ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение Высшего Профессионального Образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»
(МИИТ)

Кафедра: «Теоретическая и прикладная механика»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Задание на контрольную работу №1 с методическими указаниями
по дисциплине для студентов-бакалавров 3 курса
направления: **«Управление в технических системах»**

профиля: **«Системы и технические средства автоматизации и управления»**

Москва, 2013 г.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Целью контрольной работы **является формирование** у обучающихся **профессиональных компетенций и приобретение** обучающимися:

знаний о теоретических основах механики, методах составления и исследования уравнений статики, кинематики и динамики;

умений составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики, кинематики и динамики;

навыков владения принципами и методами моделирования, анализа, синтеза и оптимизации систем.

Задание на контрольную работу по дисциплине «Теоретическая механика» включает в себя 3 раздела: статика, кинематика, динамика.

В контрольной работе студент должен:

Раздел. Статика

- построить исходный рисунок и записать числовые значения величин;
- освободить конструкцию от связей, заменить их реакциями связей;
- составить уравнения равновесия и решить их;
- проанализировать результат.

Раздел. Кинематика

- построить механизм в масштабе;
- вычислить и построить скорости точек.

Раздел. Динамика

- выбрать метод решения задачи;
- сделать рисунок и показать все силы действующие на тело;
- показать известные скорости и ускорения точек тела;
- составить уравнение теоремы или принципа и решить.

Контрольную работу следует оформлять в соответствии с требованиями ЕСКД. Текстовая часть курсовой работы выполняется с использованием ЭВМ, и только рисунки можно делать карандашом. Работа должна содержать оглавление, текст самой работы и список используемой литературы. Текст работы должен начинаться с задания, сопровождаемого исходными данными в соответствии с выбранным вариантом, а затем последовательно излагается расчетная часть.

Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими пояснениями. Следует указать, какие теоремы, принципы и формулы использованы для решения задачи. Все промежуточные преобразования, расчеты должны быть показаны в решении и сопровождены необходимыми пояснениями. Все уравнения и формулы следует записывать сначала в общем виде, а затем подставлять вместо буквенных обозначений их числовые значения. Вычисления должны быть доведены до получения окончательного результата. В конце решения необходимо привести ответы. Обязательно указывать размерность искомых величин.

В настоящих заданиях приводится 20 вариантов для каждой задачи.

Номер варианта для всех задач курсовой работы выбирается студентом по двум последним цифрам его учебного шифра (табл. 1).

Таблица 1

Предпоследняя	Последняя	Номер варианта	Предпоследняя	Последняя	Номер варианта
цифра шифра			цифра шифра		
0;1;2;3;4	0	1	5;6;7;8;9	0	11
	1	2		1	12
	2	3		2	13
	3	4		3	14
	4	5		4	15
	5	6		5	16
	6	7		6	17
	7	8		7	18
	8	9		8	19
	9	10		9	20

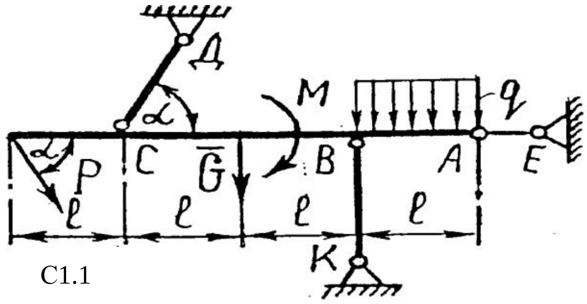
Например, шифрам с последними цифрами 51, 41, и 77 соответствуют варианты 12, 2 и 18.

Задача С1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

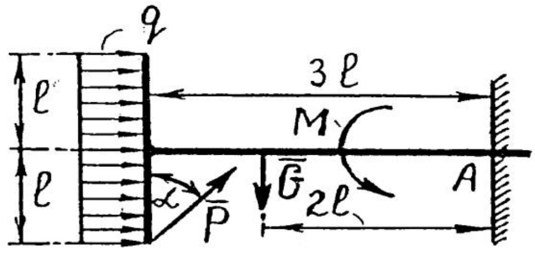
Определить реакции связей заданной плоской конструкции. Схемы конструкций указаны на рисунках С1.1 - С1.20, исходные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

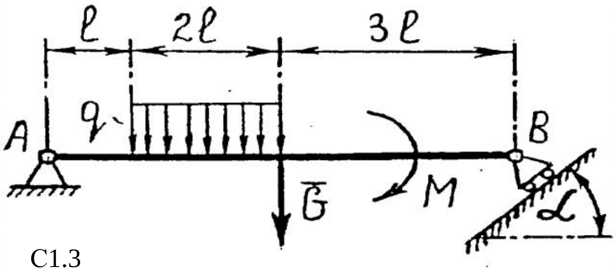
Номер варианта	P,кН	G,кН	M,кНм	q,кН/м	l,м	α,град.
С1.1	4	12	4	3	1	60^o
С1.2	10	6	5	2	1,5	45^o
С1.3	-	10	4	3	1	45^o
С1.4	15	-	3	4	1	45^o
С1.5	10	8	5	2	2	30^o
С1.6	6	9	3	5	2	60^o
С1.7	20	14	4	-	1	30^o
С1.8	14	-	6	2	1	30^o
С1.9	10	15	6	-	1	30^o
С1.10	16	-	10	3	1	60^o
С1.11	10	8	6	2	2	30^o
С1.12	15	12	8	1	1,5	60^o
С1.13	8	-	3	6	1	60^o
С1.14	10	-	4	2	1	45^o
С1.15	20	12	3	4	1	60^o
С1.16	15	5	2	3	1	30^o
С1.17	12	6	8	3	2	30^o
С1.18	8	-	3	2	1	45^o
С1.19	20	-	4	6	1	30^o
С1.20	15	10	5	-	1	30^o



