако для метода итераций следует взять то уравнение вида $x=\varphi(x)$, для которого выполняется условие приведенной выше теоремы.

Вычисления удобно вести с помощью табл. 1.4.

Таблица 1.4

n	x_n	$\varphi(x_n)=x_{n+1}$	$\left|x_{n+1}-x_n\right|$
0			
1			
2			

Варианты заданий для выполнения лабораторной работы № 1 приведены в приложении 2.

Задание

1. Разбить члены уравнения на две группы, одну из которых записать в левой части уравнения, а другую – в правой части. Представить уравнение в виде $\varphi(x)=g(x)$. Построить графики двух функций, найти примерно абсциссы точек пересечения этих графиков.
2. Определить примерно каждый корень уравнения (если их несколько). Для этого нужно определить интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.
3. Вычислить корни методом хорд.
4. Вычислить корни методом Ньютона.
5. Вычислить корни уравнения комбинированным методом.
6. Вычислить корни уравнения методом итераций.
7. Сделать сравнительный анализ вычислений, проведенных различными методами и отразить его в выводах.

Лабораторная работа № 2
Интерполирование функций

2.1. Математическая постановка задачи интерполирования

В вычислительной практике постоянно приходится сталкиваться с необходимостью вычисления значений функции $y = f(x)$ в точках x, отличных от значений аргумента, фиксированных в таблице функций. В некоторых случаях, несмотря на то, что аналитическое выражение функции известно, но оно является слишком сложным и неудобным для дальнейших математических преобразований. Подобные задачи формализуются как математические *задачи интерполирования*.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$ своими $n+1$ значениями

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$$

в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые называются *узлами интерполяции.* Требуется найти аналитическое выражение табулированной функции, совпадающей в узлах интерполяции со значениями заданной функции.

Процесс вычисления значений функции в точках x, отличных от узлов интерполяции, называют ***интерполированием*** функции $f(x)$.

Если аргумент x, для которого определяется приближенное значение функции, принадлежит отрезку $[x_0, x_n]$, то задача вычисления приближенного значения функции называется ***интерполированием в узком смысле***. Если аргумент x находится за пределами отрезка интерполирования, то задача определения значения функции в точке x называется ***экстраполированием***.

Геометрически задача интерполирования для функции одной переменной $y = f(x)$ означает построение кривой, проходящей через точки плоскости с координатами $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$ (рис. 2.1).

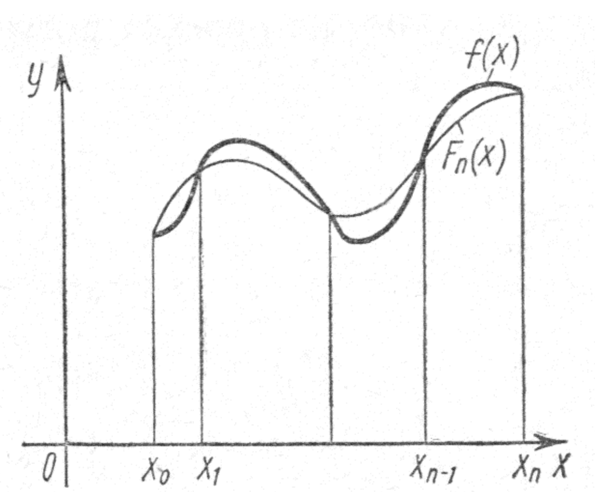


Рис. 2.1

Из рис. 2.1 видно, что через данные точки можно провести бесчисленное множество различных кривых и задача нахождения функции $f(x)$ по конечному числу ее значений слишком неопределенная.

Эта задача становится однозначной, если в качестве интерполирующей функции $F(x)$ для функции $y = f(x)$, заданной $n+1$ своими значениями, выбрать многочлен $F_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$F_n(x_0) = y_0, F_n(x_1) = y_1, \dots, F_n(x_n) = y_n.$$

Многочлен $F_n(x)$, удовлетворяющий этим условиям, называют *интерполяционным* многочленом, а соответствующие формулы – *интерполяционными формулами.*

В случае, когда $F(x)$ выбирается в классе степенных функций, интерполяция называется *параболической*. Этот способ приближения основывается на том, что на небольших отрезках функция $f(x)$ может быть достаточно хорошо аппроксимирована параболой определенного порядка.

При интерполировании возникает ряд задач: 1) выбор наиболее удобного способа построения интерполяционной функции для каждого конкретного случая; 2) оценка погрешности при замене $f(x)$ интерполирующей функцией $F(x)$ на отрезке $[a,b]$, поскольку функции $F(x)$ и $f(x)$ совпадают только в узлах интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_n$; 3) оптимальный выбор узлов интерполяции для получения минимальной погрешности.

2.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Наиболее общей формулой параболического интерполирования является интерполяционная формула Лагранжа. Задача параболического интерполирования формулируется следующим образом: на отрезке $[a,b]$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_n$ задается функция $f(x)$ своими $n+1$ значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \dots,\ y_n = f(x_n);$$

требуется построить многочлен $L(x)$ так, чтобы в узлах интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_n$ его значения совпали со значениями заданной функции. Нужно, чтобы выполнялись равенства

$$L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1, \dots, L(x_n) = y_n;$$

Узлы интерполяции могут произвольно отстоять друг от друга на отрезке $[a,b]$, и тогда они называются ***неравноотстоящими***. Если узлы интерполяции делят отрезок на равные участки разбиения, то узлы называются ***равноотстоящими***. В первом случае ***шаг интерполяции*** равен $h = x_{i+1} - x_i \neq \mathrm{const}\ (i = 0,1,\ldots,n-1)$, во втором – $h = \mathrm{const}$.

Задача имеет решение, если степень многочлена $L(x)$, которым мы заменяем неизвестную функцию $f(x)$, не выше n.

Представим многочлен $L(x)$ в виде

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

где $a_i\ (i = 0,1,\ldots,n)$ – неизвестные постоянные коэффициенты, которые нужно определить. Из начальных условий известно, что функция $L_n(x)$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает значения $L_n(x_0) = y_0, L_n(x_1) = y_1, \ldots, L_n(x_n) = y_n$. Тогда в узле интерполяции x_0 интерполяционный многочлен $L_n(x)$ имеет вид

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n,$$

в узле интерполяции x_1 – вид

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n,$$

и т.д. Наконец, в точке x_n интерполяционный многочлен $L_n(x_n)$ имеет вид

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n.$$

Получили систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \ldots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_n x_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \ldots + a_n x_2^n = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \ldots + a_n x_n^n = y_n, \end{cases} \tag{1}$$

где x_i и $y_i\ (i = 0,1,\ldots,n)$ – табличные значения аргумента и функции.

Неизвестные $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ найдем по формулам Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \quad a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ – определитель системы (1). Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Действительно, определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, если $x_0, x_1, \ldots, x_n$ различны. Найдя коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, можно представить интерполяционный многочлен в виде

$$L_n(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} x + \frac{\Delta_2}{\Delta} x^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta} x^n.$$

Перепишем этот многочлен в другой форме:

$$L_n(x) = y_0 Q_0(x) + y_1 Q_1(x) + \ldots + y_n Q_n(x).$$

Функция $Q_i(x_j)$ представляет собой фундаментальный многочлен вида

$$Q_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}, \qquad (3)$$

причем

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{åñëè } i \neq j; \\ 1, & \text{åñëè } i = j. \end{cases}$$

Окончательно получим для формулы (2) выражение

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots$$

$$\ldots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}. \qquad (4)$$

Этот многочлен называется ***интерполяционным многочленом Лагранжа***. В сокращенном виде его можно записать так:

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \qquad (5)$$

Если в процессе вычисления многочлена Лагранжа нужно добавить одну точку разбиения отрезка, то придется производить все вычисления заново. Сам процесс получения приближенного значения функции по интерполяционной формуле Лагранжа связан с большими вычислениями. Возникает необходимость упрощения вычислительной работы.

Для удобства вычислений составим вспомогательную табл. 2.1.

