I. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке [-π ; π].

1.1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.2. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.3. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x+2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}+1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.6. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.7. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 3-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.8. $f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.9. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.10. $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.11. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.12. $f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

1.13. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.14. $f(x)=\begin{cases} 5x+1, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.15. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ 1-4x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.16. $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.17. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ 4-2x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.18. $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.19. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ 6x-5, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.20. $f(x)=\begin{cases} 7-3x, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.21. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{5}-2, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.22. $f(x)=\begin{cases} 6x-2, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.23. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ 4-9x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.24. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3}-3, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

1.25. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Задание 2 Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2\ell$) функцию *f*(*x*), заданную на отрезке [-ℓ; ℓ].

2.1. $f(x)=2x+1$, [-3; 3]; *T* = 6.

2.2. $f(x)=3-x$, [-2; 2]; *T* = 4.

2.3. $f(x)=4-\dfrac{x}{2}$, [-1; 1]; *T* = 2.

2.4. $f(x)=5-2x$, [-3; 3]; *T* = 6.

2.5. $f(x)=x-3$, [-1/2; 1/2]; *T* = 1.

2.6. $f(x)=3-2x$, [-1; 1]; *T* = 2.

2.7. $f(x)=3x+1$, [-2; 2]; *T* = 4.

2.8. $f(x)=5-x$, [-4; 4]; *T* = 8.

2.9. $f(x)=2x-4$, [-3; 3]; *T* = 6.

2.10. $f(x)=3x-5$, [-2; 2]; *T* = 4.

2.11. $f(x)=4x+5$, [-1; 1]; *T* = 2.

2.12. $f(x)=4-x$, [-2; 2]; *T* = 4.

2.13. $f(x)=2-5x$, [-2; 2]; *T* = 4.

2.14. $f(x)=4x-3$, [-3; 3]; *T* = 6.

2.15. $f(x)=4+2x$, [-1; 1]; *T* = 2.

2.16. $f(x)=x-2$, [-4; 4]; *T* = 8.

2.17. $f(x)=3x-1$, [-4; 4]; *T* = 8.

2.18. $f(x)=2x+5$, [-1; 1]; *T* = 2.

2.19. $f(x)=4x+3$, [-3/4; 3/4]; *T* = 1.5.

2.20. $f(x)=-x-3$, [-4; 4]; *T* = 8.

2.21. $f(x)=4x+1$, [-3; 3]; $T = 6$.

2.22. $f(x)=\frac{x}{2}-1$, [-2; 2]; $T = 4$.

2.23. $f(x)=2x-3$, [-3; 3]; $T = 6$.

2.24. $f(x)=\frac{2x}{3}+1$, [-3; 3]; $T = 6$.

2.25. $f(x)=1-5x$, [-2; 2]; $T = 4$.

Задание 3. На заданном отрезке разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$.

3.1. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.2. $f(x)=-4|x|$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.3. $f(x)=-|2x|$, [-2; 2]; $T = 4$.

3.4. $f(x)=\frac{x}{3}$, [-3; 3]; $T = 6$.

3.5. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x\le-\pi/2 \\ \cos x, & -\pi/2\le x\le\pi/2 \\ 0, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$, $T = 2\pi$.

3.6. $f(x)=3+\frac{1}{2}|x|$, [-2; 2]; $T = 4$.

3.7. $f(x)=\frac{1-x^2}{2}$, [-4; 4]; $T = 8$.

3.8. $f(x)=7-x^2$, [-1; 1]; $T = 2$.

3.9. $f(x)=8x$, [-1/2; 1/2]; $T = 1$.

3.10. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.11. $f(x)=\frac{1}{4}x$, [-2; 2]; $T = 4$.

3.12. $f(x) = 2x^2 - 1$, [-3; 3]; $T = 6$.

3.13. $f(x) = x^2 + 2$, [-1; 1]; $T = 2$.

3.14. $f(x) = 6x$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.15. $f(x) = 1 + |3x|$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.16. $f(x) = -2\sin x$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.17. $f(x) = 3x^2$, [-1; 1]; $T = 2$.

3.18. $f(x) = \dfrac{3}{2}\sin\dfrac{x}{2}$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.19. $f(x) = \pi - |x|$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.20. $f(x) = 2 + 3x^2$, [-3; 3]; $T = 6$.

3.21. $f(x) = 5 - |3x|$, [-1; 1]; $T = 2$.

3.22. $f(x) = \dfrac{x^2}{3} + 2$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

3.23. $f(x) = 1 + \dfrac{|x|}{2}$, [-2; 2]; $T = 4$.

3.24. $f(x) = 4 - x^2$, [-2; 2]; $T = 4$.

3.25. $f(x) = x^2 + 1$, [-π; π]; $T = 2\pi$.

Задание 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на полупериоде $[0; \ell]$, продолжив (доопределив) ее четным и нечетным образом.
Построить графики функций.

4.1. $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

4.2. $f(x) = x^2$, [0; π].

4.3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ -\cos x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$

4.4. $f(x)=\dfrac{2x}{3}$, [0; 3].

4.5. $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 3, \\ 6, & 3<x\le 6. \end{cases}$

4.6. $f(x)=(x-1)^2$, [0; π].

4.7. $f(x)=\begin{cases} -x, & 0\le x\le 2, \\ -2, & 2<x\le 4. \end{cases}$

4.8. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2. \end{cases}$

4.9. $f(x)=\dfrac{2x}{5}$, [0; 5].

4.10. $f(x)=(x-2)^2$, [0; π].

4.11. $f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le \pi/2 \\ -\sin x, & \pi/2<x\le \pi. \end{cases}$

4.12. $f(x)=\begin{cases} -x, & 0\le x\le 3, \\ -3, & 3<x\le 6. \end{cases}$

4.13. $f(x)=\dfrac{x}{2}+1$, [0; 2].

4.14. $f(x)=(x+1)^2$, [0; π].

4.15. $f(x)=\begin{cases} 3x, & 0\le x\le 1, \\ 3, & 1<x\le 2. \end{cases}$

4.16. $f(x)=\begin{cases} -2, & 0\le x\le 1, \\ 2x-4, & 1<x\le 2. \end{cases}$

4.17. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 2, \\ 2, & 2<x\le 4. \end{cases}$

4.18. $f(x)=(2x-1)^2$, [0; π].

4.19. $f(x)=\begin{cases}-2x, & 0\le x\le 3,\\ -6, & 3<x\le 6.\end{cases}$

4.20. $f(x)=2-x$, [0; 2].

4.21. $f(x)=\begin{cases}3, & 0\le x\le 3,\\ 6-x, & 3<x\le 6.\end{cases}$

4.22. $f(x)=x^2+1$, [0; π].

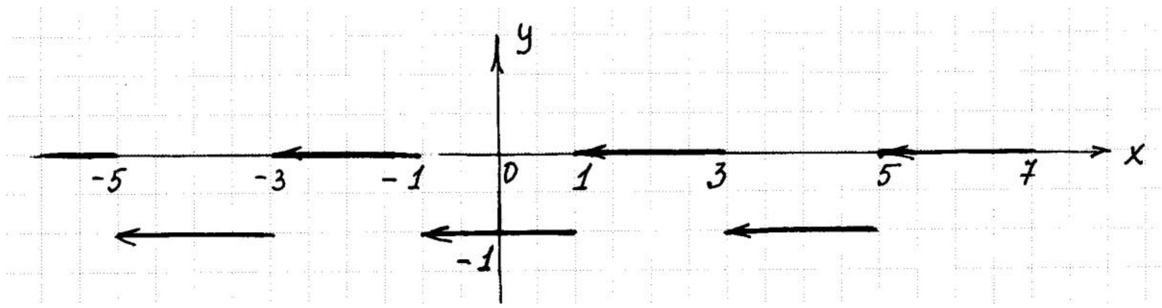
4.23. $f(x)=(x-\pi)^2$, [0; π].