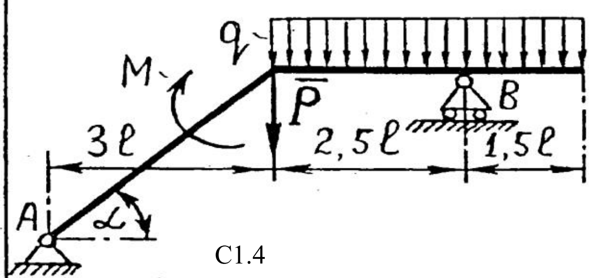
C1.1



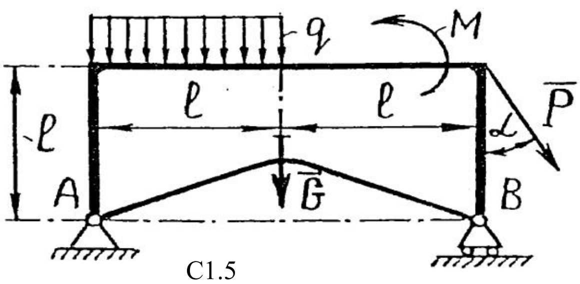
C1.2



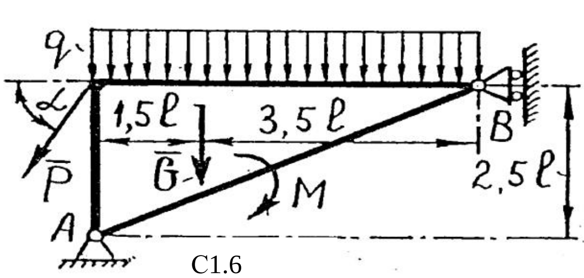
C1.3



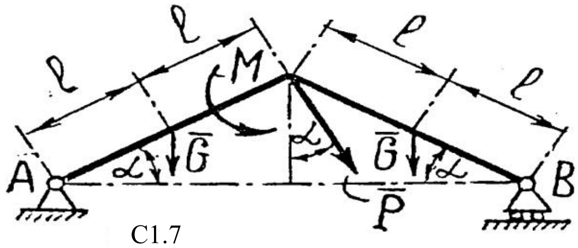
C1.4



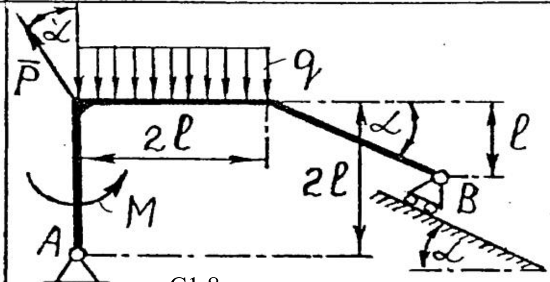
C1.5



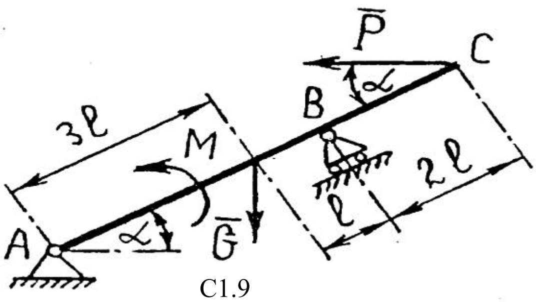
C1.6



C1.7

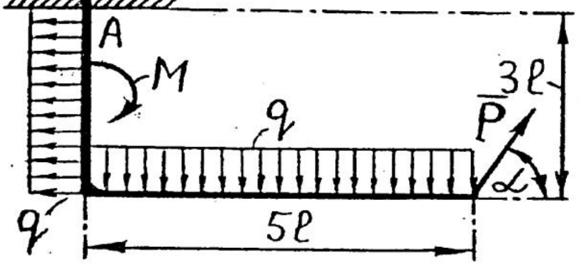


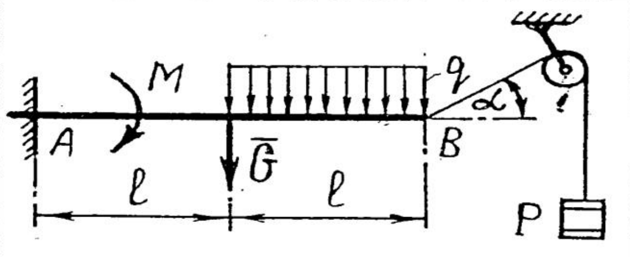
C1.8



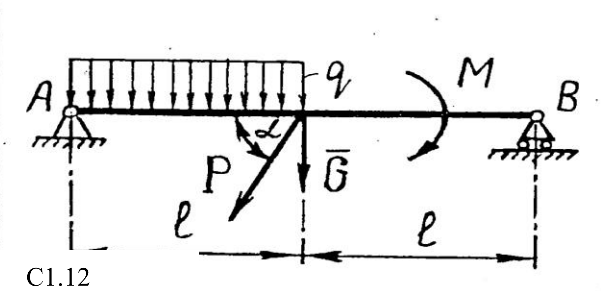
C1.9

C1.10



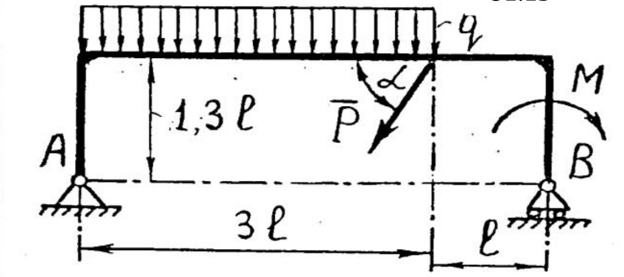


C1.11

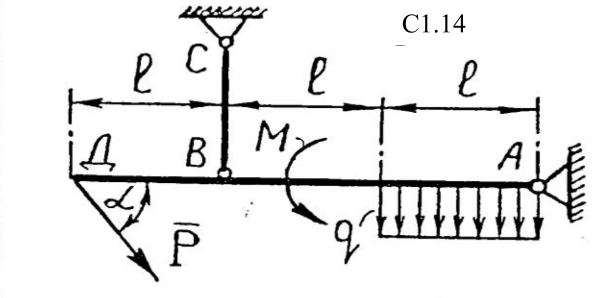


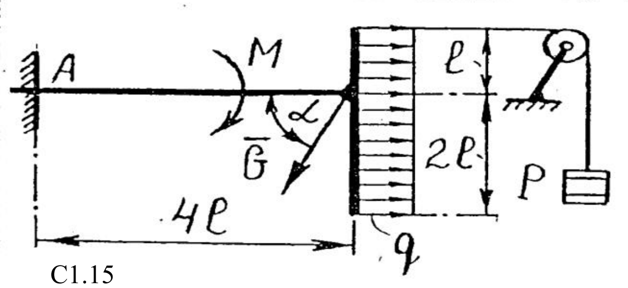
C1.12

C1.13

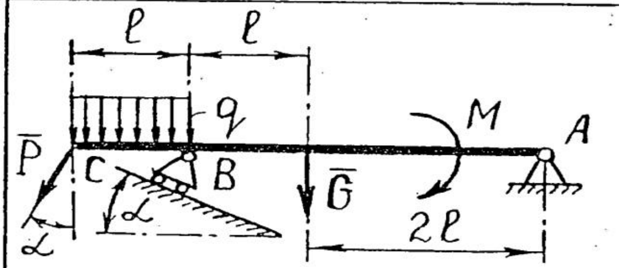


C1.14

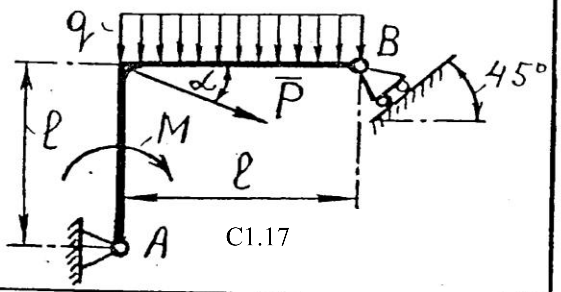




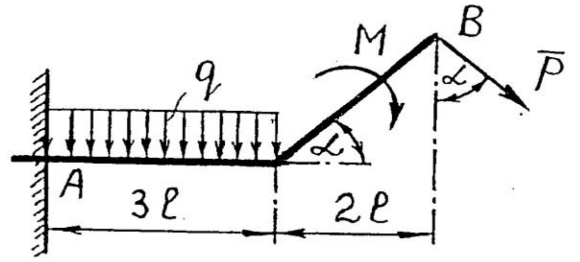
C1.15



C1.16

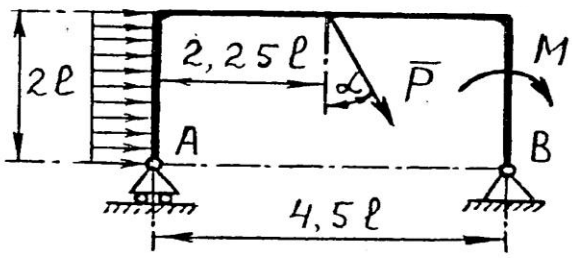


C1.17

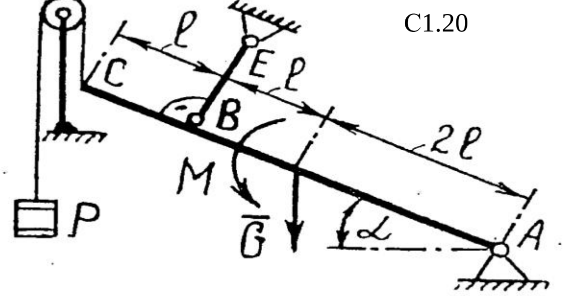


C1.18

C1.19

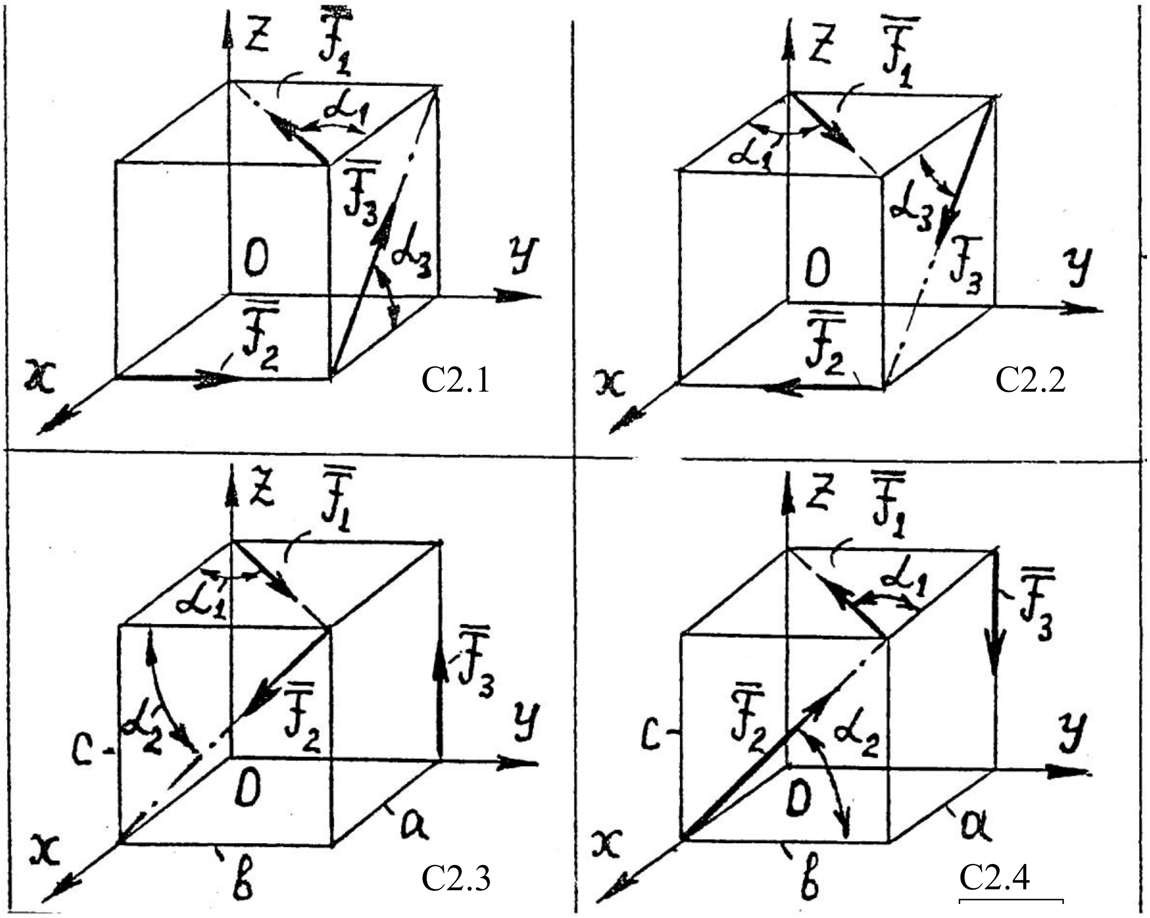


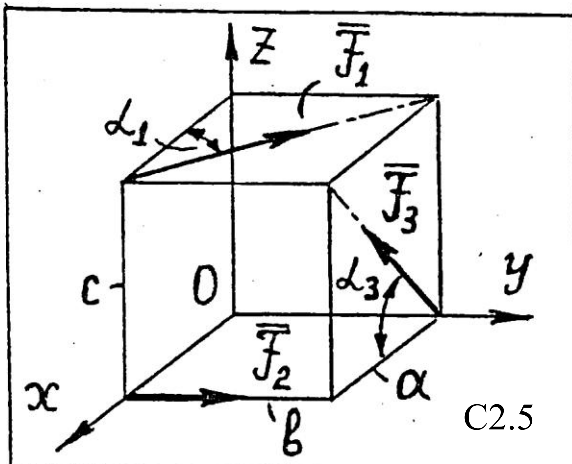
C1.20



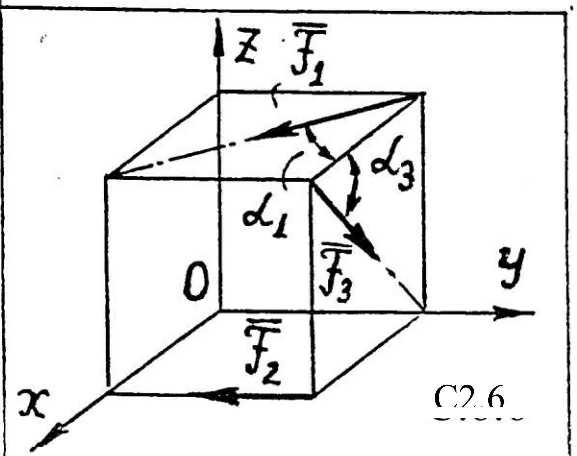
Задача С2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕЙСТВИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Определить модули главного вектора и главного момента относительно центра О пространственной системы сил (**F₁** , **F₂** , **F₃**). Силы приложены к вершинам прямоугольного параллелепипеда с ребрами а = 1 м, в = с = 3м, причем F_1 = 2кН, F_2 = 3кН, F_3= 5кН.