Таблица 2.1

$x-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	$\dots$	x_0-x_n	k_0
x_1-x_0	$x-x_1$	x_1-x_2	$\dots$	x_1-x_n	k_1
x_2-x_0	x_2-x_1	$x-x_2$	$\dots$	x_2-x_n	k_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	$\dots$	$x-x_n$	k_n

В табл. 2.1 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – узлы интерполяции, а x – значение аргумента, для которого определяется значение по интерполяционной формуле Лагранжа. Обозначим произведение элементов первой строки через k_0:

$$k_0 = (x-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n). \tag{6}$$

В общем виде произведение элементов i-й строки имеет вид

$$k_i = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots$$

$$\dots(x_i-x_{i-1})(x-x_i)(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n). \tag{7}$$

Дополнительно вычислим произведение элементов, расположенных на главной диагонали:

$$\prod\nolimits_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n). \tag{8}$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа можно переписать в виде

$$L_n(x) = \prod\nolimits_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{k_i}. \tag{9}$$

Интерполяционная формула Лагранжа заметно упрощается, если узлы интерполяции *равноотстоящие*. Шаг интерполяции определяется по формуле $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$. Введем обозначение $q = \dfrac{x-x_0}{h}$, тогда

$$
\begin{gathered}
x - x_0 = qh, \\
x - x_1 = qh - h = h(q-1), \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
x - x_i = qh - ih = h(q-i), \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
x - x_n = qh - nh = h(q-n).
\end{gathered}
$$

После подстановки этих формул в формулу (3), получим

$$
Q_i(q) = \frac{q(q-1)\ldots[q-(i-1)][q-(i+1)]\ldots(q-n)h^n}{ih(i-1)h\ldots h(-h)\ldots[-(n-i)h]}. \tag{10}
$$

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства (10) на $(-1)^{n-i}(q-i)$, получим

$$
Q_i = (-1)^{n-1}\frac{C_n^i}{q-i}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!}, \tag{11}
$$

где $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов интерполяции можно записать в виде

$$
L_n(x) = L_n(x_0 + qh) = \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-1}\frac{C_n^i}{q-i}y_i. \tag{12}
$$

2.3. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Чтобы оценить степень приближения интерполяционного многочлена Лагранжа в точках, отличных от узлов интерполяции, надо сделать дополнительные предположения о поведении функции $f(x)$, заданной таблично. Будем считать, что функция $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[a,b]$.

Представим погрешность в виде функции

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \qquad (1)$$

и введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = R_n(x) - k\prod_{n+1}(x), \qquad (2)$$

где

$$\prod_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

есть многочлен, обращающийся в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Функция $\varphi(x)$ имеет $n+1$ корней, т.е. $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n) = 0$, так как в узлах интерполяции $R_n(x_i) = 0 \quad (i = 0,1,\ldots,n)$ и один из сомножителей функции $\prod_{n+1}(x)$ равен нулю.

Подберем коэффициент k таким образом, чтобы функция $\varphi(x)$ имела еще один корень в любой фиксированной точке $\bar{x}$ отрезка $[a,b]$, но отличной от узлов интерполяции $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При этом $\prod_{n+1}(\bar{x}) \neq 0$, поскольку точка $\bar{x}$ отлична от узлов интерполяции. Точка $\bar{x}$ выбрана таким образом, чтобы $\varphi(\bar{x}) = 0$, т.е.

$$R_n(x) - k(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n) = 0;$$

тогда получим

$$k = \frac{R_n(\bar{x})}{\prod_{n+1}(\bar{x})} = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n)}. \qquad (3)$$

Определим численное значение коэффициента k. Для этого функцию $\varphi(x)$ продифференцируем $n+1$ раз. Так как $\varphi(x)$ обращается в нуль на $[a,b]$ в $n+2$ точках: $\bar{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$, то на основании теоремы Ролля производная от $\varphi(x)$ обращается в нуль по крайней мере $n+1$ раз на интервале (a,b). Применим снова теорему Ролля к функции $\varphi'(x)$. Вторая производная $\varphi''(x)$ обращается в нуль не менее n раз на интервале (a,b). Продолжая этот процесс, придем к выводу, что производная $(n+1)$-го порядка функции $\varphi(x)$ имеет хотя бы один корень, т.е. $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Из соотношений (1) и (2) следует

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - k\prod_{n+1}(x).$$

Вычислим $(n+1)$-е производные для каждого слагаемого вспомогательной функции $\varphi(x)$. Тогда с учетом теоремы Ролля получим

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0.$$

Откуда

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) получим следующее равенство:

$$\frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Точки ξ и $\bar{x}$ принадлежат отрезку $[a,b]$, а $\bar{x}$ выбрано произвольно, в этом случае можно записать

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Полагая, что $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, получаем *оценку погрешности для интерполяционного многочлена Лагранжа:*

$$\left|R_n(x)\right| = \left|f(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\right|. \tag{5}$$

2.4. Конечные разности

Табулирование функций в большинстве случаев производится для равноотстоящих значений аргумента, т.е. $x_i = x_0 + ih$, где $i = 0,1,2,\dots,n$, а $h = \text{const}$ – шаг интерполяции.

Для вывода интерполяционных формул для равноотстоящих узлов интерполяции введем понятие ***конечной разности***.

Назовем *конечной разностью первого порядка* разность между значениями функции в соседних узлах интерполяции. Тогда конечные разности в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ определяются соответственно:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f(x_1),$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_3) - f(x_2) = \Delta f(x_2),$$

. . . .

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1}) = \Delta f(x_{n-1}).$$

В общем виде первая конечная разность запишется так:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i. \quad (1)$$

Из конечных разностей первого порядка можно образовать *конечные разности второго порядка:*

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i.$$

В общем виде *конечная разность* n*-го порядка* имеет вид

$$\Delta^n y = \Delta\left(\Delta^{n-1} y\right). \quad (2)$$

Запись конечных разностей удобно вести в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	Δy_4				
$x_5 = x_0 + 5h$	y_5					

Конечные разности обладают следующими свойствами:

1. *Конечная разность* $\Delta^n u$ *суммы или разности функций* $u = \varphi \pm g$ *есть сумма или разность конечных разностей функций*:

$$\Delta^n u_i = \Delta^n(\varphi_i \pm g_i) = \Delta^n \varphi_i \pm \Delta^n g_i.$$

2. *При умножении функции на постоянный множитель конечные разности умножаются на тот же множитель.*

3. *Конечная разность* m*-го порядка от конечной разности* n*-го порядка равна конечной разности* $(m+n)$*-го порядка*:

$$\Delta^m\left(\Delta^n y\right) = \Delta^{m+n} y.$$

4. *Конечные разности* n*-го порядка от многочлена степени* n *постоянны, а конечные разности* $(n+1)$*-го порядка равны нулю.*

Следует заметить, что на конечных разностях более высокого порядков заметно сказываются ошибки округления.

2.5. Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Вычисление значений функции для значений аргумента, лежащих в начале таблицы, удобно проводить, пользуясь первой интерполяционной формулой Ньютона.

Пусть функция $f(x)$ задана значениями

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

в равноотстоящих узлах интерполяции $x_0,\ x_1 = x_0 + h, \ldots,\ x_n = x_0 + nh.$

Требуется построить интерполяционный многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \ldots, P_n(x_n) = y_n.$$

В силу единственности многочлена степени n, построенного по $n+1$ значениям функции $f(x)$, многочлен $P_n(x)$ является разновидностью записи интерполяционного многочлена и в конечном счете совпадает с многочленом, полученным по формуле Лагранжа.

Будем искать многочлен в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \quad (1)$$

В этом выражении нам неизвестны коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Для того чтобы найти a_0, положим $x = x_0$. Тогда все слагаемые, кроме первого, в формуле (1) обратятся в нуль. Получим: $P_n(x_0) = a_0$. С другой стороны, из условия задачи известно, что $P_n(x_0) = y_0$. Следовательно, $a_0 = y_0$.