4.24. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le \pi/2,\\ \cos x, & \pi/2<x\le \pi.\end{cases}$

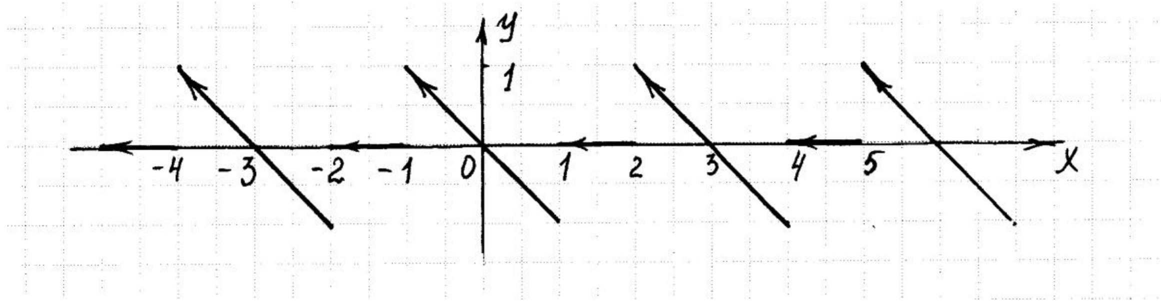
4.25. $f(x)=\begin{cases}-4, & 0\le x\le 2,\\ 2x-8, & 2<x\le 4.\end{cases}$

Задание 5. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графиками

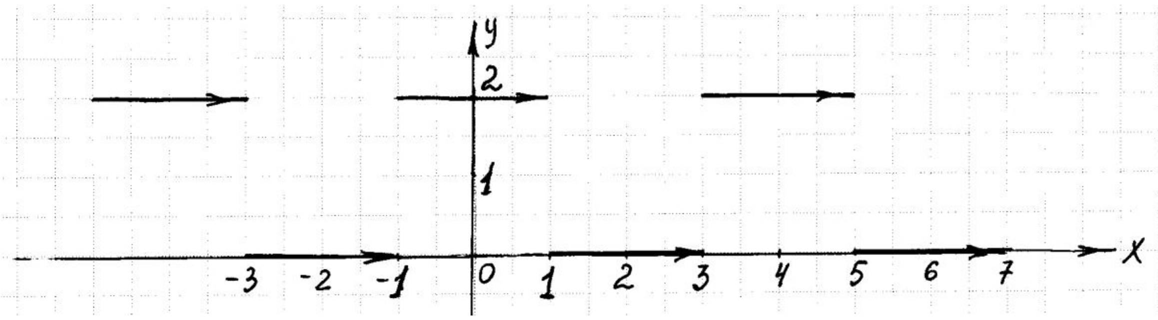
5.1.



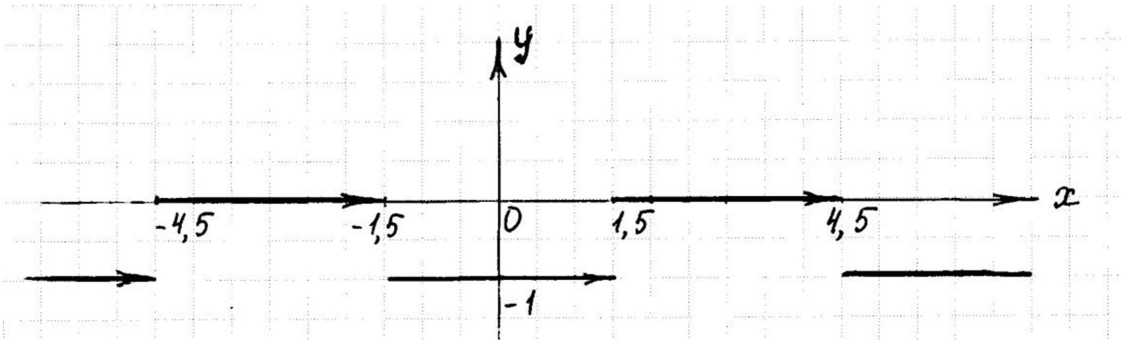
5.2.



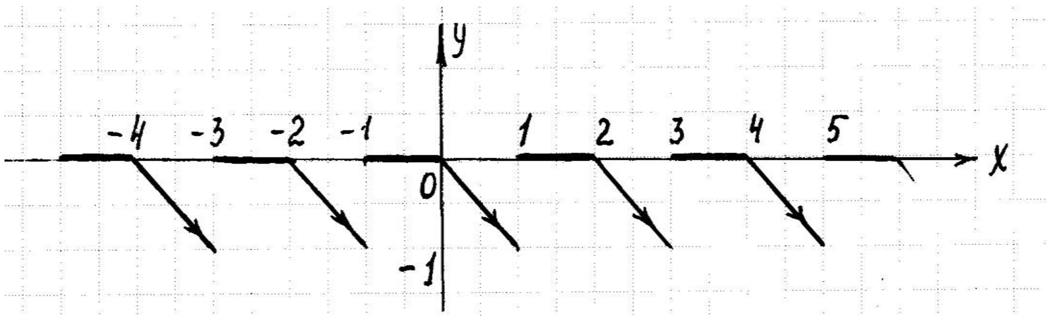
5.3.


y
2
1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
X

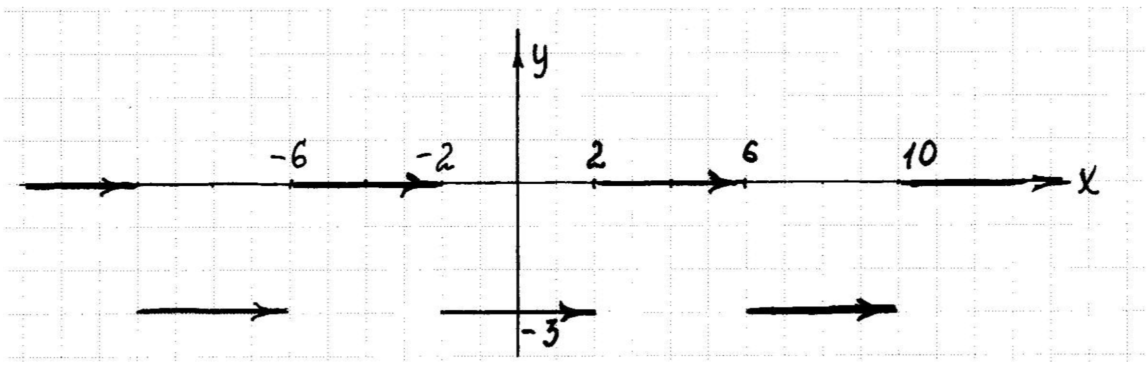
5.4.


y
x
-4,5 -1,5 0 1,5 4,5
-1

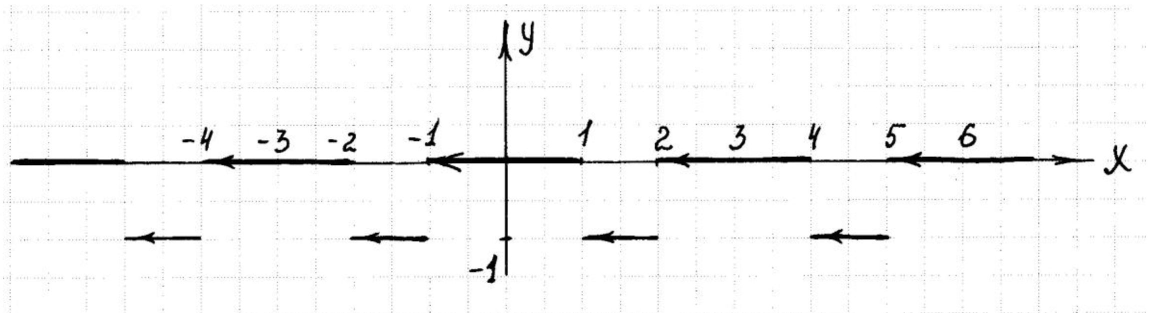
5.5.


y
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
X
0
-1

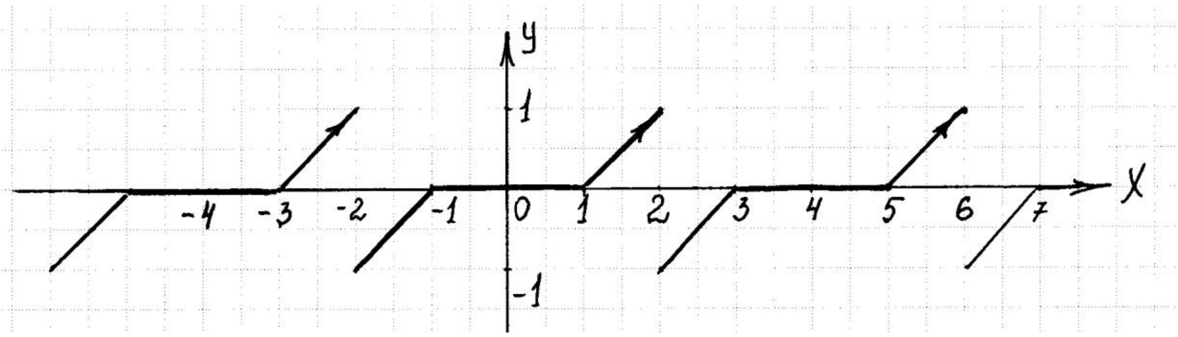
5.6.


y
-6 -2 2 6 10
X
-3

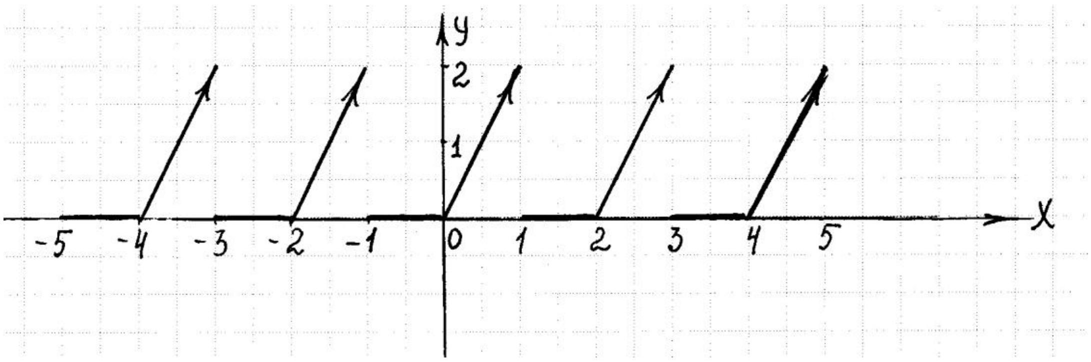
5.7.