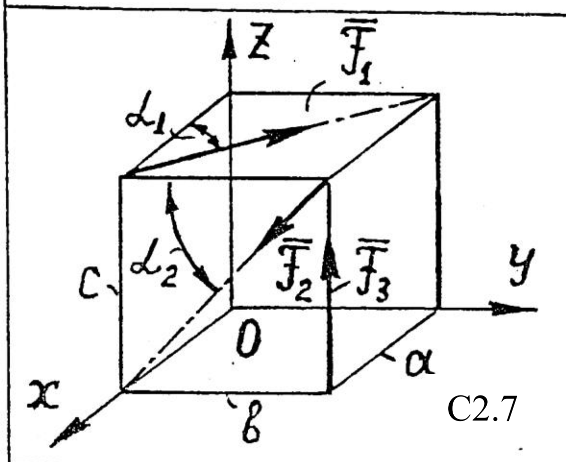




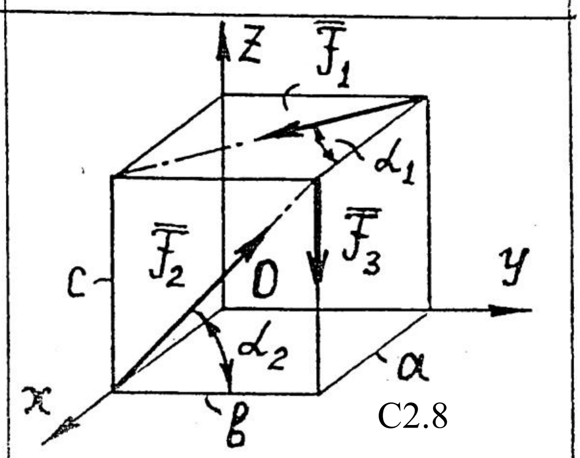
C2.5



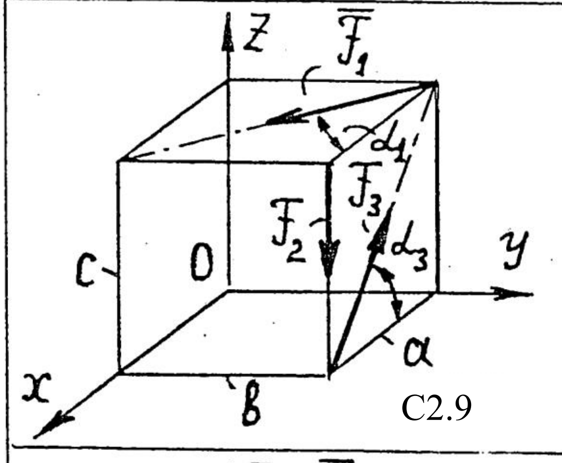
C2.6



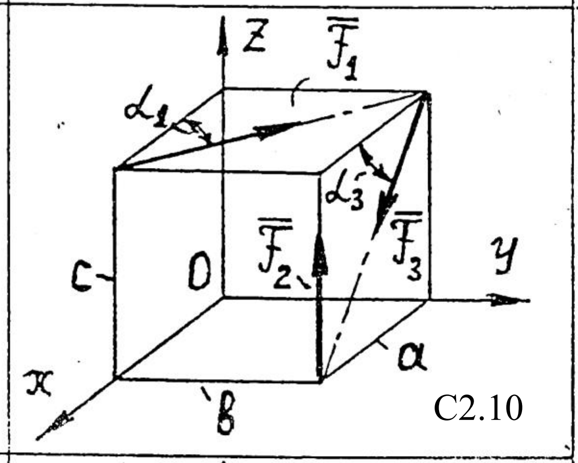
C2.7



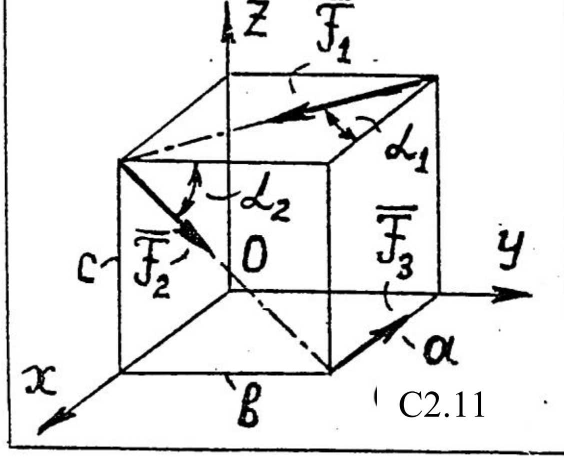
C2.8



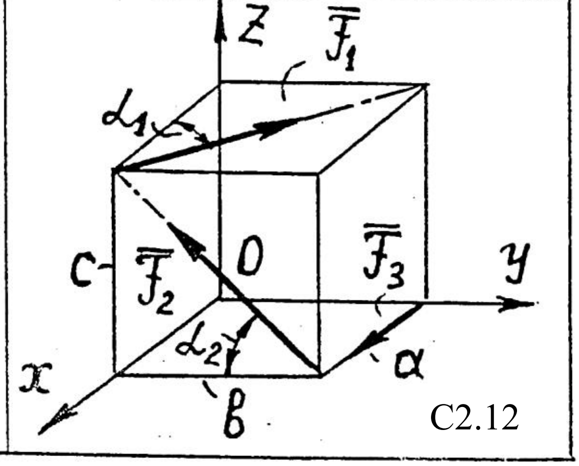
C2.9



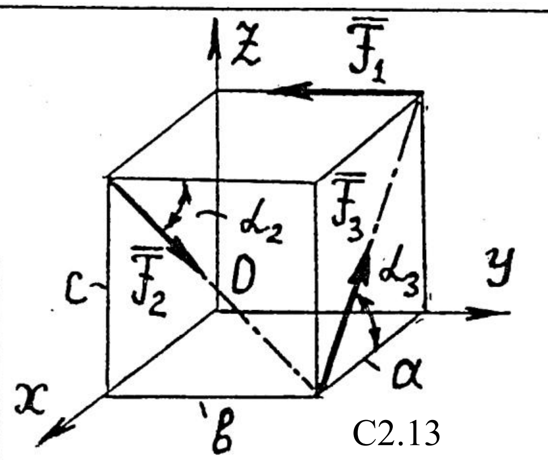
C2.10



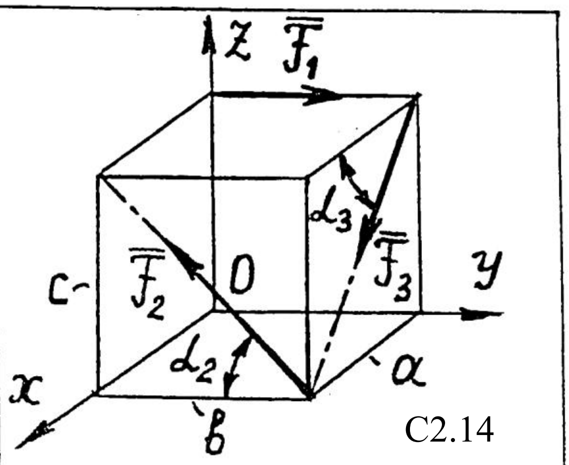
C2.11



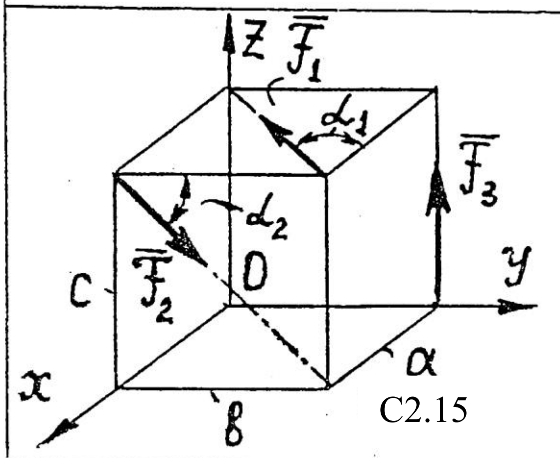
C2.12



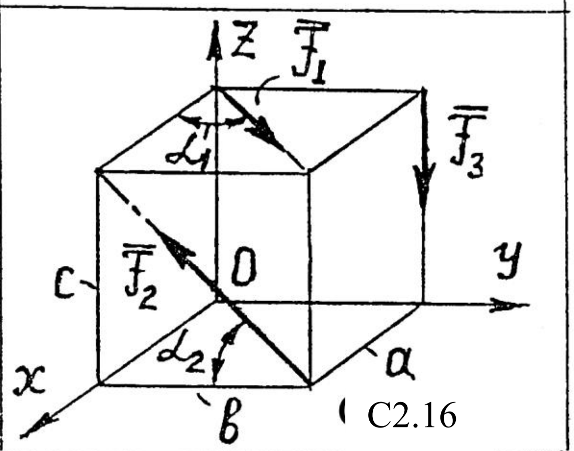
C2.13



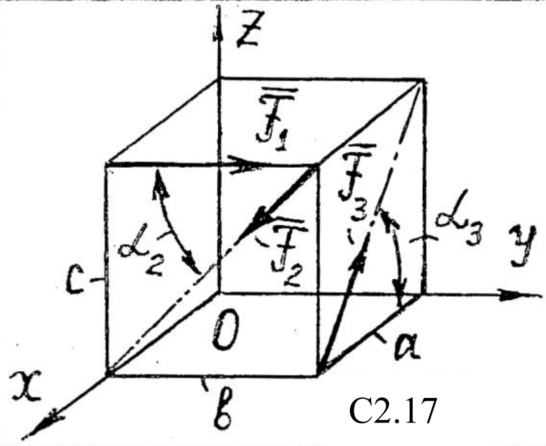
C2.14



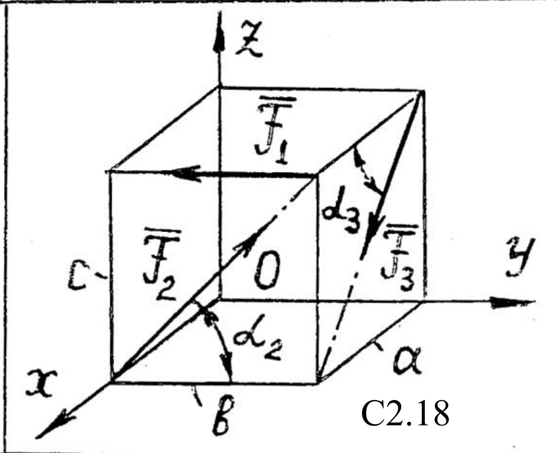
C2.15



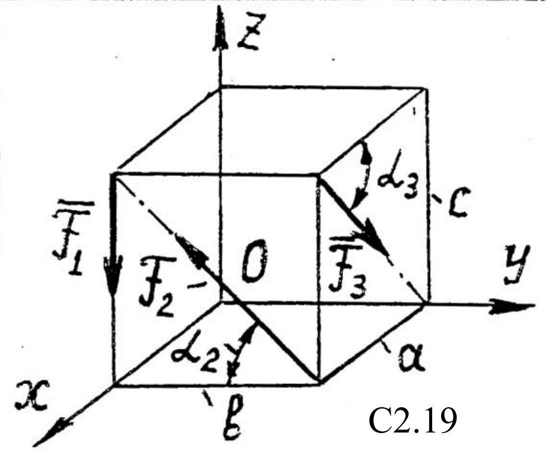
C2.16



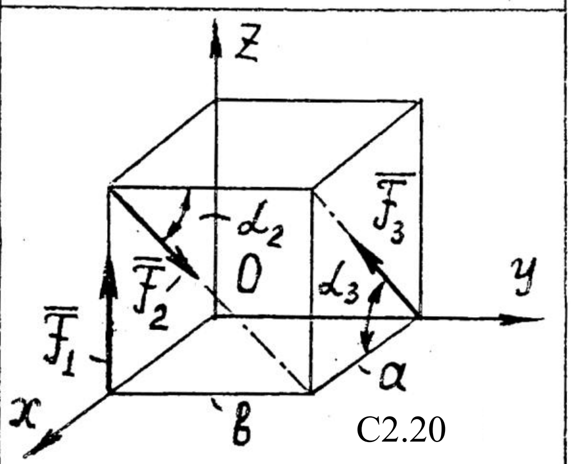
C2.17



C2.18



C2.19

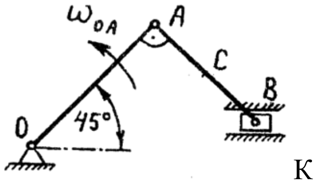
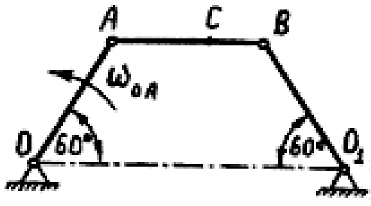
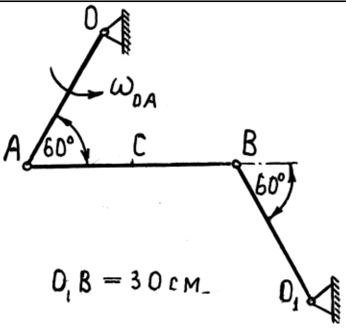
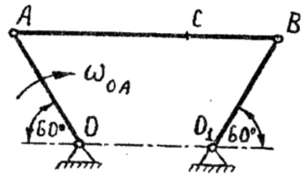
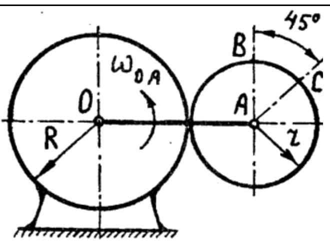
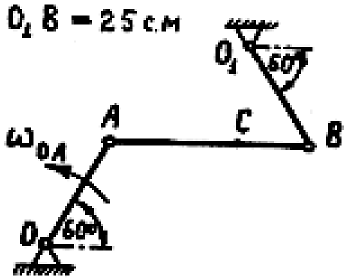
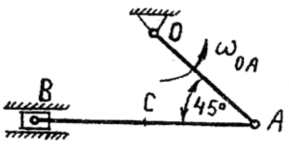
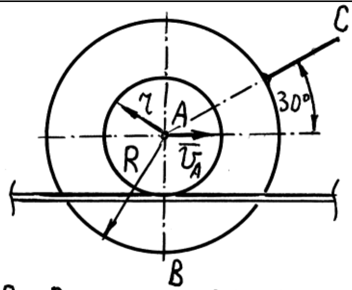


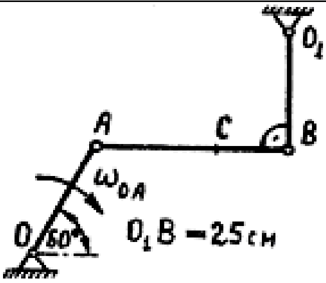
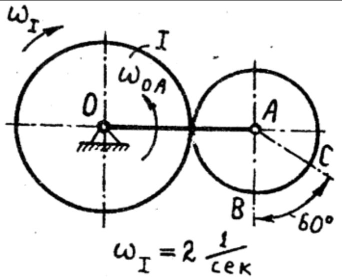
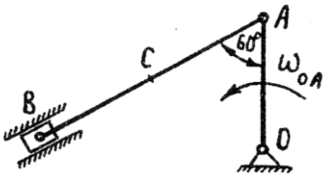
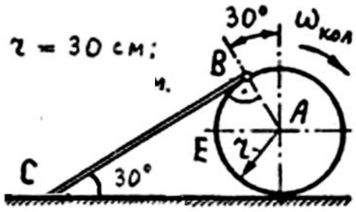
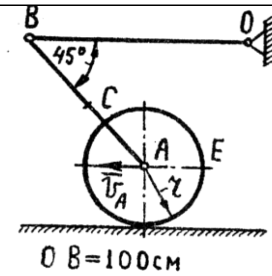
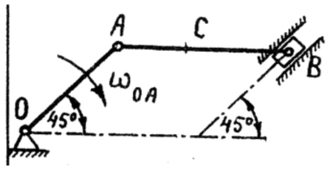
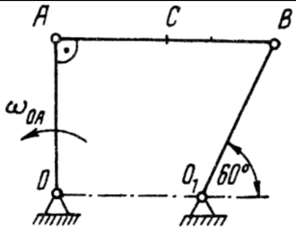
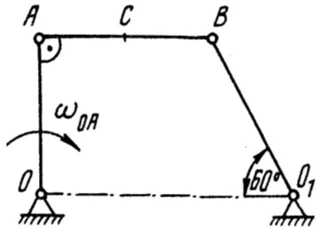
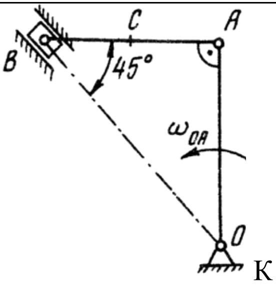
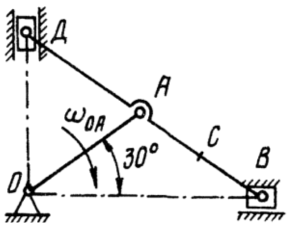
C2.20

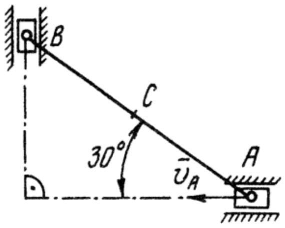
Задача К1

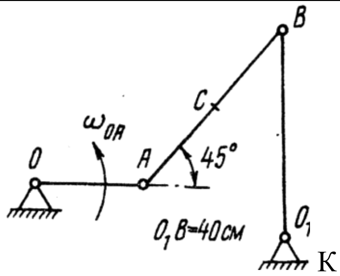