Чтобы найти коэффициент a_1, составим первую конечную разность для многочлена $P_n(x)$ в точке x. Согласно определению конечной разности имеем

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x).$$

Вычислим первую конечную разность многочлена $P_n(x)$ в точке x_0. Все члены, кроме первого, обратятся в нуль, следовательно, $\Delta P_n(x_0) = a_1 h$, но

$$\Delta P_n(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$

откуда $\Delta y_0 = a_1 h$ и

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Чтобы определить коэффициент a_2, составим конечную разность второго порядка:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_n(x+h) - \Delta P_n(x).$$

После преобразований получим

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!h^2 a_2 + 2 \cdot 3 \cdot h^2 a_3 (x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + (n-1) n h^2 a_n (x - x_0) \ldots (x - x_{n-3}).$$

Полагаем $x = x_0$; тогда все члены, кроме первого, обратятся в нуль и $\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2!h^2 a_2$. Отсюда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Вычисляя конечные разности более высоких порядков и полагая $x = x_0$, придем к общей формуле для получения коэффициентов:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Подставив найденные значения коэффициентов a_i в выражение (1), получим *первую интерполяционную формулу Ньютона*

$$\text{Đ}_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}). \qquad (2)$$

На практике часто используют формулу Ньютона в другом виде. Введем переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$, где h – шаг интерполяции, а q – число шагов. Тогда первая интерполяционная формула Ньютона примет следующий вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (3)$$

Формулу (3) удобно использовать для интерполирования в начале отрезка $[a,b]$, где q мало по абсолютной величине.

Если за число узлов интерполяции принять $n=1$, то получим формулу *линейного интерполирования*

$$P(x)=y+q\Delta y_0.$$

При $n=2$ получим формулу *параболического*, или *квадратичного, интерполирования*

$$P_2(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

Результаты вычислений удобно представить в виде табл. 2.2.

Вторая интерполяционная формула Ньютона получается в результате сходных рассуждений, но в качестве опорной точки нужно взять точку x_n. Она дает более точное приближение на конце интервала. *Вторая интерполяционная формула Ньютона* имеет вид

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+$$
$$+\frac{\Delta^3 y_{n-2}}{3!h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)\ldots(x-x_1). \qquad (4)$$

На практике используют формулу Ньютона в другом виде:

$$P_n(x)=y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (5)$$

где $q=\dfrac{x-x_n}{h}$.

2.6. Оценки погрешностей интерполяционных формул Ньютона

В разд. 2.3 была получена формула (5) для оценки погрешности интерполяционной формулы Лагранжа:

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|.$$

Если узлы интерполяции равноотстоящие, то введя шаг $h = x_{i+1} - x_i \ (i = 0,1,2,\ldots,n-1)$ и полагая $q = \dfrac{x - x_0}{h}$, получим *оценку погрешности для первой интерполяционной формулы Ньютона:*

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{1}$$

где точка ξ принадлежит отрезку интерполяции $[x_0, x_n]$. В случае экстраполяции точка ξ находится за пределами отрезка $[x_0, x_n]$.

Аналогичным образом для *второй интерполяционной формулы Ньютона* с равноотстоящими узлами интерполяции получим *оценку погрешности* в следующем виде:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \tag{2}$$

где точка ξ принадлежит отрезку интерполяции $[x_0, x_n]$.

В практических расчетах аналитический вид функции не всегда известен. Тогда для оценки точности составляют таблицу конечных разностей, и останавливаются на тех, которые можно считать постоянными в пределах заданной точности.

Воспользовавшись предельным переходом

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}},$$

приближенно считаем,

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}.$$

Тогда погрешность для первой интерполяционной формулы Ньютона равна

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0, \tag{1*}$$

для второй интерполяционной формулы Ньютона равна

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_n. \tag{2*}$$

Задание

1. Провести равномерное разбиение отрезка интерполяции.
2. Построить многочлен Лагранжа и вычислить значения функции в двух указанных точках.
3. Оценить погрешность интерполяции многочленом Лагранжа.
4. Вычислить конечные разности.
5. Построить первый и второй интерполяционный многочлены Ньютона и вычислить значения функции в двух указанных точках.
6. Оценить погрешность интерполяции методами Ньютона.
7. Провести сравнительный анализ двух методов интерполяции и отразить его в выводах.

Лабораторная работа № 3
Численное дифференцирование

3.1. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона

При решении задач часто приходится вычислять производную, однако во многих практических задачах функции задаются таблично и методы дифференциального исчисления к исследованию таких функций применить нельзя. В этом случае прибегают к численному дифференцированию.

Задача численного дифференцирования ставится следующим образом. Пусть функция $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ задана таблично своими $n+1$ значениями. Требуется найти приближенное значение производной.

В качестве аппроксимирующей функции выберем интерполяционный многочлен с равноотстоящими узлами. В этом случае функция заменяется интерполяционным многочленом Ньютона:

$$f(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots, \tag{1}$$

где шаг $h = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$, а $q = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$f(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots \tag{1*}$$

Заметим, что

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{df(x)}{dq}. \tag{2}$$

Продифференцировав равенство (1*) и воспользовавшись зависимостью (2), получим

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$

$$\left. + \Delta y_0 + + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots \right]. \qquad (3)$$

Учитывая, что $x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_0 + nh,$

$$f''(x) = \frac{d\left(f'(x)\right)}{dx} = \frac{d\left(f'(x)\right)}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h^2}\frac{d^2 f(x)}{dq^2},$$

получим приближенное значение второй производной

$$f''(x) \approx$$

$$\approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots \right]. \qquad (4)$$

Таким же образом можно определить и следующие производные функции.

Формулы приближенного дифференцирования для определения производных в узлах интерполяции значительно упрощаются, поскольку в узлах интерполяции $q = 0$. Получим

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \ldots \right) \qquad (5)$$

и

$$f''(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots \right). \qquad (6)$$

Погрешность в определении производной приближенно оценивается так:

$$R'_k(x_0) \approx h^{k+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi), \qquad (7)$$

где точка $\xi \in [a,b]$, но отлична от узлов интерполирования.

3.2. Формула приближенного дифференцирования, основанная на интерполяционной формуле Лагранжа

Пусть $f(x)$ – функция, заданная на отрезке $[a,b]$ таблично своими значениями $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ в равноотстоящих узлах интерполяции. Построим для данной системы узлов интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!} \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} y_i, \qquad (1)$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ – шаг интерполяции.

Поскольку $\dfrac{dx}{dq} = h$, то из формулы (1) находим

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{i(n-i)!} \frac{d}{dq} \left[\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} \right]. \qquad (2)$$

Погрешность, допускаемая при нахождении производной, есть

$$R_n'(x) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{n+i!} y^{(n+1)}(\xi), \qquad (3)$$

где ξ – точка отрезка $[a,b]$, отличная от узлов интерполяции.

Формулы численного дифференцирования являются менее точными по сравнению с интерполяционными формулами, однако они удобны для проведения практических расчетов.

Задание

1. Использовать результаты лабораторной работы № 2 для вычисления первой и второй производных по формулам приближенного дифференцирования, основанным на интерполяционных формулах Ньютона. Вычислить погрешности.
2. Использовать результаты лабораторной работы № 2 для вычисления первой и второй производных по формулам приближенного дифференцирования согласно интерполяционной формуле Лагранжа.
3. Провести сравнительный анализ вычислений производных двумя различными методами и отразить его в выводах.

Лабораторная работа № 4
Численное интегрирование

4.1. Простейшие квадратурные формулы

Из курса математического анализа известно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл от этой функции и пределах от a до b существует и имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Для большинства функций первообразную нельзя выразить через элементарные функции. Кроме того, при практических расчетах подынтегральная функция задается в виде таблиц. Все это приводит к необходимости разрабатывать методы численного интегрирования.

Задача численного интегрирования состоит в нахождении определенного интеграла на отрезке $[a,b]$, если подынтегральная функция задана таблично.

Формулы приближенного интегрирования называются *квадратурными формулами.* Рассмотрим простейшие из них.

Метод прямоугольников. Наиболее простым методом приближенного вычисления интеграла является метод прямоугольников, основанный на непосредственном определении интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ есть интегральная сумма, соответствующая некоторому разбиению отрезка $[a,b]$ и некоторому выбору точек $\xi_0, \xi_1, \ldots,$ ξ_{n-1} на отрезках разбиения.