y
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6
X
-1

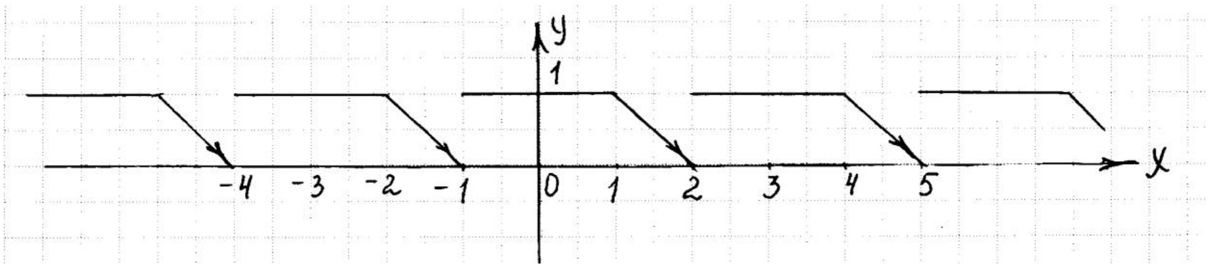
5.8.



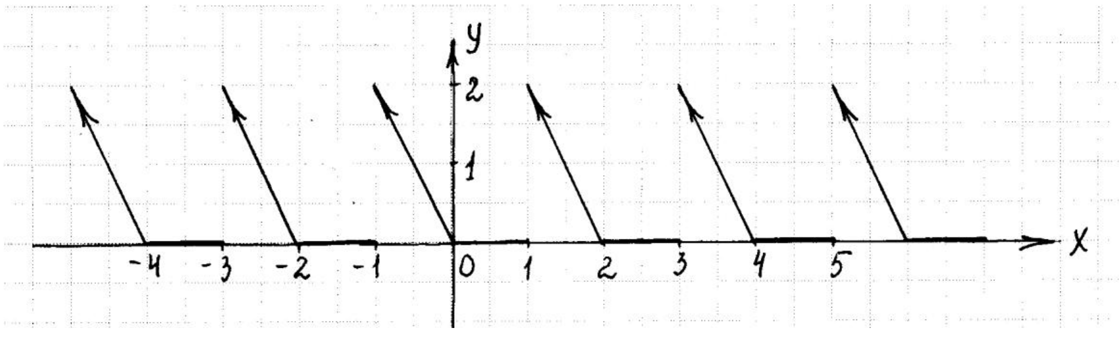
5.9.



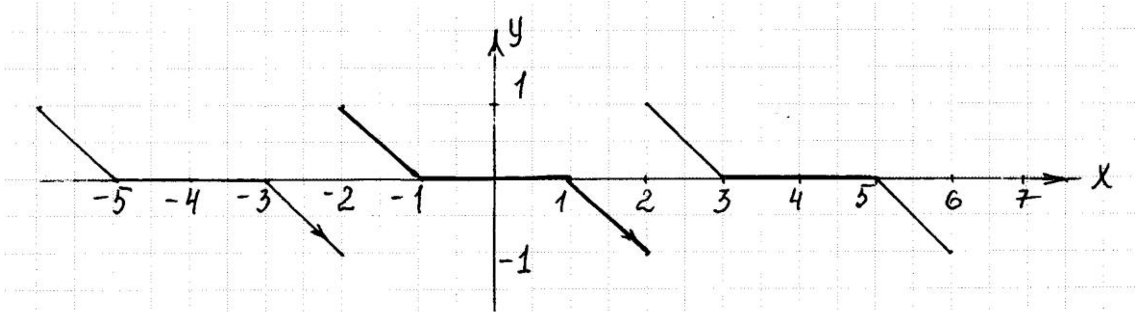
5.10.



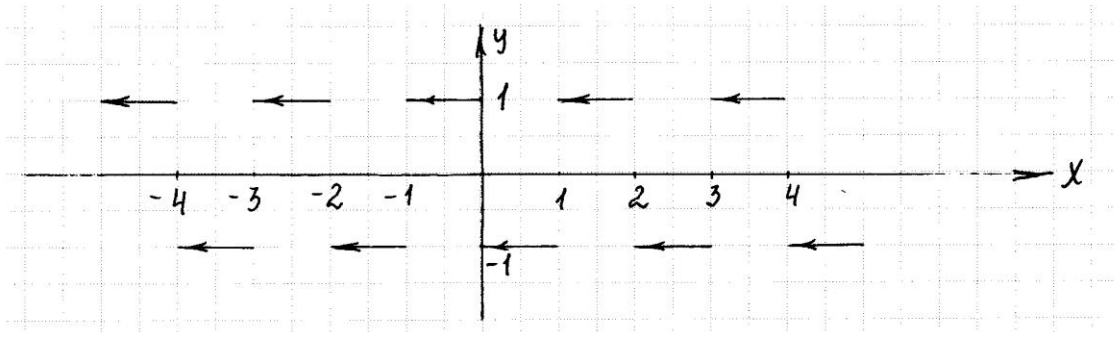
5.11.



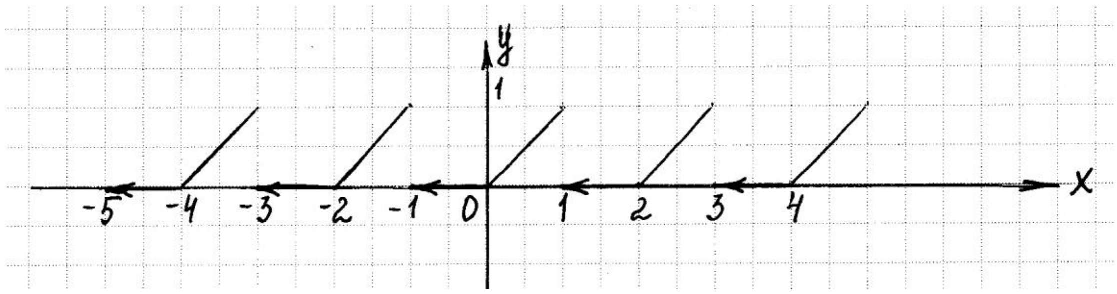
5.12.



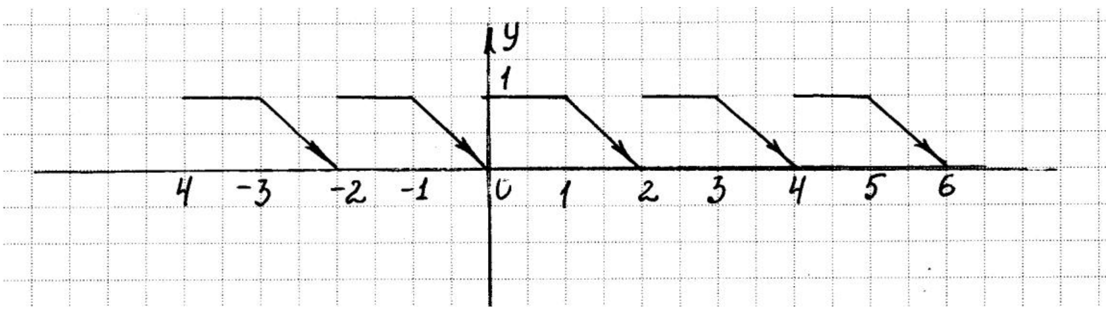
5.13.



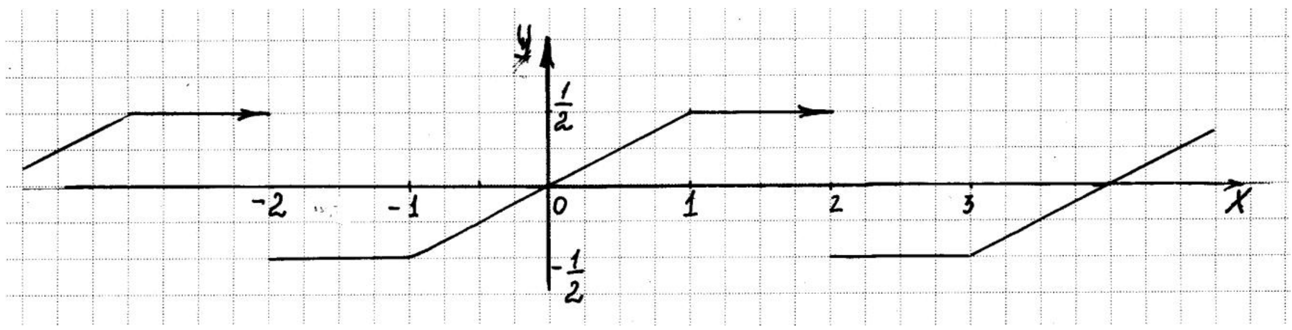
5.14.