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для заданного положения механизма найти скорости точек В и С, а также угловую скорость звена, которому принадлежат эти точки. Схемы механизмов и необходимые для расчета данные показаны на рис. К6.1-К6.20.

 К1.1. OA=40см, AB=30см,AC=15см, $\omega_{OA}=2c^{-1}$.	 К1.2. OA=30см, AB=30см,AC=20см, $\omega_{OA}=4c^{-1}$.
 К1.3. OA=30см, AB=40см, AC=20см, $\omega_{OA}=2c^{-1}$.	 К1.4. OA=30см, AB=60см, AC=40см, $\omega_{OA}=2c^{-1}$.
 К1.5. OA=35см, AB=15см, AC=15см, $\omega_{OA}=3c^{-1}$.	 К1.6. OA=25см, AB=40см, AC=25см, $\omega_{OA}=3c^{-1}$.
 К1.7. OA=30см, AB=50см, AC=25см, $\omega_{OA}=3c^{-1}$.	 AB = R = 20см; AC = 35см. К1.8. r=10см , V_A=45см/с.

<table>
<tr>
<td>
К1.9.
OA=25см, AB=40см, AC=25см,
ω_{OA}=5с$^{-1}$.</td>
<td>
К1.10.
OA=35см, AB=15см, AC=15см,
ω_{OA}=6с$^{-1}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
К1.11.
OA=30см, AB=60см, AC=30см,
ω_{OA}=6с$^{-1}$.</td>
<td>
К1.12.
$\omega_{кол}$=3с$^{-1}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
К1.13.
AB=80см, AC=40см,
r=25см , V_A=100см/с.</td>
<td>
К1.14.
OA=30см, AB=40см, AC=15см,
ω_{OA}=4с$^{-1}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
К1.15.
OA=30см, AB=50см, AC=25см,
ω_{OA}=3с$^{-1}$.</td>
<td>
К1.16.
OA=30см, AB=40см, AC=20см,
ω_{OA}=2с$^{-1}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
К1.17.
OA=40см, AB=40см, AC=20см,
ω_{OA}=5с$^{-1}$.</td>
<td>
К1.18.
OA=30см, AB=30см, AC=15см,
ω_{OA}=4с$^{-1}$.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