Вычисление определенного интеграла геометрически сводится к вычислению площади криволинейной трапеции, ограниченной функцией $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 4.1). Вычислим приближенное значение интеграла. Заменим криволинейную трапецию *DEba* прямоугольником *ABba*, проведя *AB* так, чтобы фигуры *DAC* и *CEB* получились примерно равной площади. Тогда площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, и полученного прямоугольника *ABba* будут примерно равны.

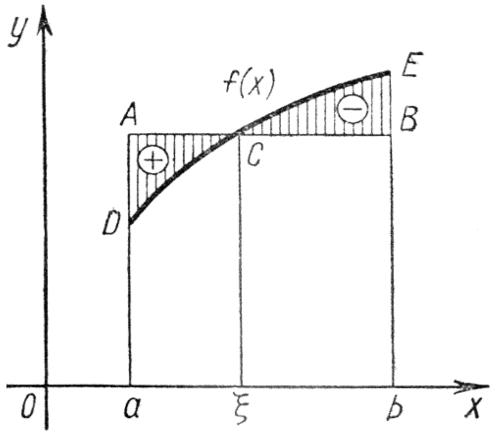


Рис. 4.1

Учитывая, что высота прямоугольника *ABba* есть значение функции в точке ξ, запишем следующее приближенное равенство:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f(\xi).$$

Для увеличения точности численного интегрирования можно отрезок $[a,b]$ разбить на несколько частей и для каждой из них вычислить приближенное значение площади криволинейной трапеции, основанием которой является отрезок $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$, а высотой – число $f(\xi_i)$, т.е. значение функции в точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, выбранное из условия минимума ошибки интегрирования.

Тогда за приближенное значение интеграла на отрезке $[a,b]$ принимают интегральную сумму:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Удобно делить отрезок на равные части, а точки ξ_i $(i = 0,1,$ $2,\ldots,n-1$ совмещать с левыми $[f(\xi_i) = f(x_i)]$ или правыми $[f(\xi_i) =$ $= f(x_{i+1})]$ концами отрезков разбиения. Если точку ξ_i совместить с левым концом отрезка Δx_i, то приближенное значение интеграла геометрически равно площади заштрихованной ступенчатой фигуры (рис. 4.2) и может быть представлено *формулой левых прямоугольников:*

$$I_{ё} = \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \qquad (1)$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – шаг.

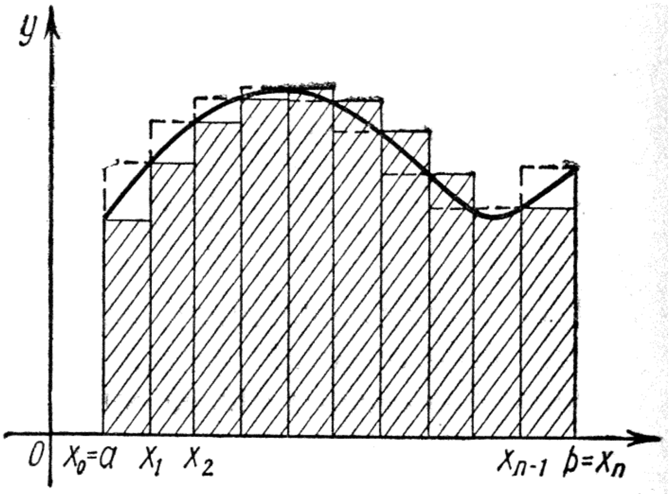


Рис. 4.2

Если в качестве точки ξ_i выбрать правый конец отрезка Δx_i, то приближенное значение интеграла графически равно площади ступенчатой фигуры, ограниченной сверху пунктирной линией, и вычисляется по *формуле правых прямоугольников:*

$$I_{ї} = \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right) = h\sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (2)$$

Метод трапеций. Приближенное значение определенного интеграла можно вычислить другим способом. Заменим на отрезке $[a,b]$ дугу *AB* графика подынтегральной функции $y = f(x)$ стягивающей ее хордой (рис. 4.3) и вычислим площадь трапеции *Abba*. Примем значение определенного интеграла численно равным площади этой трапеции:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (3)$$

Получили *формулу трапеций* для приближенного вычисления интеграла.

Погрешность вычисления

$$R = \int\limits_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right)$$

для формулы трапеций оценивается так:

$$R = -\frac{h}{12} y''(\xi), \tag{4}$$

где точка $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

В случае, если $y''(\xi) > 0$, вычисление по формуле (3) дает значение интеграла *с избытком*; если $y''(\xi) < 0$, то интеграл вычисляется *с недостатком*.

Точность вычислений возрастает, если отрезок $[a,b]$ разделить на несколько частей и применить формулу трапеций к каждому отрезку Δx_i (рис. 4.4). Тогда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x_i.$$

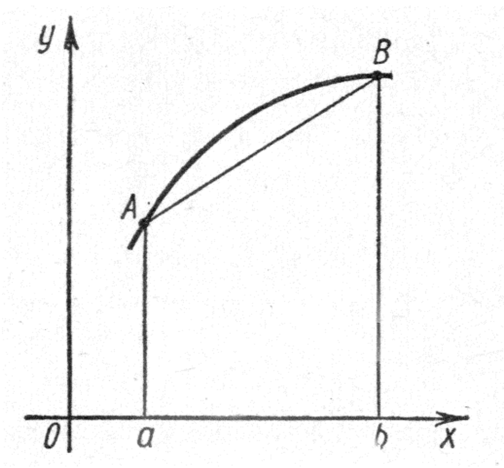


Рис. 4.3

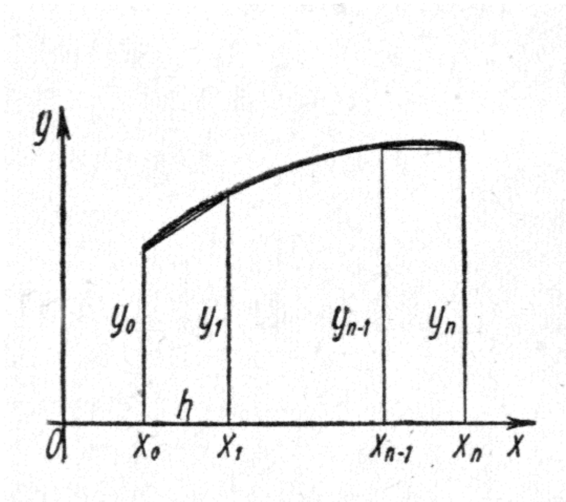


Рис. 4.4

Для простоты вычислений удобно делить отрезок $[a,b]$ на равные части, в этом случае длина каждого из отрезков разбиения $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Численное значение интеграла на отрезке Δx_i равно

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},$$

а на всем отрезке $[a,b]$ соответственно

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}.$$

Поскольку под знаком суммы величины y_i встречаются дважды, то последнее равенство можно записать следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)= \\ =\frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1} y_i+\frac{y_0+y_n}{2}\right]. \tag{5}$$

Эта формула называется ***общей формулой трапеций***. Общую формулу трапеций можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\right), \tag{6}$$

где шаг

$$h=\frac{b-a}{n}. \tag{7}$$

Метод парабол (**метод Симпсона**). Точность приближенного интегрирования возрастает, если подынтегральную функцию $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ заменить квадратичной функцией (рис. 4.5), принимающей в узлах $x_0=a, x_1, x_2=b$ значения $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$.