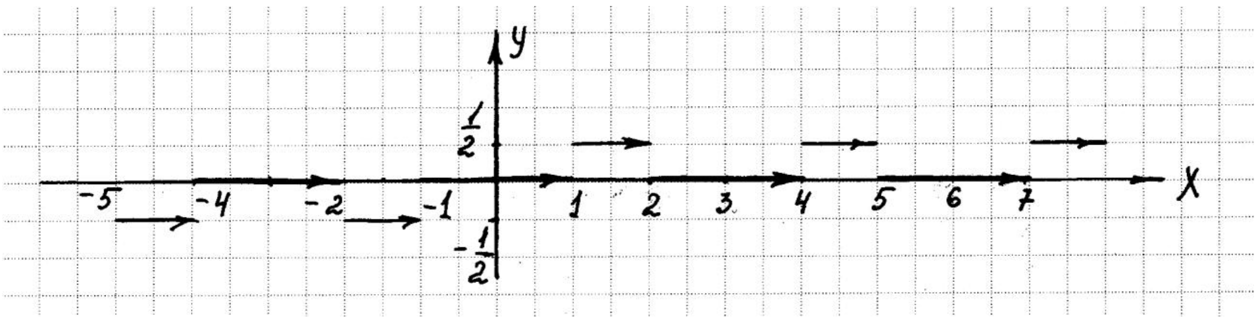
5.15.



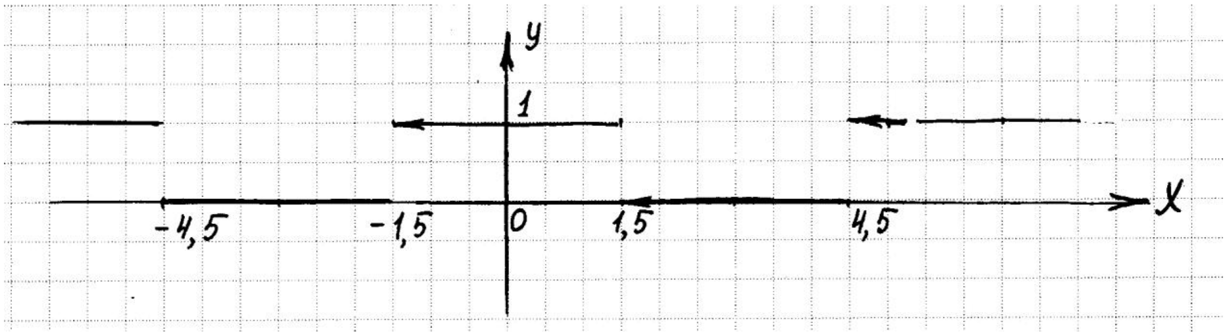
5.16.



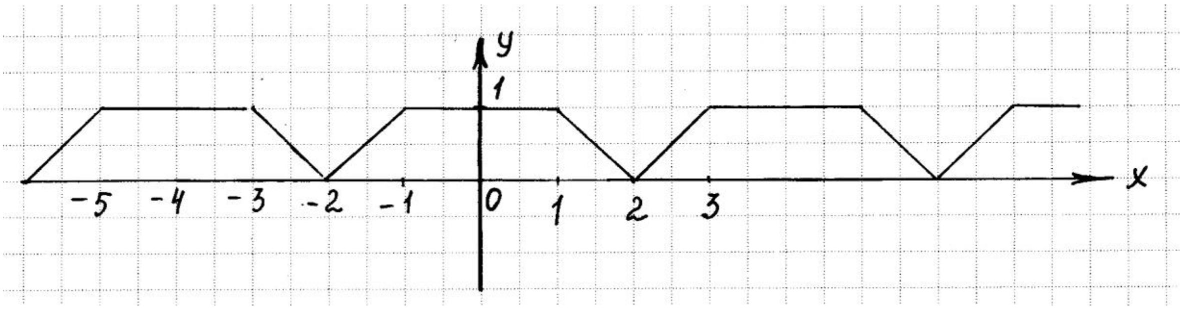
5.17.



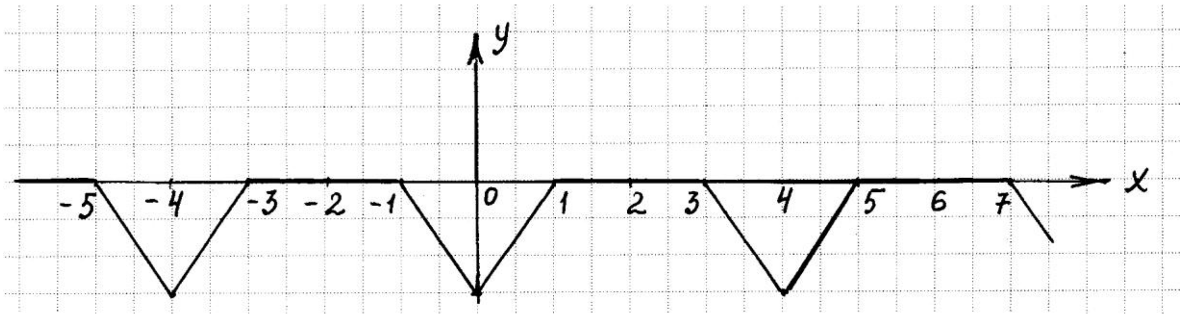
5.18.



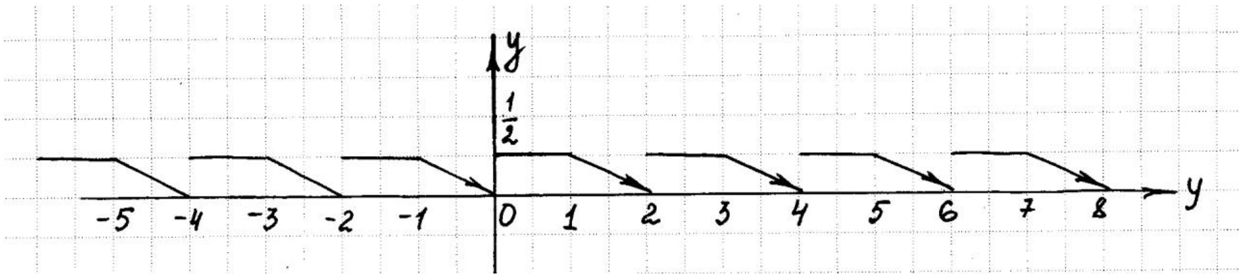
5.19.



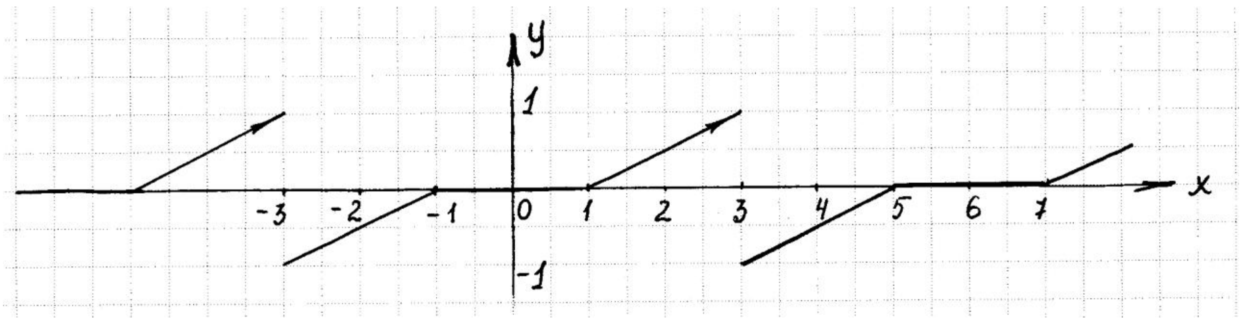
5.20.



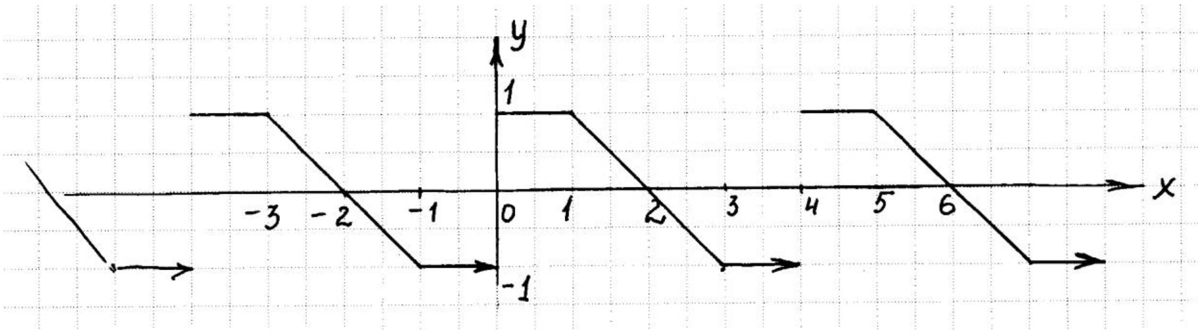
5.21.