К1.19.
AB=70см, AC=35см,
V_A=35см/с.</td>
<td>

К1.20.
OA=25см, AB=45см, AC=22.5см,
$\omega_{OA}=3c^{-1}$.</td>
</tr>
</table>

Задача Д1
ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Д1.1. Гиря массы ***m = 0,2 кг*** подвешена к нити длиной ***l = 1 м,*** вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость **V =** ***3 м/с.*** Определить натяжение нити непосредственно после толчка.	**Д1.2.** Груз, привязанный к нити длиной ***l***, движется по окружности в вертикальной плоскости. Какую минимальную скорость в наивысшем положении должен иметь груз, чтобы нить оставалась натянутой?
Д1.3. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой ***m*=3кг** в момент времени ***t* = 6 с**, если она движется по оси Ох согласно уравнению $x = 0.4t^3 + 21t$.	**Д1.4**. Вагон массой ***m=9000 кг*** скатывается с горки . Какой угол к горизонту должна иметь горка, для того чтобы вагон двигался с ускорением $a = 3$ *м/с*^{2}? Угол выразить в градусах.
Д1.5. Точка массой ***m = 4 кг*** движется по горизонтальной прямой с ускорением $a = 0{,}3t$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени ***t = 3 с***.	**Д1.6**. Груз массы ***m = 0,1 кг,*** подвешенный на нити длиной ***l = 0,4м*** в неподвижной точке О, представляет собой конический маятник, то есть описывает окружность в горизонтальной плоскости, причём нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Определить скорость груза и натяжение нити.
Д1.7. Автомобиль массы ***m = 1500 кг*** движется по вогнутому, участку дороги со скоростью ***V = 10 м/с.*** Радиус кривизны в нижней точке дороги $\rho = 60$ ***м***. Определить силу давления автомобиля на дорогу в момент прохождения этого участка дороги.	**Д1.8**. Локомотив, двигаясь с ускорением $a = 1$ *м/с*^{2} по горизонтальному участку пути, перемещает вагоны массой 60000 кг. Определить силу в автосцепке, если сила сопротивления движению состава равна $F_c = 0.002mg$.
Д1.9. Тело массой ***m = 4 кг*** движется по горизонтальной прямой со скоростью $V = 0{,}9t^2 + 2t$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени *t* = 3 с.	**Д1.10**. Искусственный спутник Земли описывает круговую орбиту радиуса R на небольшой высоте над поверхностью Земли (изменением силы тяжести на этой высоте по сравнению с силой тяжести на поверхности Земли можно пренебречь). Определить скорость движения спутника по орбите и время одного оборота спутника. Радиус Земли ***R= 6380 км***.
Д1.11. Материальная точка массой m=2 кг движется по окружности радиуса R = 0,6 м согласно уравнению $S = 2{,}4t^2$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к материальной точке.	**Д1.12**. Материальная точка массой ***m=100кг*** движется в плоскости ***Oxy*** согласно уравнениям $x = at^2$, $y = bt$, где ***a=10 и b=100 -*** постоянные. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке.
Д1.13. Груз массы m = 100 кг, подвешенный к концу намотанного на барабан троса, движется с ускорением ***a = 0,2 g***. Определить натяжение троса при подъёме и опускании груза.	**Д1.14**. Материальная точка массой ***m = 16 кг*** движется по окружности радиуса ***R = 9 м*** со скоростью ***V=3 м/с***. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на главную нормаль к траектории.
Д1.15. Материальная точка массой ***m*= 9 кг** движется в горизонтальной плоскости *Oxy* с ускорением $a = 4\bar{i} + 3\bar{j}$. Определить модуль силы, действующей на нее в плоскости движения.	**Д1.16** .Движение материальной точки массой ***m = 8 кг*** происходит в горизонтальной плоскости ***Oxy*** согласно уравнениям $x = 5t$ и $y = t^3$. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени t = 4 с.
Д1.17. Автомобиль массы ***m = 1500 кг***	**Д1.18**. Решето рудообогатительного грохота совершает

движется по выпуклому участку дороги со скоростью **V** = ***10 м/с***. Радиус кривизны в верхней точке дороги ρ = ***60 м***. Определить силу давления автомобиля на дорогу в момент прохождения этого участка дороги.	вертикальные гармонические колебания с амплитудой ***b*=*5 см***. Найти наименьшую частоту ***k*** колебаний решета, при котором куски руды, лежащие на нём, отделяются от него и подбрасываются вверх.
Д1.19. Материальная точка массы **m** движется в плоскости согласно уравнениям $x = a\cos\omega t;\ y = b\sin\omega t$. Найти силу, действующую на точку.	**Д1.20**. Определить давление человека массой **m = 80 кг** на площадку лифта в начале подъёма и перед остановкой; ускорение (замедление) лифта **a = 0,2g**.

Задача Д2

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Д2.1. Вагон массой m ударяет в пружинный амортизатор жёсткостью c, имея в момент начала удара скорость V_0 . Определить максимальную деформацию пружины амортизатора, пренебрегая её массой и полагая её недеформированной перед ударом.
Д2.2. Маховое колесо радиуса R и веса P вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Колесо останавливают с помощью тормозной колодки силой P, линия действия которой проходит через ось маховика перпендикулярно этой оси. Найти коэффициент трения между тормозной колодкой и ободом колеса, если оно до остановки сделало N оборотов. Трением в подшипниках пренебречь.
Д2.3. Барабан массой m и радиусом r приводится во вращательное движение из состояния покоя моментом M. Определить ускорение поднимаемого с помощью троса груза массой m_1 . Барабан считать однородным цилиндром, массой троса пренебречь.
Д2.4. Транспортёр приводится в движение из состояния покоя моментом M, приложенным к нижнему шкиву. Определить ускорение груза массой m, если шкивы А и В радиусом r и массой m_1 каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортёра, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам и груза по ленте отсутствует.
Д2.5. Тележка начинает движение из состояния покоя под действием момента M, приложенного к передним колёсам. Масса тележки без колёс равна m_1 масса каждого из четырёх колёс радиусом r равна m_2 , коэффициент трения качения δ. Определить ускорение тележки, считая колёса однородными дисками.
Д2.6. Тележка начинает движение без скольжения из состояния покоя под действием горизонтальной силы P. Масса тележки без колёс равна m_1 масса каждого из четырёх колёс радиусом r равна m_2, коэффициент трения качения δ. Определить скорость тележки, считая колеса однородными дисками.
Д2.7. Чему равна кинетическая энергия зубчатой передачи двух цилиндрических колес с числом зубьев $z_2= 2z_1$, если их момент инерции относительно осей вращения $I_2= 2\ I_1=6$ *кгм*^{2}, а угловая скорость колеса 1 равна $\omega_1=10$ *рад/с*.
Д2.8. На горизонтальный вал диаметром d насажен маховик диаметром D делающий n *[об/мин]*. Определить коэффициент трения скольжения между валом и подшипниками, если после выключения привода маховик сделал N оборотов до остановки. Массу маховика считать равномерно распределённой по его ободу. Массой вала пренебречь.
Д2.9. Шар весом P, лежащий на пружине с коэффициентом жёсткости c, вызывает статическую осадку пружины ***0,025 м***. Какова будет осадка пружины, если тот же шар упадёт на пружину с высоты $h = 0{,}1$ ***м.*** Массой пружины пренебречь.
Д2.10. Оси колеса радиусом r, находящемуся на горизонтальной плоскости, сообщили скорость V_0. Коэффициент трения качения равен δ. Определить путь, пройденный колесом до остановки. Качение колеса происходит без скольжения. Колесо считать однородным диском.
Д2.11. Однородный диск массой $m= 30$ ***кг*** радиуса $R=1$ ***м*** начинает вращаться из состояния покоя равноускорено с постоянным угловым ускорением $\varepsilon=2$***рад/с***^{2}. Определить кинетическую энергию диска в момент времени $t=2$***с*** после начала движения.
Д2.12. Снаряд массой m вылетает из ствола орудия со скоростью V_0. Длина ствола орудия l. Найти силу среднего давления газов на снаряд.

Д2.13. Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса ***R*** для того, чтобы оно, катясь без скольжения, поднялось на высоту ***H*** по наклонной плоскости, образующей угол $\boldsymbol{\alpha}$ с горизонтом? Коэффициент трения качения равен $\boldsymbol{\delta}$. Колесо считать однородным диском.
Д2.14. Стержень длиной ***l*** подвешен на шарнире О. Какую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он поднялся до горизонтального положения?
Д2.15. Однородная цепочка длиной ***l*** лежит на гладком горизонтальном столе, и часть её свешивается. Предоставленная самой себе, цепочка соскальзывает со стола. Найти скорость цепочки в тот момент, когда она вся сойдёт со стола, если в начальный момент длина свешивающейся части незначительна.
Д2.16. Лыжник скатывается с горки. Длина горки **- *l*,** угол наклона горки с горизонтом **-** $\boldsymbol{\alpha}$, коэффициент трения между лыжами и снегом – ***f*.** Найти расстояние, пройденное лыжником на горизонтальном участке до остановки.
Д2.17. Какую скорость приобрёл бы камень при падении без начальной скорости с высоты ***H*,** если бы не было сопротивления воздуха?
Д2.18. Груз массой ***m*** подвешен к недеформированной пружине жёсткостью ***c*** и отпущен без начальной скорости. Найти наибольшее расстояние, на которое опустится груз.
Д2.19. Шар весом ***P***, лежащий на пружине с коэффициентом жёсткости ***c*** , вызывает статическую осадку пружины ***0,025 м***. Какова будет осадка пружины, если тот же шар упадёт на пружину с высоты ***h* = *0,1 м***. Массой пружины пренебречь.
Д2.20. Пружина имеет в ненапряжённом состоянии длину ***20 см*.** Сила, необходимая для изменения её длины на ***0,01 м*,** равна ***1,96 Н***. С какой скоростью ***V*** вылетит из трубки шарик массой ***0,03 кг***, если пружина была сжата до длины ***0,1 м*.** Трубка с пружиной расположена горизонтально.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1 (рис. 1, рис. 2)

Найти реакции связей изогнутой балки АВС, находящейся под действием плоской системы сил . Вычисление реакций выполнить при *a = 1,2 м, b = 2,4 м, l = 1,8 м, α = 30^o, P_1 = 8 кН, P_1 = 6 кН, М = 8 кНм.*

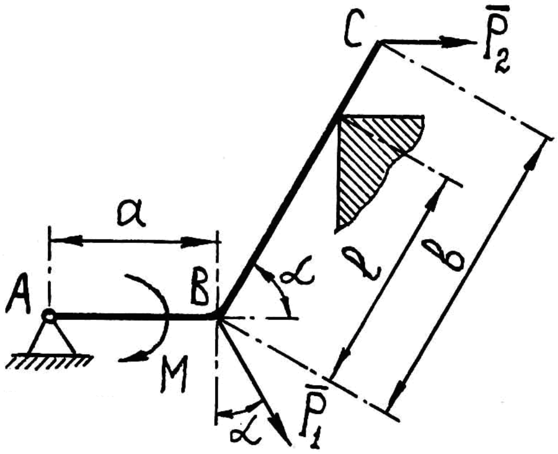


Рис. 1

Решение

Освободим балку от связей и приложим к ней реакции связей. На рис.2 $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А. $\vec{R}_{Д}$ – реакция выступа стены ($\vec{R}_{Д} \perp BC$).