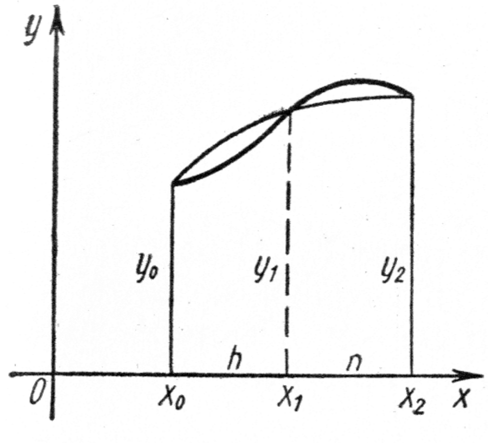


Рис. 4.5

В качестве интерполяционного многочлена воспользуемся многочленом Ньютона

$$P_2(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}\left(x-x_o\right)+\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right).$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\frac{8h^3}{3} -$$

$$-\frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \bullet h\frac{4h^2}{2} = 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right). \quad (8)$$

Соотношение (8) называется ***формулой Симпсона***. Формула Симпсона обладает повышенной точностью и является точной не только для многочленов второй степени, но и третьей.

Погрешность формулы Симпсона

$$R = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx - \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

оценивается следующим образом:

$$R = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi), \quad (9)$$

где точка $\xi \in \left[x_0, x_0 + 2h\right]$.

Для увеличения точности вычислений отрезок $\left[a,b\right]$ разбивают на n пар участков $\left[x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}\right]$ (рис. 4.6) и заменяют подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Ньютона второй степени, получают приближенное значение интеграла на каждом участке длины $2h$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right),$$

. . . .

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right).$$

Численное значение определенного интеграла на отрезке $\left[a,b\right]$ будет равно сумме интегралов, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_{2n}\right) + 4\left(y_1 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + \ldots + y_{2n-2}\right)\right]. \quad (10)$$

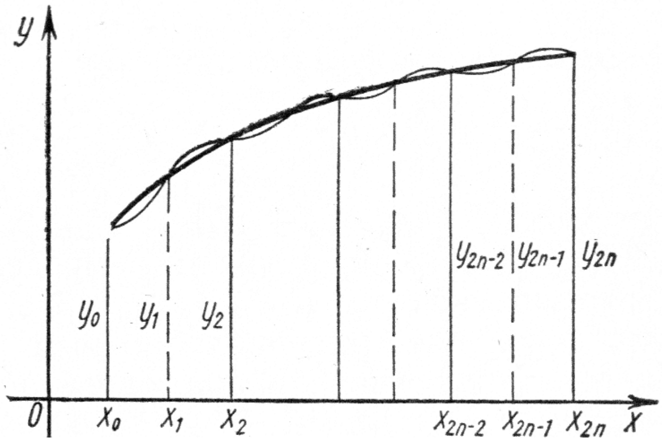


Рис. 4.6

Соотношение (10) называется ***общей формулой Симпсона***. Ее можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[\left(y_0+y_{2n}\right)+4\left(y_1+\ldots+y_{2n-1}\right)+2\left(y_2+\ldots+y_{2n-2}\right)\right], \quad (11)$$

где

$$h=\frac{b-a}{2n}. \quad (12)$$

4.2. Обобщенная формула численного интегрирования Ньютона – Котеса

Пусть некоторая функция $f(x)$ задана в узлах интерполяции $x_i = x_0 + ih\ (i=1,2,\ldots,n)$ на отрезке $[a,b]$ таблицей своих значений:

$x_0=a$	x_1	x_2	$\ldots$	$x_n=b$
$y_0=f(x_0)$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	$\ldots$	$y_n=f(x_n)$

Требуется найти значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

По заданным значениям подынтегральной функции построим интерполяционный многочлен Лагранжа. Для равноотстоящих узлов интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-1}y_i, \quad (1)$$

где $q=\dfrac{x-x_0}{h}$ – шаг интерполяции.

Заменим подынтегральную функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом Лагранжа, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_n}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)n-1}{i!(n-i)!}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}y_i\right]dx. \qquad (2)$$

Поменяем местами знак суммирования и интеграл и вынесем за знак интеграла постоянные коэффициенты:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-i)!}\int_{x_0}^{x_n}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}dx.$$

Поскольку $dq=\dfrac{dx}{h}$ и $h=\dfrac{b-a}{n}$, то, заменив пределы интегрирования, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n} y_i\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{1}{n}\int_0^n q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n)dq. \qquad (3)$$

Положим

$$H_i=\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{1}{n}\int_0^n q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n)\,dq, \qquad (4)$$

где $i=0,1,2,\ldots,n$.

Числа H_i называются *коэффициентами Ньютона – Котеса.* Они не зависят от вида функции $f(x)$ и являются функцией только n (количества узлов интерполирования). Коэффициенты Ньютона – Котеса можно вычислить заранее для различного числа узлов интерполирования и свести в табл. 4.1.

Окончательный вид формулы Ньютон – Котеса:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} y_iH_i. \qquad (5)$$

Рассмотрим частные случаи формулы Ньютона – Котеса. Если в формуле (5) положить $n=1$, то получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)(y_0H_0+y_1H_1),$$

где

$$H_0 = -\int_0^1 (q-1)\,dq = \frac{1}{2}; \quad H_1 = \int_0^1 q\,dq = \frac{1}{2}.$$

Таблица 4.1

$n=1$	$H_0 = H_1 = \frac{1}{2}$
$n=2$	$H_0 = H_2 = \frac{1}{6}, H_1 = \frac{2}{3}$
$n=3$	$H_0 = H_3 = \frac{1}{8}, H_1 = H_2 = \frac{3}{8}$
$n=4$	$H_0 = H_4 = \frac{7}{90}, H_1 = H_3 = \frac{16}{45}, H_2 = \frac{2}{15}$
$n=5$	$H_0 = H_5 = \frac{19}{288}, H_1 = H_4 = \frac{25}{96}, H_2 = H_3 = \frac{25}{144}$
$n=6$	$H_0 = H_6 = \frac{41}{840}, H_1 = H_5 = \frac{9}{35}, H_2 = H_4 = \frac{9}{280}, H_3 = \frac{34}{105}$
$n=7$	$H_0 = H_7 = \frac{751}{17280}, H_1 = H_6 = \frac{3577}{17280}, H_2 = H_5 = \frac{1323}{17280}, H_3 = H_4 = \frac{2989}{17280}$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(y_0 + y_1),$$

но поскольку при $n=1$ отрезок $b-a=h$, окончательно имеем

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

Получили формулу трапеций как частный случай формулы Ньютона – Котеса.

Положим теперь в формуле (5) $n=2$ и найдем коэффициенты Ньютона – Котеса:

$$H_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)\,dq = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)\,dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)\,dq = \frac{1}{6}.$$

Так как $b-a=2h$, то отсюда следует, что

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right).$$

Получили формулу Симпсона как частный случай формулы Ньютона – Котеса.

Если в выражении (5) положить $n=3$, то получим следующую формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(y_0+3y_1+3y_2+y_3\right), \tag{6}$$

которая называется ***правилом трех восьмых***. Ее погрешность оценивается соотношением

$$R=-\frac{3h^5}{80}y^{(4)}(\xi), \tag{7}$$

где точка $\xi\in[a,b]$.

4.3. Квадратурная формула Чебышева

П. Л. Чебышев предложил для вычисления определенных интегралов воспользоваться формулой

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} c_i f\left(x_i\right), \tag{1}$$

в которой квадратурные коэффициенты $c_i\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ фиксированы, а абсциссы $x_i\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ нужно определить.