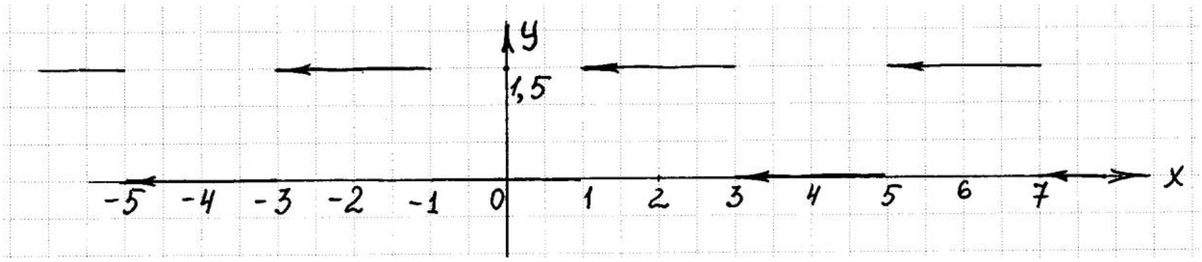
5.22.



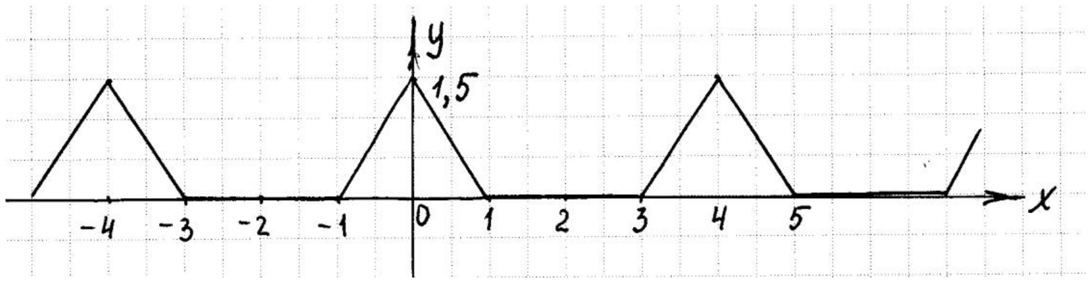
5.23.



5.24.



5.25.



II. ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

(если контрольная работа выполняется «руками»)

Выполнение первого задания

Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi\,;\,\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение.

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, а поэтому разлагается в ряд Фурье. Найдём коэффициенты искомого ряда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\right) = 0,.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, & du = -\dfrac{1}{2}dx \\ dv = \cos nx dx; & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin nx\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right) = \frac{1}{2\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k, \\ \dfrac{1}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если} \quad n = 2k-1, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin nx dx = \left| \begin{matrix} u = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, & du = -\dfrac{1}{2}dx, \\ dv = \sin nx dx; & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4n}(-1)^n + \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{2n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4n} \cdot \left((-1)^n + 1 \right) = \frac{1}{4n} \left((-1)^n + 1 \right) = \begin{cases} 0, \text{ если } & n = 2k - 1, \\ \frac{1}{4k}, \text{ если } & n = 2k. \end{cases}$$

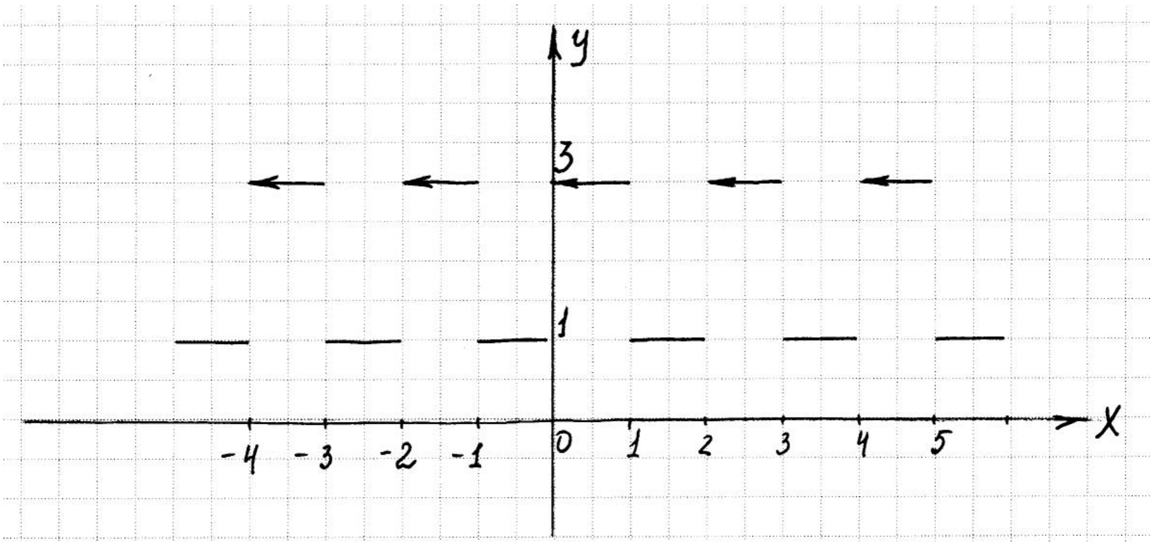
Ответ: искомое разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}.$$

Выполнение второго задания

Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке [-1; 1].

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & -1 \le x \le 0, \\ 3, \text{ если } & 0 < x \le 1, \end{cases}$$



Решение.

Функция удовлетворяет условиям Дирихле, а поэтому разлагается в ряд Фурье, коэффициенты которого вычислим по известным формулам.

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = 1 \cdot \int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{0} 1 \cdot dx + \int_{0}^{1} 3 \cdot dx = 4,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{1} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cos \pi n x dx = \int_{-1}^{0} 1 \cdot \cos \pi n x dx + \int_{0}^{1} 3 \cdot \cos \pi n x dx =$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{0}^{1}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\sin\pi nxdx=\int\limits_{-1}^{0}1\cdot\sin\pi nxdx+\int\limits_{0}^{1}3\cdot\sin\pi nxdx=$$

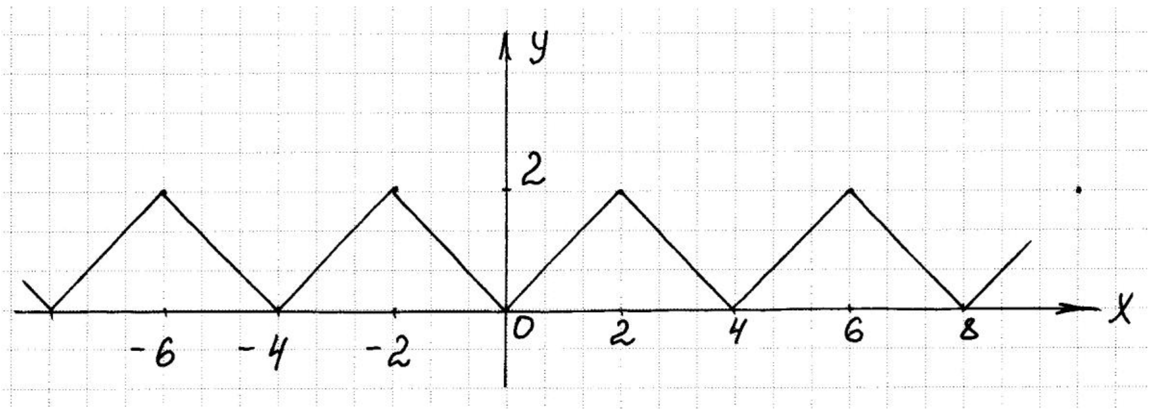
$$=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{-1}^{0}-\frac{3}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{0}^{1}=-\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{3}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)==\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=2+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\pi(2k-1)x}{2k-1}$.

Выполнение третьего задания

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=|x|$, на отрезке [-2; 2].



Решение.

$f(x)=|x|$, непрерывная функция, удовлетворяющая условиям теоремы о разложимости, и, следовательно, разлагается в свой ряд Фурье. Она четная, поэтому разлагается в ряд Фурье только по косинусам, т. е. $b_n=0$.

Находим коэффициенты a_0 и a_n искомого ряда

$$a_0=\frac{2}{2}\int\limits_{0}^{2}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}=2,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx = \frac{2}{2}\int_0^{2} x\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos\frac{\pi n x}{2}dx; & v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2x}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ -\dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2}, & \text{если } n = 2k-1. \end{cases}$$

Ответ: искомый ряд Фурье данной функции

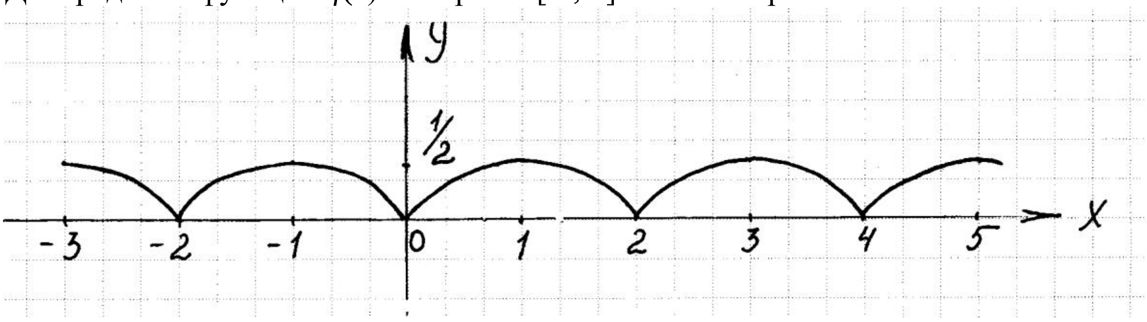
$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$

Выполнение четвертого задания

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, заданную на полупериоде [0; 2], продолжив (доопределив) её четным и нечетным образом. Построить графики функций.