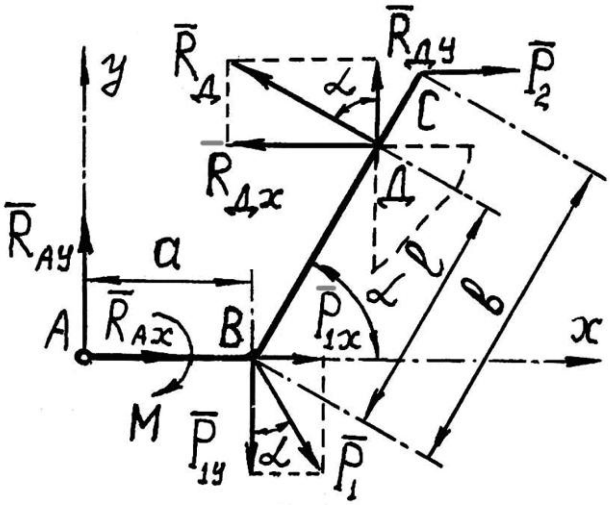


Рис. 2

Разложим силы $\vec{P}_1$ и $\vec{R}_{Д}$ на составляющие вдоль осей координат

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_{1x} + \vec{P}_{1y}; \qquad \vec{R}_{Д} = \vec{R}_{Дx} + \vec{R}_{Дy}.$$

Условия равновесия балки имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} + P_1 \sin\alpha - R_{Д} \sin 2\alpha + P_2 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} - P_1 \cos\alpha + R_{Д} \cos 2\alpha = 0;$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \qquad -P_2 b \sin 2\alpha + (R_{Д} \sin 2\alpha) l \sin 2\alpha + (R_{Д} \cos 2\alpha)(a + l \cos 2\alpha) -$$
$$-(P_1 \cos\alpha) a - M = 0$$

После решения составленной системы уравнений получаем

$$R_{Ax} = -1{,}04 кН, \qquad R_{Ay} = 1{,}27 кН, \qquad R_Д = 10{,}34 кН.$$

Задача 2 (рис. 3, рис. 4)

Определить реакции изогнутой балки ABC, находящейся под действием плоской системы сил. Вычисление реакций выполнить при l = 1 м, α = 60°, P = 20 кН, M = 25 кНм (момент пары сил), q = 3 кН/м (интенсивность равномерно распределенной нагрузки).

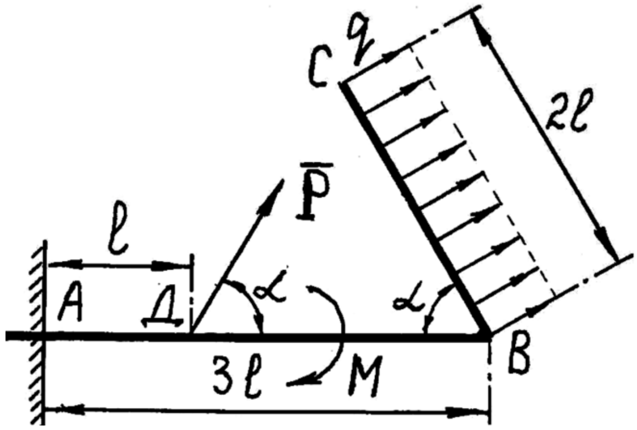


Рис. 3

Решение:

Освободим балку от связей и приложим к ней реакции связей. На рис. 4 $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции заделки вдоль осей координат, m_A – момент заделки (момент пары сил).

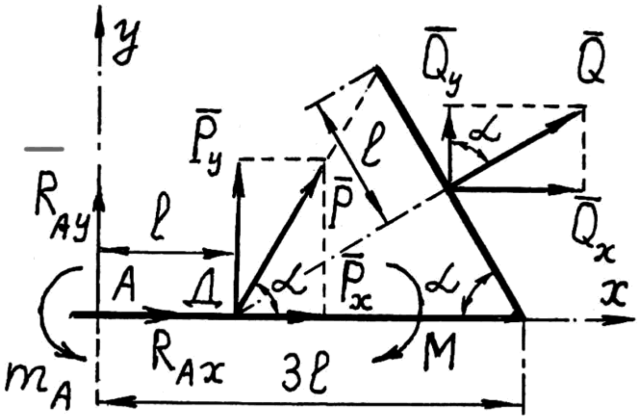


Рис.4

Заменим равномерно-распределенную нагрузку на участке ВС равнодействующей силой $\vec{Q}$, причем $Q = q \times 2l = 6 кН$.

Разложим силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ на составляющие вдоль осей координат

$$\vec{Q} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y; \qquad \vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y.$$

Составим уравнения равновесия балки

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} + P\cos\alpha + Q\sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} + P\sin\alpha + Q\cos\alpha = 0;$$

$$\sum m_Д(F_k)=0; \qquad m_A - M - R_{Ay}l = 0.$$

Из этой системы уравнений находим

$$R_{Ax}=15{,}2кН, \qquad R_{Ay}=-20{,}32кН, \qquad m_A=4{,}68кНм.$$

Задача 3 (рис. 5, рис. 6)

К изогнутой балке АВСД приложены силы $P_1 = 5$ *кН,* $P_2 = 4$ *кН* и пара сил с моментом $M = 8$ *кНм* . Размеры $a = 1{,}5$ *м,* $в = 1{,}8$ *м,* $h = 1{,}2$ *м,* $\alpha = 30^o$. Определить реакции балки.

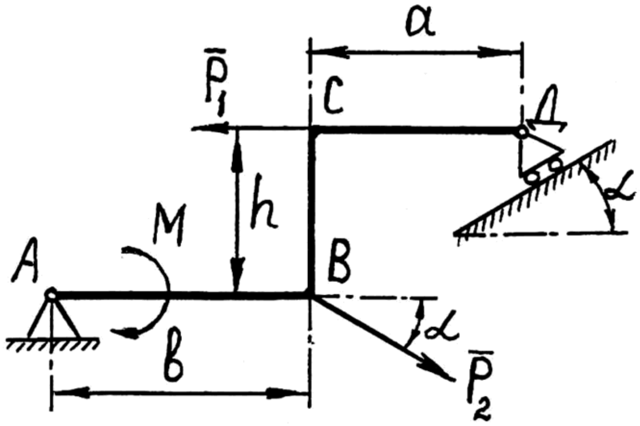


Рис. 5

Решение (рис. 6)

Освободим балку от связей, приложим к ней реакции связей. На рис.6 $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А, $\vec{R}_Д$ – реакция подвижного шарнира Д. Заметим, что реакция $\vec{R}_Д$ направлена перпендикулярно плоскости, по которой могут перемещаться катки тележки шарнира Д.

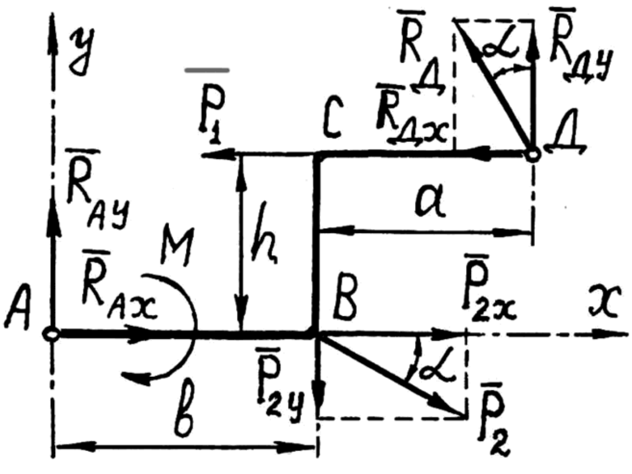


Рис. 6

Разложим силы $\vec{P}_1$ и $\vec{R}_Д$ на составляющие вдоль осей координат:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_{1x} + \vec{P}_{1y}; \qquad \vec{R}_Д = \vec{R}_{Дx} + \vec{R}_{Дy}.$$

Составим уравнения равновесия балки:

$$\sum F_{kx}=0; \qquad R_{Ax} - P_1 + P_2\cos\alpha - R_Д\sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky}=0; \qquad R_{Ay} - P_2\sin\alpha + R_Д\cos\alpha = 0;$$

$$\sum m_A(F_k)=0; \qquad (R_Д \cos\alpha)(a+b)+(R_Д \sin\alpha)h-(P_2 \sin\alpha)b+P_1 h-M=0.$$

Решаем эту систему уравнений и находим неизвестные величины:

$$R_{Ax}=2{,}34кН, \qquad R_{Ay}=0{,}6кН, \qquad R_Д=1{,}62кН.$$

Задача 4 (рис. 7, рис. 8)

Определить реакции связей плиты АВСД, находящейся под действием плоской системы сил. Невесомый стержень СЕ образует угол α с горизонталью. Вычисление реакций выполнить при заданных размерах *a = 1,6 м, b = 1,2 м, h = 1,2 м, α = 60^o, P_1 = 15 кН, P_2 = 10 кН, M = 8кНм.*.

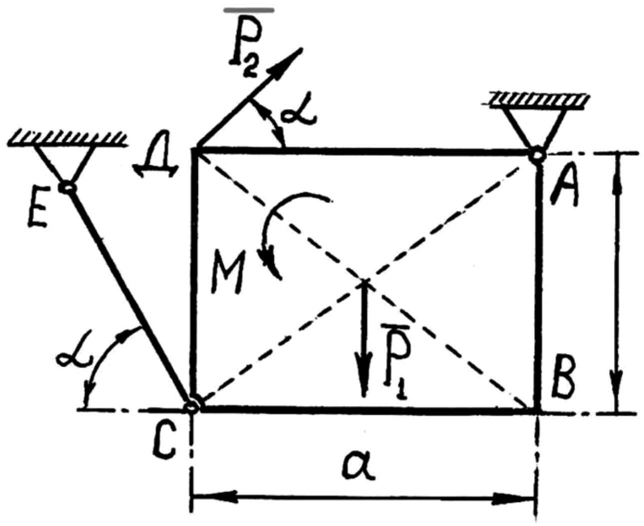


Рис. 7

Решение (рис. 8)

Освободим плиту от связей, приложим к ней реакции связей. На схеме показаны: $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А, $\vec{R}_C$ – реакция подвижного шарнира С, направленная вдоль стержня СЕ. Силу $\vec{P}_2$ разложим на составляющие

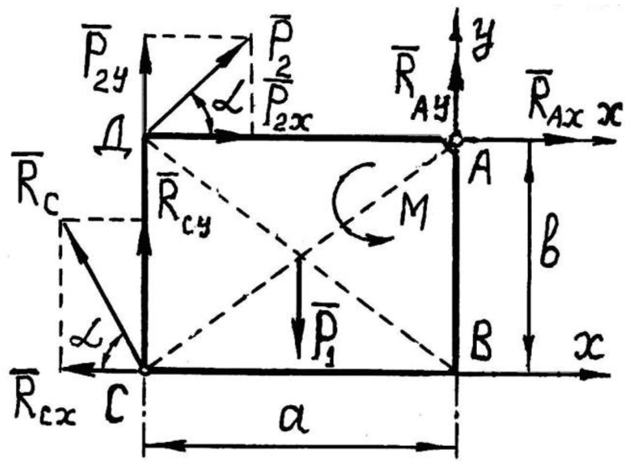


Рис. 8

$$\vec{P}_2=\vec{P}_{2x}+\vec{P}_{2y}.$$

Уравнения равновесия плиты имеют вид

$$\sum F_{kx}=0; \qquad R_{Ax}+P_2\cos 45^o - R_C\cos 60^o = 0;$$

$$\sum F_{ky}=0; \qquad R_{Ay}+P_2\sin 45^o + R_C\sin 60^o = 0;$$

$$\sum m_A(F_k)=0; \qquad -(R_C\sin 60^o)a-(R_C\cos 60^o)b-(P_2\sin 45^o)a+P_1a/2+M=0$$

Из решения этой системы уравнений находим

$$R_{Ax}=-0{,}6кН, \qquad R_{Ay}=-18{,}26кН, \qquad R_Д=12{,}92кН.$$

Задача 5 (рис. 9, рис. 10)

Определить модули главного вектора и главного момента системы сил, изображенной на рисунке, если F_1 = 6 кН, F_2 = 4 кН, F_3 =3 кН. Силы приложены в вершинах прямоугольного параллелепипеда со сторонами 5, 3 и 4 м.