Для упрощения вычислений выберем $c_1=c_2=\ldots=c_n$ и будем интегрировать на отрезке $[-1,1]$. Тогда формула (1) примет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\tilde{n}_n\left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right]. \tag{2}$$

Коэффициент и узлы определим из условия, что это равенство является точным для случая, когда $f(x)$ – многочлен вида

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n. \tag{3}$$

Подставим этот многочлен в левую часть равенства (2) и проинтегрируем. В результате получим

$$\int_{-1}^{1}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n\right)dx=2\left(a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\ldots\right).$$

В правую часть равенства (2) подставим значения многочлена (3) в узлах $x_i\left(i=1,2,\ldots,n\right)$:

$$\begin{aligned}
f(x_1)&=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n,\\
f(x_2)&=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\ldots+a_nx_2^n,\\
f(x_3)&=a_0+a_1x_3+a_2x_3^2+\ldots+a_nx_n^n,\\
&\ldots\\
f(x_n)&=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n.
\end{aligned}$$

Тогда равенство (2) примет вид

$$\begin{aligned}
2\left(a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\ldots\right)&=2c_n\left[na_0+a_1\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)+\right.\\
&+a_2\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+a_3\left(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\right)+\ldots\\
&\left.\ldots+a_n\left(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n\right)\right]. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Полученное равенство должно выполняться при любых значениях $a_0,a_1,\ldots,a_n$. Поэтому из сравнения коэффициентов a_i в правой и левой частях соотношения (4) находим, что $nc_n=1$, откуда

$$c_n=\frac{1}{n}, \qquad (5)$$

и, кроме того,

$$\left\{\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+\ldots x_n=0,\\
&x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2=\frac{n}{3},\\
&x_1^3+x_2^3+x_3^3+\ldots+x_n^3=0,\\
&x_1^4+x_2^4+x_3^4+\ldots+x_n^4=\frac{n}{5},\\
&\ldots\\
&x_1^n+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n=\frac{n\left[1-(-1)^{n+1}\right]}{2(n+1)}.
\end{aligned}\right. \qquad (6)$$

Подставляя найденное выражение c_n в формулу (2), получим *формулу Чебышева:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots f(x_n)], \tag{7}$$

где точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяются из системы уравнений (6).

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для различных n вычисляются заранее и сводятся в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Число ординат	Значения абсцисс
$n=2$	$-x_1 = x_2 = 0,577350$
$n=3$	$-x_1 = x_3 = 0,707107;\ x_2 = 0$
$n=4$	$-x_1 = x_4 = 0,794654;\ -x_2 = x_3 = 0,187592$
$n=5$	$-x_1 = x_5 = 0,832498; -x_2 = x_4 = 0,374541; x_3 = 0$
$n=6$	$-x_1 = x_6 = 0,866247; -x_2 = x_5 = 0,422519; -x_3 = x_4 = 0,266635$
$n=7$	$-x_1 = x_7 = 0,883862; -x_2 = x_6 = 0,592657; -x_3 = x_5 = 0,323912; x_4 = 0$

В случае произвольного интервала интегрирования формула Чебышева имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[f(z_1)+f(z_2)+\ldots+f(z_n)], \tag{8}$$

где

$$z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{9}$$

Узлы x_i имеют указанные в табл. 4.2 значения.

Задание 1

Вычислить интегралы по квадратурным формулам и оценить погрешности приближенного интегрирования. Вычислить, для каких функций квадратурная формула метода трапеций является точной. Сравнить вычислительные погрешности квадратурных формул прямоугольников и трапеций.

Задание 2

1. Составить программу вычисления по формуле Котеса при $n=1$ (по «формуле трапеций»). Вычислить интегралы; определить погрешности R. Увеличить число узлов разбиения в $k=3$ раз, снова вы-

числить интегралы и погрешности. Показать, что точность вычислений при увеличении числа узлов разбиения увеличивается в k^3 раз. Эту операцию провести для двух видов подынтегральных функций, одна из которых гладкая функция.

2. Вычислить интегралы по формуле Симпсона; определить погрешности. Увеличить точность вычислений, изменив число n (n – четное число).

3. Вычислить интегралы по «правилу трех восьмых»; определить погрешности. Увеличить точность, изменив число n (n – кратное 3).

4. Вычислить интегралы по формулам Симпсона и «правилу трех восьмых» при числе узлов, кратном 6; определить погрешности и сравнить их.

Задание 3

Вычислить определенный интеграл по квадратурной формуле Чебышева при $n = 5, 6, 7$. Вычислить погрешность и построить график изменения при увеличении n.

Список литературы

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 2006. – 599 с.
2. Вержбицкий, В. М. Численные методы / В. М. Вержбицкий. – М. : Высш. шк., 2001. – 382 с.
3. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
4. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин – М. : Наука, 1978. – 512 с.
5. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов – М. : ГИФМЛ, 1959. – 327 с.
6. Крылов, В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – Т. 1. – 303 с.
7. Крылов, В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М. : Наука. 1976. – Т. 2. – 279 с.
8. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 255 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пример оформления лабораторных работ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
на тему «РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ХОРД»
по дисциплине
«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»
Вариант № 26

Выполнил: студент гр. 13ВА1
Иванов И. И.
Проверил: к.ф.-м.н., доцент
Добрынина Н. Ф.

Пенза 2013

Задание

Используя метод хорд, найти решение нелинейного уравнения $\sin(x^2) - \ln(x-1) = 0$.

Структура и алгоритм решения

1. Разбить члены уравнения на две группы, одну из которых записать в левой части уравнения, а другую – в правой части. Представить уравнение в виде $\varphi(x) = g(x)$. Построить графики двух функций, найти примерно абсциссы точек пересечения этих графиков.

2. Определить примерно каждый корень уравнения (если их несколько). Для этого нужно определить интервалы, на концах которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

3. Вычислить корни методом хорд.

4. Сделать сравнительный анализ вычислений и отразить его в выводах.

Ход работы

Разобьем члены уравнения $f(x) = \sin(x^2) - \ln(x-1) = 0$ на две группы, одну из которых запишем в левой части уравнения, а другую – в правой части. Получим уравнение в виде $\varphi(x) = g(x)$, где $\varphi(x) = \sin(x^2)$, $g(x) = \ln(x-1)$. Графики данных функций, построенные в среде MathCad, приведены на рис. П.1, из которого видно, что исходное уравнение имеет три корня в интервалах (1,5; 2), (2,3; 2,7) и (2,8; 3,1).

Метод хорд. Идея метода хорд состоит в том, что на достаточно малом промежутке $[\grave{a}, b]$ дуга кривой $y = f(x)$ заменяется стягивающей ее хордой. В качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью Ox.

В нашем случае производные ($f'(x), f''(x)$ внутри $[\grave{a}, b]$) могут иметь одинаковые или разные знаки, поэтому итерационный процесс будем осуществлять по формулам

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$$

соответственно.