Решение.

1. Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке [-2; 0] четным образом



Для четной функции коэффициенты $b_n = 0$, а коэффициенты a_n вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}dx.$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^{2} f(x)dx = \int_0^{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^{2} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x-\dfrac{x^2}{2}, & du=(1-x)dx,\\ dv=\cos\dfrac{\pi nx}{2}dx; & v=\dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2(1-x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=1-x, & du=-dx,\\ dv=\sin\dfrac{\pi nx}{2}dx; & v=-\dfrac{2}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{2}{\pi n}\left((x-1)\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

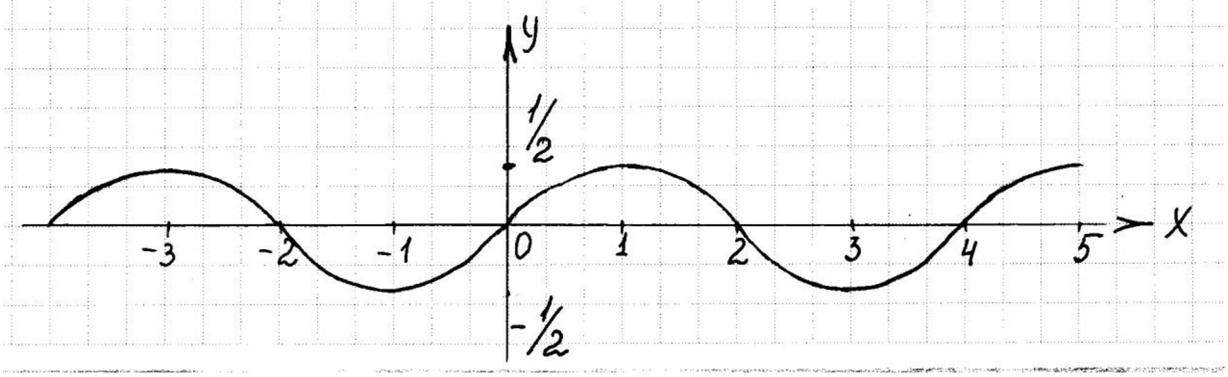
$$=-\frac{2}{\pi n}\left(\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n+\frac{2}{\pi n}-\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2\right)=-\frac{4}{\pi^2n^2}\cdot\left((-1)^n+1\right)=$$

$$=\begin{cases}\text{еслип } n=2k-1,\text{ то } a_n=0,\\ \text{если } n=2k,\text{ то } a_n=-\dfrac{8}{\pi^2(2k)^2}=-\dfrac{2}{\pi^2k^2}.\end{cases}$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\pi kx.$$

2. Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке [-2; 0] нечетным образом



Для нечетной функции коэффициенты $a_0=a_n=0$, находим коэффициенты b_n.

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx=\frac{2}{2}\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x-\dfrac{x^2}{2}, & du=(1-x)dx,\\ dv=\sin\dfrac{\pi nx}{2}dx; & v=-\dfrac{2}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\cos\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 (1-x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \begin{vmatrix} u = 1-x, & du = -dx, \\ dv = \cos\frac{\pi n x}{2}\,dx; & v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2}{\pi n}(1-x)\sin\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int_0^2 \sin\frac{\pi n x}{2}\,dx\right) = -\frac{8}{\pi^3 n^3}\cos\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^2 = -\frac{8}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \text{если\_ } n = 2k, \text{ то } \ b_n = 0, \\ \text{если } n = 2k-1, \text{ то } \ b_n = \dfrac{16}{\pi^3 (2k-1)^3}. \end{cases}$$

Тогда

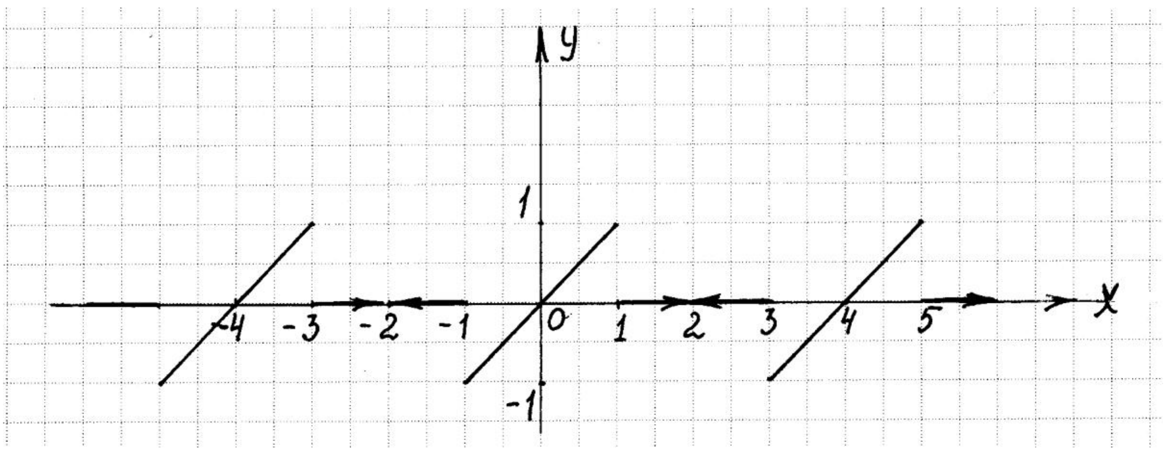
$$f(x) = \frac{16}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2}.$$

Ответ: 1. $f(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\cos\pi k x.$

2. $f(x) = \dfrac{16}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^3}\sin\dfrac{\pi(2k-1)x}{2}.$

Выполнение пятого задания

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, с периодом 4; график функции в интервале (-2; 2) изображён на чертеже



Решение.

Заданная функция нечетная с периодом $2\ell = 4$, поэтому $a_0 = a_n = 0$.

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx=\int_0^1 x\sin\frac{\pi n x}{2}dx+\int_0^2 0\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\sin\frac{\pi n x}{2}dx; & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^1+\frac{2}{\pi n}\int_0^1\cos\frac{\pi n x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^1=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi k}, & \text{если } n=2k,\\[2ex] \dfrac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\cdot\dfrac{4}{\pi^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Ответ: $$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{\pi}\sin\pi x-\frac{4}{3\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{2}-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x+\ldots.$$

Литература

1. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. М. Айрис Пресс, 2004.

2. *Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т., Шевченко Ю. А*. Сборник задач по высшей математике. М. Айрис Пресс, 2004.

3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. ч. 3 (под редакцией А. П. Рябушко). Минск, «Высшая школа», 1991.

III. ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
(если контрольная работа выполняется в системе Mathcad

ПРИМЕР 1.

Разложение в ряд Фурье
в пакете Mathcad

$$f(x) := \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Функция задана на отрезке [-π, π]

$k := 0..50 \quad a_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$ *- коэффициенты Фурье*

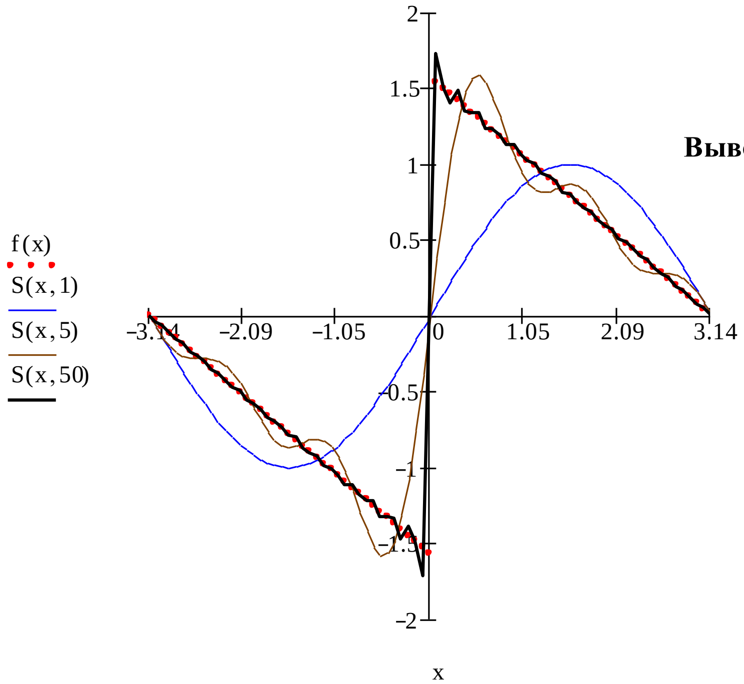
a_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

b_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	1	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167	0.143	0.125