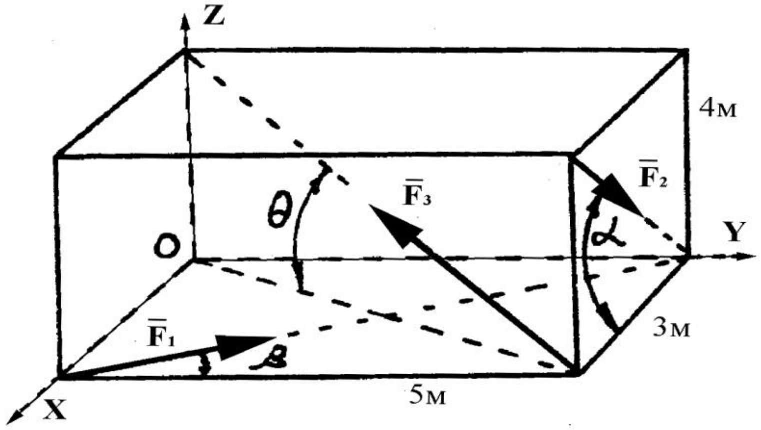


Рис. 9

Обозначим углы α, β, θ , как показано на рисунке 9. В ходе решения понадобятся значения синусов и косинусов этих углов, которые определим ниже.

$$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} \quad ,\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}},$$

$$\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}} \quad ,\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}},$$

$$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}} \quad ,\cos\theta=\frac{\sqrt{5^2+3^2}}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}}.$$

Находим проекции главного вектора на оси координат

$$R_x=\sum F_{kx}; \qquad R_x=-F_1\sin\beta-F_3\cos\theta\sin\beta-F_2\cos\alpha;$$

$$R_y=\sum F_{ky}; \qquad R_y=F_1\cos\beta-F_3\cos\theta\cos\beta;$$

$$R_z=\sum F_{kz}; \qquad R_z=F_3\sin\theta-F_2\sin\alpha.$$

Определяем значения проекций главного вектора:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}.$$

Подставляем численные значения величин в эти уравнения и определяем числовые значения проекций главного вектора, которые равны:R_x = -6.8 кН; R_y = 3 кН; R_z = -1.5 кН; R = 7.6кН.

Вычислим проекции главного момента M_0 на оси координат рис.10.

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на перпендикулярную оси плоскость, относительно точки пересечения оси и плоскости. Момент будет равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или линия действия силы пересекает ось.

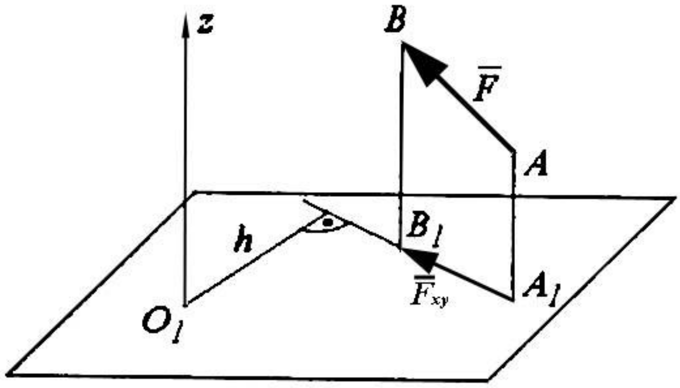


Рис. 10

Момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила F, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус - по ходу часовой стрелки.

Проекции главного момента M_0 на оси координат и величина этого момента определяются по формулам

$$M_x = \sum m_{kx}; \qquad M_x = 5 \cdot F_3 \sin\theta - 5 \cdot F_2 \sin\alpha;$$
$$M_y = \sum m_{ky}; \qquad M_y = -3 \cdot F_3 \sin\theta;$$
$$M_z = \sum m_{kz}; \qquad M_z = 3 \cdot F_1 \cos\beta + 5 \cdot F_2 \cos\alpha.$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

После подстановки численных значений, получим M_x = -7.5 кНм; M_y = -5.1 кНм; M_z = 27.4 кНм; M_0 = 28.9 кНм.

Задача 6 (рис. 11)

Колесо радиуса R = 0,6 [м] катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость его центра С постоянна и равна V_C = 12 [м/с].

Найти угловую скорость колеса и скорости концов M_1, M_2, M_3, M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса.

Решение (рис. 11)

Колесо совершает плоско – параллельное движение. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке M_1 контакта горизонтальной плоскости, то есть

V_{M1} = 0.

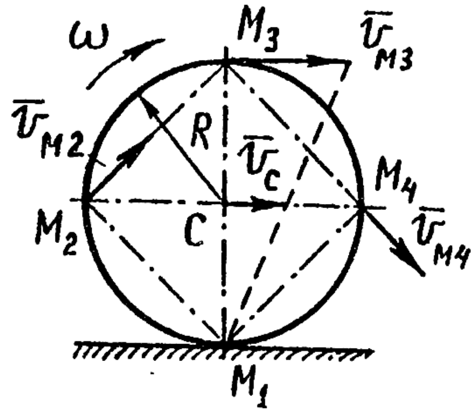


Рис. 11

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CM_1} = \frac{V_C}{R} = \frac{12}{0,6} = 20 \quad [1/с] .$$

Находим скорости точек M_2 , M_3 и M_4

$$V_{M2} = \omega \cdot M_2M_1 = \frac{V_C}{R} R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 16,92 \quad [м/с]$$

$$V_{M3} = \omega \cdot M_3M_1 = \frac{V_C}{R} 2r = 2V_C = 24 \quad [м/с]$$

$$V_{M4} = \omega \cdot M_4M_1 = \frac{V_C}{R} R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 16,92 \quad [м/с]$$

$\bar{V}_{M2} \perp M_2M_1$; $\bar{V}_{M3} \perp M_3M_1$; $\bar{V}_{M4} \perp M_4M_1$.

Задача 7 (рис. 12)

Ведущее колесо автомобиля радиуса R = 0,5 [м] катится со скольжением (с буксованием) по прямолинейному участку шоссе; скорость его центра С постоянна и равна V_C = 4 [м/с]. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке Р на расстоянии h = 0,3 [м] от плоскости качения. Найти угловую скорость колеса и скорости точек А и В его вертикального диаметра.

Решение (рис. 12)

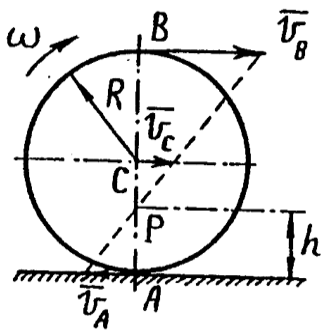


Рис. 12

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R-h} = \frac{4}{0,5-0,3} = 20 \quad [1/с]$$

Находим скорости точек А и В

$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot h = 20 \cdot 0{,}3 = 6$ [м/с]

$V_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (2R - h) = 20 \cdot 0{,}7 = 14$ [м/с];

$\overline{V}_A \perp AP$; $\overline{V}_B \perp BP$.

Задача 8 (рис. 13)

Ведомое колесо автомобиля радиуса R = 0,5[м] катится со скольжением (с юзом) по прямолинейному участку шоссе; скорость его центра С постоянна и равна V_C = 9 [м/с]. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке Р на расстоянии h = 0,4 [м] от плоскости качения. Найти угловую скорость колеса и скорости точек А и В его вертикального диаметра.

Решение (рис. 13)

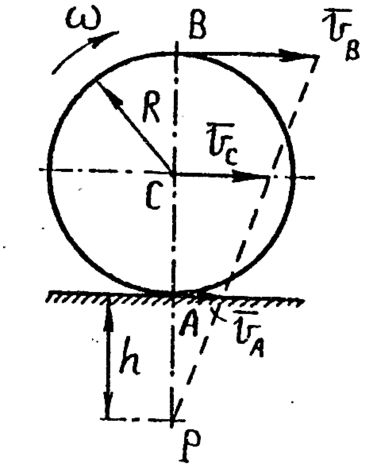


Рис. 13

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R+h} = \frac{9}{0{,}5+0{,}4} = 10 \text{ [1/c]}$$

Находим скорости точек А и В

$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot h = 10 \cdot 0{,}4 = 4$ [м/с]

$V_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (R + h) = 10 \cdot 1{,}4 = 14$ [м/с];

$\overline{V}_A \perp AP$; $\overline{V}_B \perp BP$.

Задача 9 (рис. 14, рис. 15)

Для заданного положения механизма, найти скорости точек А, В, С, Д и угловые скорости звена АВ и колеса с ребордой, катящегося без скольжения. Дана угловая скорость кривошипа ОА и размеры: $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, ОА = 0,3 м, АВ = 0,4 м, R = 0,15 м, r = 0,1 м.

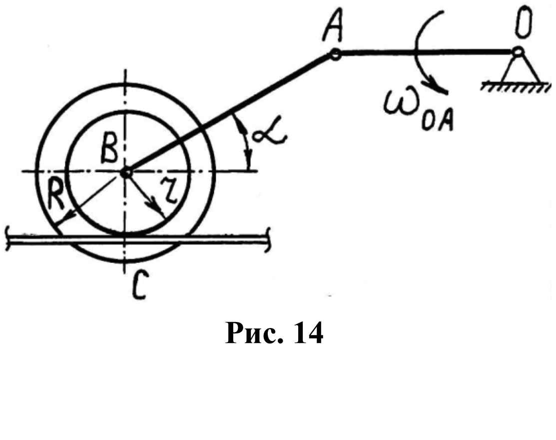


Рис. 14

Решение (рис. 15)

Кривошип OA совершает вращательное движение, звено AB и колесо – плоскопараллельное движение.

Находим скорость точки A звена OA $v_A = \omega_{OA} OA = 2 \times 0{,}3 = 0{,}6 мс^{-1}$.