$$f(x) := \sin\left(x^2\right) - \ln(x - 1)$$

$$\phi(x) := \sin\left(x^2\right) \qquad\qquad g(x) := \ln(x - 1)$$

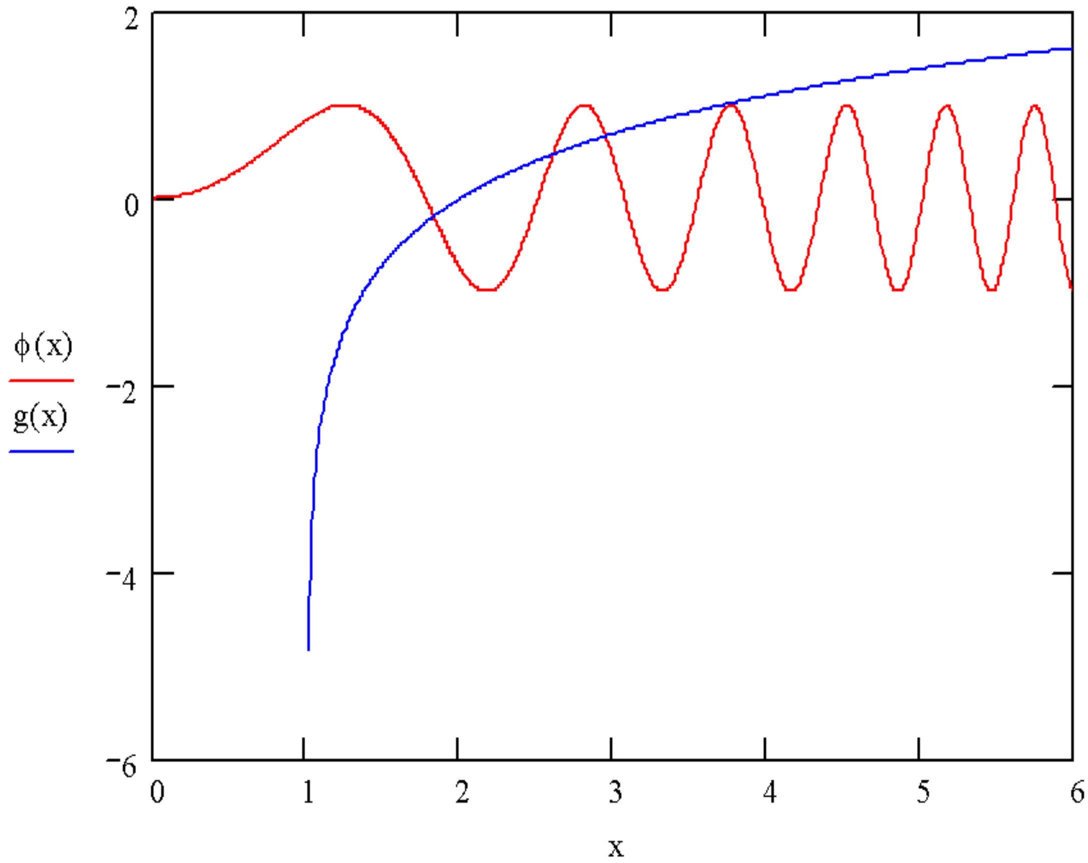


Рис. П.1

Метод удобнее реализовать в виде функции, имеющей несколько входных параметров: *f* – функция; *a* и *b* – левая и правая границы интервала; *eps* – точность.

Блок-схема метода представлена на рис. П.2.

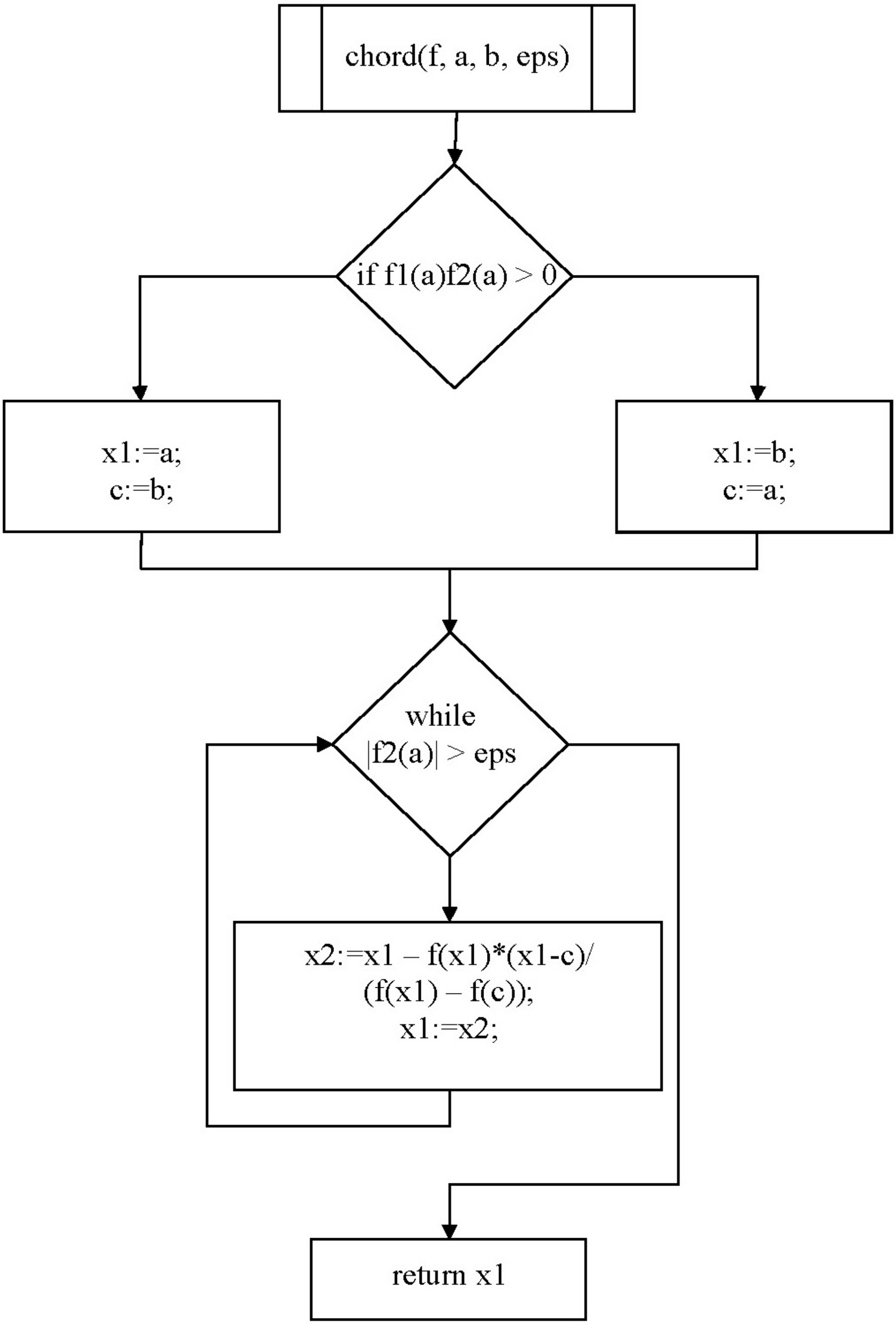


Рис. П.2

Листинг и результаты метода хорд в среде MathCad приведены на рис. П.3. Вызов функции нахождения корней осуществляется для каждого из интервалов (1,5; 2), (2,3; 2,7) и (2,8; 3,1). Для проверки правильности реализации метода найденные решения подставляем в функцию $f(x)$ (должно получаться $f(x) = 0$).

$a := 1.5 \qquad b := 2 \qquad eps := 10^{-6}$

$$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \qquad\qquad f2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

```
chord(f,a,b,eps) := | if f1(a)·f2(a) > 0
                    |   | x1 ← b
                    |   | c ← a
                    | otherwise
                    |   | x1 ← a
                    |   | c ← b
                    | while |f(x1)| > eps
                    |   | x2 ← x1 − f(x1)·(x1 − c) / (f(x1) − f(c))
                    |   | x1 ← x2
                    | x1
```

		Корни	Проверка
Первый корень	X_1 := chord(f,1.5,2,eps)	X_1 = 1.8259307	$f(X\_1) = -2.976 \times 10^{-7}$
Второй корень	X_2 := chord(f,2.3,2.7,eps)	X_2 = 2.6027765	$f(X\_2) = -1.79 \times 10^{-7}$
Третий корень	X_3 := chord(f,2.8,3.1,eps)	X_3 = 2.9486323	$f(X\_3) = -8.685 \times 10^{-7}$

Рис. П.3

Выводы

В ходе работы был реализован метод хорд для решения нелинейных уравнений. Алгоритм и его реализация были протестированы на модельном примере, в результате работы были найдены все корни уравнения. Метод позволяет находить решение с любой наперед заданной точностью, что подтверждается результатами проверки (нахождением невязки).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Варианты заданий к лабораторной работе № 1

Решить следующие уравнения, вычислив действительные корни с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

1) $x - \sin x = 0,25$; $\quad \mathrm{tg} x - x = 0$.

2) $x^2 - 2\sin x = 0$; $\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}x - x - 3 = 0$.

3) $x^2 - \sin 5x = 0$; $\quad 3x - \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}x = 0$.

4) $1,2 - \ln x = 4\cos 2x$; $\quad 1,8x^2 - \sin 10x = 0$.

5) $x^2 - \sin \pi x = 0$; $\quad \ln(x + 6,1) = 2\sin(x - 1,4)$.

6) $x - 0,21\sin(0,5 + x) = 0$; $\quad 9,9x^2 - \ln(x + 6) = 0$.

7) $x^2 + 4\sin x = 0$; $\quad 2\lg x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$.

8) $\sin(0,5 + x) = 2x - 0,5$; $\quad -2x^2 + x^4 - 1 + \ln x = 0$.

9) $2\sin(x - 0,6) = 1,5 - x$; $\quad 2x - \lg x - 7 = 0$.

10) $\sin x = x^2 - 2x + 1$; $\quad \lg(1 + 2x) = 2 - x$.

11) $x^2 - \cos \pi x = 0$; $\quad e^x + x^2 - 2 = 0$.