Частичные суммы ряда Фурье

$$S(x,n) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\cdot\cos(k\cdot x) + b_k\cdot\sin(k\cdot x)\right) \qquad x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{40}..\pi$$

Геометрическое разложение в ряд Фурье



Вывод. *При n →∞ S(x,n) →f(x)*

Аналитическое разложение данной функции в ряд Фурье

Интегралы можно вычислить в Mathcad, а значения a_k и b_k считаем сами, так как Mathcad не всегда дает ответ.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi - x}{2}\,dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\frac{-\pi-x}{2}\cdot\cos(k\cdot x)\,dx+\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \to \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot k^2}+\frac{1}{2\cdot k^2}\cdot\cos(\pi\cdot k)\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot k^2}\cdot\cos(\pi\cdot k)+\frac{1}{2\cdot k^2}\right)$$

$$a_k=\left[\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot k^2}+\frac{1}{2\cdot k^2}\cdot\cos(\pi\cdot k)\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot k^2\cdot\cos(\pi\cdot k)+\frac{1}{2}\cdot k^2\right)=0\right]$$ *, так как $\cos(\pi k)=\pm 1$ при $к = 1, 2, 3, \dots$*

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\frac{-\pi-x}{2}\cdot\sin(k\cdot x)\,dx+\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cdot\sin(k\cdot x)\,dx \to \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{k}-\frac{1}{2\cdot k^2}\cdot\sin(\pi\cdot k)\right)$$

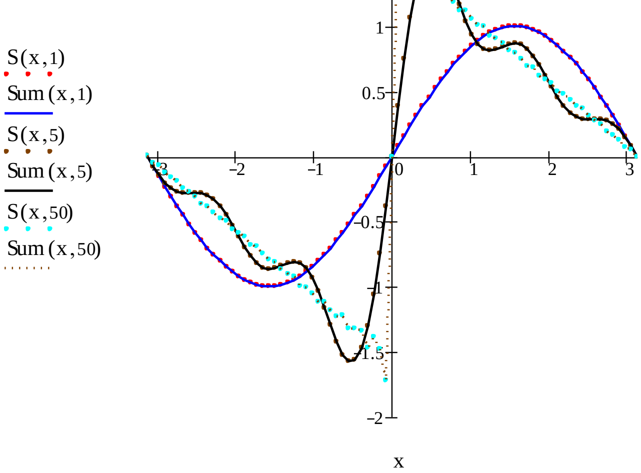
$$b_k=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot k^2}\cdot\sin(\pi\cdot k)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{k}\right)=\frac{1}{k}$$ *, так как $\sin(\pi k)=0$ при $к = 1, 2, 3, \dots$*

Итак, $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\sin(k\cdot x)$$

или $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-pi-x}{2} & \text{if } -pi\le x\le 0\\ \dfrac{pi-x}{2} & \text{if } 0<x<pi\end{cases}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\sin(k\cdot x)$$

Для контроля геометрически сравним результаты частичных сумм S(x,n) и Sum(x,n). Обозначим

$$Sum(x,n):=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\sin(k\cdot x)$$



Контроль.
Графики S(x,n) и Sum(x,n) совпадают. Следовательно, разложение данной функции f(x) на [-π, π] в ряд Фурье верное.

ОТВЕТ.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-pi-x}{2} & \text{if } -pi\le x\le 0\\ \dfrac{pi-x}{2} & \text{if } 0<x<pi\end{cases}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\sin(k\cdot x)$$

ПРИМЕР 2.

Разложение в ряд Фурье

$$f(x):=\begin{cases}x^2 & \text{if } -\pi\le x<0\\ 2 & \text{if } x=0\\ 3 & \text{if } 0<x\le\pi\end{cases}$$ *Функция задана на отрезке [-π, π]*

$k:=0..50$ $$a_k:=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \qquad b_k:=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$ *- коэффициенты Фурье*

a_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	6.29	-2	0.5	-0.222	0.125	-0.08	0.056	-0.041	-0.025

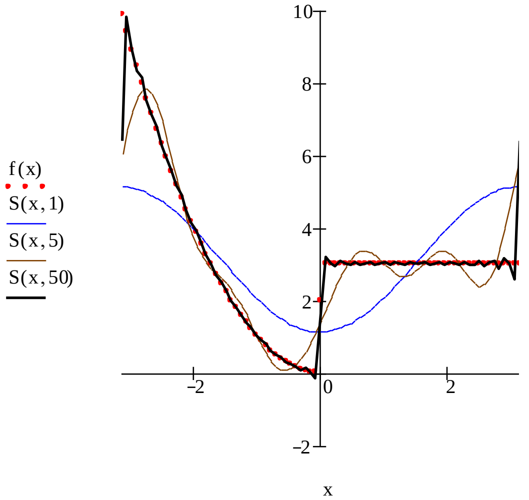
b_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0.042	1.571	-0.363	0.785	-0.236	0.524	-0.172	0.393

Частичные суммы ряда Фурье

$$S(x,n) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos(k\cdot x) + b_k \cdot \sin(k\cdot x)\right) \qquad x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{40} .. \pi$$

x	-3.142	-3.063	-2.985	-2.906	-2.827	-2.749	-2.67	-2.592	-2.513
f(x)	9.87	9.382	8.907	8.445	7.994	7.556	7.131	6.717	6.317
S(x,1)	5.145	5.136	5.114	5.08	5.034	4.977	4.908	4.829	4.739
S(x,5)	6.072	6.702	7.224	7.601	7.808	7.835	7.685	7.378	6.944
S(x,50)	6.395	9.795	8.911	8.303	8.13	7.5	7.102	6.791	6.253

Геометрическое разложение в ряд Фурье



Вывод. *При n →∞ S(x,n) →f(x)*

Аналитическое разложение данной функции в ряд Фурье

Интегралы можно вычислить в Mathcad, а значения a_k и b_k считаем сами, так как Mathcad не всегда дает ответ.

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} x^2\cdot\cos(0\cdot x)\,dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} 3\cdot\cos(0\cdot x)\,dx \rightarrow \frac{1}{3}\cdot\pi^2 + 3$$

$a_0 = \frac{1}{3}\cdot\pi^2 + 3$ *Учитывая, что $\cos(\pi k) = \pm 1$, $\sin(\pi k) = 0$ при к = 1, 2, 3, … получим*

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} x^2\cdot\cos(k\cdot x)\,dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} 3\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\left(k^2\cdot\pi^2\cdot\sin(\pi\cdot k) - 2\cdot\sin(\pi\cdot k) + 2\cdot\pi\cdot k\cdot\cos(\pi\cdot k)\right)}{k^3} + \frac{3}{\pi\cdot k}\cdot\sin(\pi\cdot k)$$

$$a_k = \left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\left(k^2\cdot\pi^2\cdot\sin(\pi\cdot k) - 2\cdot\sin(\pi\cdot k) + 2\cdot\pi\cdot k\cdot\cos(\pi\cdot k)\right)}{k^3} + \frac{3}{\pi\cdot k}\cdot\sin(\pi\cdot k)\right] = \frac{(-1)^k\cdot 2}{k^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} x^2\cdot\sin(k\cdot x)\,dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} 3\cdot\sin(k\cdot x)\,dx \rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{2}{k^3} + \frac{\left(k^2\cdot\pi^2\cdot\cos(\pi\cdot k) - 2\cdot\cos(\pi\cdot k) - 2\cdot\pi\cdot k\cdot\sin(\pi\cdot k)\right)}{k^3}\right] + \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{-3}{k}\cdot\cos(\pi\cdot k) + \frac{3}{k}\right)$$

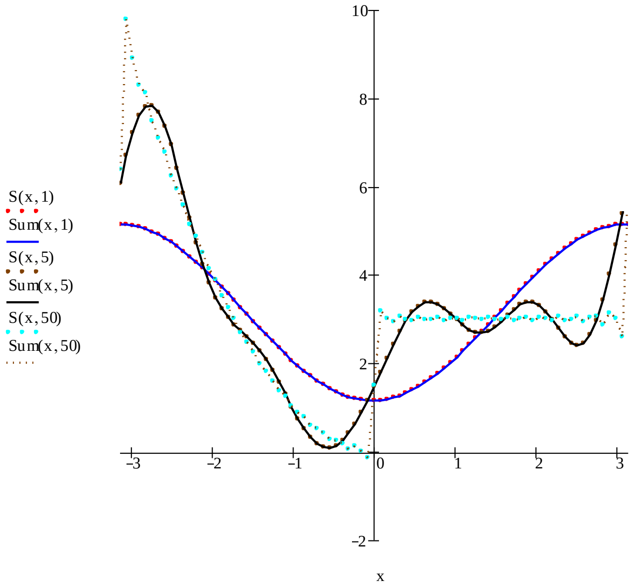
$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{2}{k^3} + \frac{\left(k^2\cdot\pi^2\cdot\cos(\pi\cdot k) - 2\cdot\cos(\pi\cdot k) - 2\cdot\pi\cdot k\cdot\sin(\pi\cdot k)\right)}{k^3}\right] + \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{-3}{k}\cdot\cos(\pi\cdot k) + \frac{3}{k}\right) = \frac{1}{\pi\cdot k^3}\cdot\left[2 + (-1)^k\left(k^2\cdot\pi^2 - 2\right)\right] + \frac{3}{\pi\cdot k}\cdot\left[(-1)^{k+1} + 1\right]$$

Итак,

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\pi^2 + 3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\cdot 2}{k^2}\cdot\cos(k\cdot x) + \left[\frac{1}{\pi\cdot k^3}\cdot\left[2 + (-1)^k\cdot\left(k^2\cdot\pi^2 - 2\right)\right] + \frac{3}{\pi\cdot k}\cdot\left[(-1)^{k+1} + 1\right]\right]\cdot\sin(k\cdot x)\right]$$

Для контроля геометрически сравним результаты частичных сумм S(x,n) и Sum(x,n). Обозначим

$$Sum(x,n) := \frac{\frac{1}{3}\cdot\pi^2 + 3}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^k\cdot 2}{k^2}\cdot\cos(k\cdot x) + \left[\frac{1}{\pi\cdot k^3}\cdot\left[2 + (-1)^k\cdot\left(k^2\cdot\pi^2 - 2\right)\right] + \frac{3}{\pi\cdot k}\cdot\left[(-1)^{k+1} + 1\right]\right]\cdot\sin(k\cdot x)\right]$$



Контроль.
Графики S(x,n) и Sum(x,n) совпадают. Следовательно, разложение данной функции f(x) на [-π, π] в ряд Фурье *верное.*

ОТВЕТ.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } -\pi \le x < 0 \\ 2 & \text{if } x = 0 \\ 3 & \text{if } 0 < x \le \pi \end{cases} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\pi^2 + 3}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^k\cdot 2}{k^2}\cdot\cos(k\cdot x) + \left[\frac{1}{\pi\cdot k^3}\cdot\left[2 + (-1)^k\cdot\left(k^2\cdot\pi^2 - 2\right)\right] + \frac{3}{\pi\cdot k}\cdot\left[(-1)^{k+1} + 1\right]\right]\cdot\sin(k\cdot x)\right]$$

ПРИМЕР 3.

Разложение в ряд Фурье

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x-2) & \text{if } 0 < x \le 3 \\ x & \text{if } -3 \le x \le 0 \end{cases}$$

Функция задана на отрезке [-3, 3]

коэффициенты Фурье

$$n := 50 \quad k := 0..n \quad a_k := \frac{1}{3}\cdot\int_{-3}^{3} f(x)\cdot\cos\left(\frac{k\cdot x\cdot\pi}{3}\right)dx \quad b_k := \frac{1}{3}\cdot\int_{-3}^{3} f(x)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot x\cdot\pi}{3}\right)dx$$

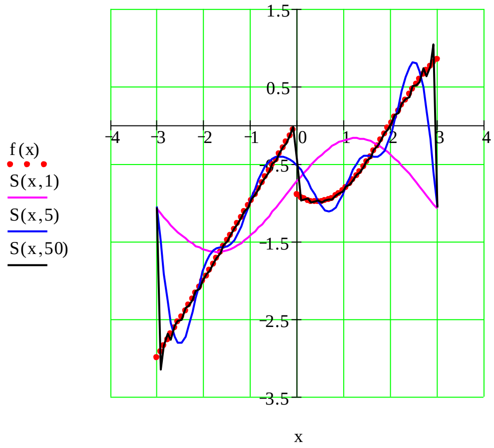
a_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	-1,819	0,18	0,094	0,063	0,019	0,023	$8,286\cdot10^{-3}$	0,012	$4,608\cdot10^{-3}$

b_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0,71	-0,838	0,31	-0,386	0,187	-0,254	0,133	-0,19

Частичные суммы ряда Фурье

$$S(x,n) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) \right) \qquad x := -3, -3 + \frac{3}{40} .. 3$$

Геометрическое разложение в ряд Фурье



Вывод. *При n →∞ S(x,n) →f(x)*

Аналитическое разложение данной функции в ряд Фурье

Интегралы можно вычислить в Mathcad, а значения a_k и b_k считаем сами, так как Mathcad не всегда дает ответ.

$$a_0 := \left(\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 \sin(x-2) \cdot \cos\left(\frac{0 \cdot x \cdot \pi}{3}\right) dx + \frac{1}{3} \cdot \int_{-3}^{0} x \cdot \cos\left(\frac{0 \cdot x \cdot \pi}{3}\right) dx \right) \to \frac{-1}{3} \cdot \cos(1) + \frac{1}{3} \cdot \cos(2) - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 \sin(x-2) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) dx + \frac{1}{3} \cdot \int_{-3}^{0} x \cdot \cos\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) dx \to \frac{(3 \cdot \cos(1) \cdot \cos(k \cdot \pi) + k \cdot \pi \cdot \sin(1) \cdot \sin(k \cdot \pi))}{(3 + k \cdot \pi) \cdot (-3 + k \cdot \pi)} - 3 \cdot \frac{\cos(2)}{(3 + k \cdot \pi) \cdot (-3 + k \cdot \pi)} + \frac{3}{k^2 \cdot \pi^2} - 3 \cdot \frac{(\cos(k \cdot \pi) + k \cdot \pi \cdot \sin(k \cdot \pi))}{k^2 \cdot \pi^2}$$

$$a_k = 3 \cdot \frac{(-1)^k \cdot \cos(1) - \cos(2)}{(3 + k \cdot \pi) \cdot (-3 + k \cdot \pi)} + \frac{3 \cdot \left[1 - (-1)^k\right]}{k^2 \cdot \pi^2}$$

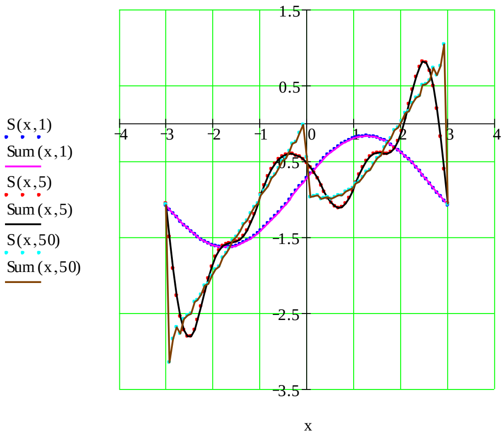
$$\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 \sin(x-2) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) dx + \frac{1}{3} \cdot \int_{-3}^{0} x \cdot \sin\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) dx \to \frac{-(-3 \cdot \cos(1) \cdot \sin(k \cdot \pi) + k \cdot \pi \cdot \sin(1) \cdot \cos(k \cdot \pi))}{(-3 + k \cdot \pi) \cdot (3 + k \cdot \pi)} - \sin(2) \cdot k \cdot \frac{\pi}{(-3 + k \cdot \pi) \cdot (3 + k \cdot \pi)} - 3 \cdot \frac{(-\sin(k \cdot \pi) + k \cdot \pi \cdot \cos(k \cdot \pi))}{k^2 \cdot \pi^2}$$

$$b_k = k \cdot \pi \cdot \frac{(-1)^{k+1} \cdot \sin(1) - \sin(2)}{(-3 + k \cdot \pi) \cdot (3 + k \cdot \pi)} - 3 \cdot \frac{(-1)^k}{\pi \cdot k}$$

$$f(x) = \frac{\frac{-1}{3} \cdot \cos(1) + \frac{1}{3} \cdot \cos(2) - \frac{3}{2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left[3 \cdot \frac{(-1)^k \cdot \cos(1) - \cos(2)}{(3 + k \cdot \pi) \cdot (-3 + k \cdot \pi)} + \frac{3 \cdot \left[1 - (-1)^k\right]}{k^2 \cdot \pi^2} \right] \cdot \cos\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) + \left[k \cdot \pi \cdot \frac{(-1)^{k+1} \cdot \sin(1) - \sin(2)}{(3 + k \cdot \pi) \cdot (-3 + k \cdot \pi)} - 3 \cdot \frac{(-1)^k}{\pi \cdot k} \right] \cdot \sin\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) \right]$$

Для контроля геометрически сравним результаты частичных сумм S(x,n) и Sum(x,n). Обозначим

$$Sum(x,n) := \frac{\frac{-1}{3} \cdot \cos(1) + \frac{1}{3} \cdot \cos(2) - \frac{3}{2}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\left[3 \cdot \frac{(-1)^k \cdot \cos(1) - \cos(2)}{(3 + k \cdot \pi) \cdot (-3 + k \cdot \pi)} + \frac{3 \cdot \left[1 - (-1)^k\right]}{k^2 \cdot \pi^2} \right] \cdot \cos\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) + \left[k \cdot \pi \cdot \frac{(-1)^{k+1} \cdot \sin(1) - \sin(2)}{(3 + k \cdot \pi) \cdot (-3 + k \cdot \pi)} - 3 \cdot \frac{(-1)^k}{\pi \cdot k} \right] \cdot \sin\left(\frac{k \cdot x \cdot \pi}{3}\right) \right]$$



Контроль.
Графики S(x,n) и Sum(x,n) совпадают. Следовательно, разложение данной функции f(x) на [-3, 3] в ряд Фурье *верное.*