12) $x - 3\cos^2(1,04x) = 0$; $\quad e^x - 2(x - 1)^2 = 0$.

13) $3x - \cos x + 1 = 0$; $\quad 1 + x - e^{0,75x} = 0$.

14) $(2 - x)^2 = e^x$; $\quad 1,2 - \ln x = 4\cos 2x$.

15) $x - 10\sin x = 0$; $\quad e^{-x} = 5 - x^2$.

16) $x^2 - e^x = 0$; $\quad 2\lg(x + 7) - 5\sin x = 0$.

17) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$; $\quad 3\sin 8x = 0,7x - 0,9$.

18) $5\sin 2x = \sqrt{1 - x}$; $\quad \ln\dfrac{1 + x}{1 - x} - \cos x^2 = 0$.

19) $\dfrac{1}{3+2\cos x}-x^3=0;\quad 10\cos x-0{,}1x^2=0.$

20) $\sqrt{4x+7}=3\cos x;\quad 1+x-e^{0{,}75x}=0.$

21) $2{,}2x+2^x=0;\quad x+\lg x+\ln\dfrac{x}{10}=11{,}1.$

22) $2^x-2\cos x=0;\quad x+0{,}323+0{,}5e^x=0.$

23) $\lg x+\sqrt[3]{x}=1{,}56;\quad xe^x=4{,}28.$

24) $x-\sqrt[3]{x}=0{,}109;\quad \arccos x^2-x=0.$

25) $\arccos x^2-\ln x=0;\quad x+\sqrt{x}+x^2=4{,}75.$

Варианты заданий к лабораторным работам № 2 и 3

Функция $f(x)$ задана таблицей.

1. В лабораторной работе № 2 интерполировать функцию методом Лагранжа и методом Ньютона. Вычислить значения функции в двух указанных точках.
2. В лабораторной работе № 3 вычислить значения первой и второй производных функции в двух указанных точках.

Вариант 1

X	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
f(*x*)	1,44013	1,54722	1,67302	1,81973	1,98970	2,18547	2,40978	2,66557

$x_1=2{,}03;\quad x_2=2{,}22.$

Вариант 2

X	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
f(*x*)	1,0083	1,1134	1,2208	1,3310	1,4449	1,5634	16876	1,8186

$x_1=1{,}14;\quad x_2=1{,}42.$

Вариант 3

X	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
f(*x*)	3,92847	4,41016	4,93838	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$x_1=3{,}02;\quad x_2=3{,}31.$

Вариант 4

X	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0,5952

$x_1 = 0,82; \quad x_2 = 1,03.$

Вариант 5

X	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9784	0,9838	0,9891

$x_1 = 1,34; \quad x_2 = 1,65.$

Вариант 6

X	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	1,042	1,061	1,087	1,119	1,160	1,212	1,274	1,350

$x_1 = 1,26; \quad x_2 = 1,58.$

Вариант 7

X	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	1,958	2,107	2,268	2,443	2,632	2,841	3,071	3,324

$x_1 = 1,89; \quad x_2 = 2,43.$

Вариант 8

X	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1 = 0,83; \quad x_2 = 0,97.$

Вариант 9

X	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
$f(x)$	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1,74; \quad x_2 = 1,97.$

Вариант 10

X	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
$f(x)$	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1,74; \quad x_2 = 1,97.$

Вариант 11

X	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
$f(x)$	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9170	0,7069	0,4817

$x_1 = 2,72; \quad x_2 = 2,93.$

Вариант 12

X	10	15	20	25	30	35	40	45
$f(x)$	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766	0,707

$x_1 = 23; \quad x_2 = 41.$

Вариант 13

X	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6
$f(x)$	1,029	1,389	1,649	1,800	1,852	1,822	1,739	1,632

$x_1 = 1,3; \quad x_2 = 4,0.$

Вариант 14

X	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48
$f(x)$	0,1296	0,1790	0,2280	0,2764	0,3242	0,3712	0,4173	0,4626

$x_1 = 0,20; \quad x_2 = 0,41.$

Вариант 15

X	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	0,1198	0,0897	0,0660	0,0477	0,0339	0,0236	0,0162	0,0109

$x_1 = 1,25; \quad x_2 = 1,76.$

Вариант 16

X	50	55	60	65	70	75	80	85
$f(x)$	0,285	0,319	0,223	0,042	–0,148	–0,273	–0,28	–0,178

$x_1 = 58; \quad x_2 = 79.$

Вариант 17

X	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1 = 0,83; \quad x_2 = 0,97.$

Вариант 18

X	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
$f(x)$	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 2,74; \quad x_2 = 2,97.$

Вариант 19

X	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
$f(x)$	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1,74; \quad x_2 = 1,97.$

Вариант 20

X	3,70	3,75	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,05
$f(x)$	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9170	0,7069	0,4817

$x_1 = 3,72; \quad x_2 = 3,93.$

Вариант 21

X	10	15	20	25	30	35	40	45
$f(x)$	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766	0,707

$x_1 = 23; \quad x_2 = 41.$

Вариант 22

X	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05	2,10
$f(x)$	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1 = 1,83; \quad x_2 = 1,97.$

Вариант 23.

X	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
$f(x)$	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1,74; \quad x_2 = 1,97.$

Вариант 24

X	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
$f(x)$	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 2,74; \quad x_2 = 2,97.$

Вариант 25

X	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05
$f(x)$	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9170	0,7069	0,4817

$x_1 = 0,72; \quad x_2 = 0,93.$

Варианты заданий к лабораторной работе № 4

Вычислить интегралы с использованием квадратурных формул.

1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx; \quad \int_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}dx.$

2) $\int_0^1 e^{x^2}dx; \quad \int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx.$

3) $\int_0^1 \left(3x^2-4x\right)dx; \quad \int_0^{0,5} \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{x}dx.$

4) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}; \quad \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{1-0,25\sin^2 x}}.$

5) $\int_1^5 \frac{dx}{x}; \quad \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-0,25x^2}{1-x^2}}dx.$

6) $\int_1^9 \sqrt{6x-5}dx; \quad \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-0,75x^2}{1-x^2}}dx.$

7) $\int_0^{1,2} \ln\left(1+x^2\right)dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x}\sin x dx.$

8) $\int_0^1 \sin x^2 dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x}\cos x dx.$

9) $\int_0^1 \cos x^2 dx; \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+x+\sqrt{\sin x}}.$

10) $\int_4^{5,2} \ln x dx; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}.$

11) $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$; $\int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$.

12) $\int_{0,1}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}$.

13) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$; $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

14) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; $\int_0^1 e^{-5x^3+x+0,5}dx$.

15) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int_0^1 e^{-4x^3+2x+1}dx$.

16) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$; $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2+1}dx$.

17) $\int_1^2 x\lg x dx$; $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$.

18) $\int_1^2 \frac{\lg x}{x}dx$; $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0,5\sin^2 x}dx$.

19) $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}dx$; $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 0,1x}{x}dx$.

20) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}dx$; $\int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x}dx$.

21) $\int_0^{0,2} \cos\frac{\pi x^2}{2}dx$; $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}\sin 0,5x}{0,5+x^2}dx$.

22) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$; $\int_0^1 \frac{\sqrt{0,5+x^2}}{1+\cos 0,5}dx$.

23) $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{x}dx$; $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 0,15x}{x}dx$.

24) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-0,25x^2}}$; $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,15x}}{x} dx$.

25) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-0,75x^2}}$; $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin 0,6x}{x^2+0,6} dx$.

Учебное издание

Численные методы
математического анализа

В двух частях

Часть 1

Составители:
Добрынина Наталья Филипповна,
Тарасов Дмитрий Викторович

Редактор *А. Г. Темникова*
Компьютерная верстка *М. Б. Жучковой*

Подписано в печать 26.11.13.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,95.
Тираж 50. Заказ № 939.1.

Издательство ПГУ.
440026, Пенза, Красная, 40.
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Методические указания
к выполнению лабораторных вычислительных работ
по курсу «Математический анализ»**

В двух частях

Часть 1

ПЕНЗА 2013