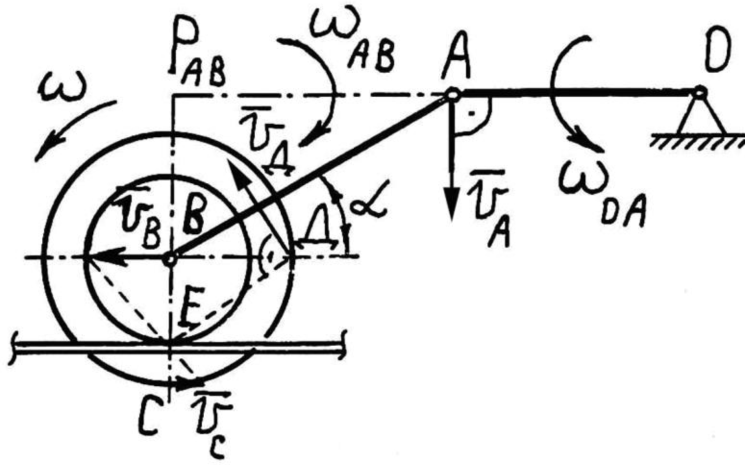


Рис. 15

Зная направление скоростей точек A и B звена AB, определяем положение его мгновенного центра скоростей – точку P_{AB}. ($\vec{v}_A \perp OA$; вектор $\vec{v}_B$ направлен по горизонтали).

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_{AB}}{AP_{AB}\cos 30^o} = \frac{0{,}6}{0{,}4 \times 0{,}866} = 1{,}732 c^{-1},$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{AB}(AB \sin 30^o) = 1{,}732(0{,}4 \times 0{,}5) = 0{,}346 мс^{-1}.$$

Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке E.

Угловая скорость колеса и скорости точек C и Д:

$$\omega = \frac{v_B}{BE} = \frac{v_B}{r} = \frac{0{,}346}{0{,}1} = 3{,}46 c^{-1};$$

$$v_C = \omega CE = \omega(R - r) = 3{,}46(0{,}15 - 0{,}1) = 0{,}173 мс^{-1};$$

$$v_Д = \omega ДE = \omega\sqrt{R^2 + r^2} = 3{,}46\sqrt{0{,}15^2 + 0{,}1^2} = 0{,}634 мс^{-1}.$$

Задача 10 (рис. 16)

Две параллельные рейки движутся в одну сторону со скоростями V_1 = 1,8 м/с и V_2 = 0,6 м/с. Между рейками зажат диск радиуса r = 0,3 м, катящийся по рейкам без скольжения. Найти угловую скорость диска и скорость его центра C.

Решение (рис. 16)

Скорости точек A и B диска (этими точками диск касается реек) $V_A = V_1$; $V_B = V_2$

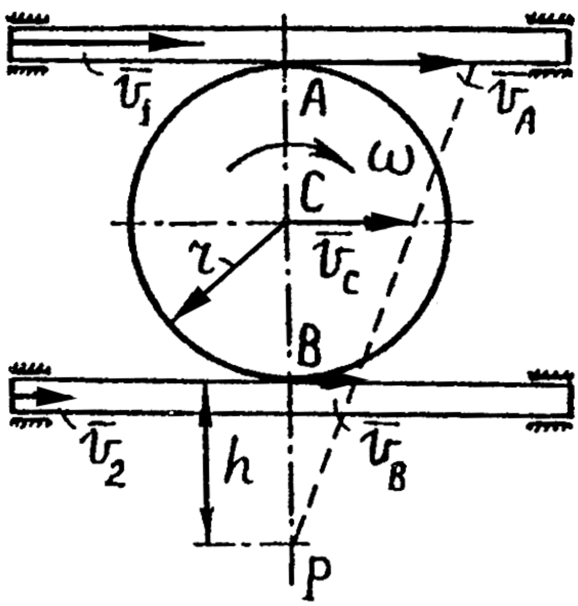


Рис. 16

Мгновенный центр скоростей диска лежит на прямой АВ в некоторой точке Р, причем

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \text{ или } \frac{V_A}{2r+h} = \frac{V_B}{h}.$$

Отсюда находим

$$h = BP = \frac{V_B \cdot 2r}{V_A - V_B} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}6}{1{,}8 - 0{,}6} = 0{,}3 \text{ [м]}$$

Угловая скорость диска и скорость его центра

$$\omega = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_B}{h} = \frac{0{,}6}{0{,}3} = 2 \text{ [1/с]}$$

$$V_C = \omega \cdot CP = \omega(r+h) = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \text{ [м/с]}$$

Задача 11 (рис. 17, рис. 18)

Найти угловую скорость шатуна АВ и скорости точек В и С кривошипно-шатунного механизма. Дана угловая скорость кривошипа ОА и размеры: $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, ОА = АВ = 0,35 м, АС = 0,18 м.

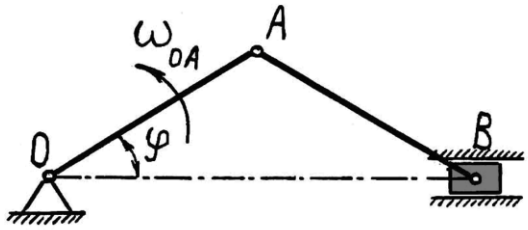


Рис. 17

Решение (рис. 18)

Кривошип ОА совершает вращательное движение, шатун АВ – плоскопараллельное движение.

Находим скорость точки А звена ОА :

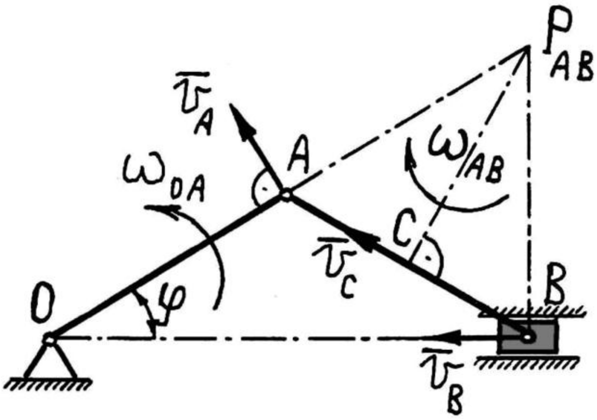


Рис. 18

$v_A = \omega_{OA} OA = 2 \times 0{,}36 = 0{,}72 мс^{-1}$, $\vec{v}_A \perp OA$.

Скорость точки В направлена по горизонтали. Зная направление скоростей точек А и В шатуна АВ, определяем положение его мгновенного центра скоростей – точку P_{AB}.

$\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{AP_{AB}} = \dfrac{0{,}72}{0{,}36} = 2c^{-1}$, $AP_{AB} = AB$.

$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = 2 \times 0{,}36) = 0{,}72 мс^{-1}$, $BP_{AB} = AB$.

$v_C = \omega_{AB} CP_{AB} = \omega_{AB}(BP_{AB} \sin 60^o) = 2(0{,}36 \times 0{,}866) = 0{,}52 мс^{-1}$,

$\vec{v}_C \perp CP_{AB}$.

Задача 12 (рис. 19, рис. 20)

В шарнирном четырехзвеннике ОАВС ведущий кривошип ОА = $10\sqrt{3}$ [см] равномерно вращается вокруг оси О с угловой скоростью ω = 4 [сек $^{-1}$] и при помощи шатуна АВ = 20 [см] приводит во вращательное движение кривошип ВС вокруг оси С. Определить скорости точек А и В, а также угловые скорости шатуна АВ и кривошипа ВС.

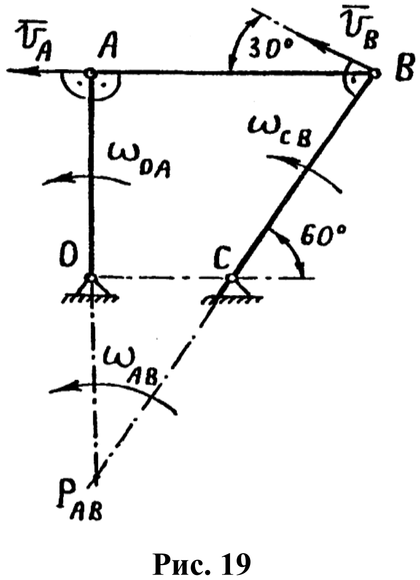


Рис. 19

Решение (рис. 19)

Скорость точки А кривошипа ОА

$V_A = \omega_{OA} OA = 4 \cdot 10\sqrt{3} = 69{,}2$ [см/с]; $\overline{V}_A \perp OA$

Взяв точку А за полюс, составим векторное уравнение

$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$,

где $\overline{V}_B \perp CB$ и $\overline{V}_{BA} \perp BA$.

Графическое решение этого уравнения дано на рис. 20 (план скоростей).

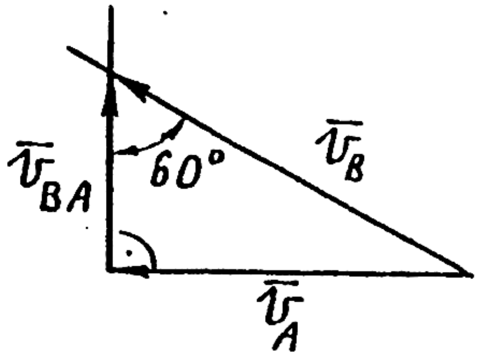


Рис. 20

С помощью плана скоростей получаем

$V_B = \dfrac{V_A}{\cos 30°} = 80$ [см/с]; $V_{BA} = V_B \sin 30° = 40$ [см/с].

Угловая скорость шатуна АВ

$\omega_{AB} = \dfrac{V_{BA}}{BA} = 2$ [с$^{-1}$].

Скорость точки В можно найти с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на соединяющую их прямую

$Пр_{AB}\overline{V}_B = Пр_{AB}\overline{V}_A$; $V_B = \dfrac{V_A}{\cos 30°} = 80$ [см/с].

В заключении найдем скорость точки В с помощью мгновенного центра скоростей P_{AB} шатуна АВ. Зная направления скоростей точек А и В ($\overline{V}_A \perp OA$ и $\overline{V}_B \perp CB$) находим положение точки P_{AB}.

Угловая скорость шатуна АВ $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_A}{AB \cdot tg 60°} = 2$ [с$^{-1}$].

Скорость точки В и угловая скорость кривошипа СВ

$V_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{AB} \dfrac{AB}{\sin 30°} = 80$ [см/с]; $\omega_{CB} = \dfrac{V_B}{CB} = \dfrac{V_B \sin 60°}{OA} = 4$ [с$^{-1}$].

Задача 13 (рис. 21)

Точка массы m движется в плоскости Оху согласно уравнениям:

$x = a\sin\omega t; \qquad y = b\cos\omega t$.

Найти силу, действующую на точку.

Решение (рис. 21)

Найдем траекторию точки. Исключив время t из уравнений ее движения. Получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Траекторией точки M является эллипс с полуосями a и b .

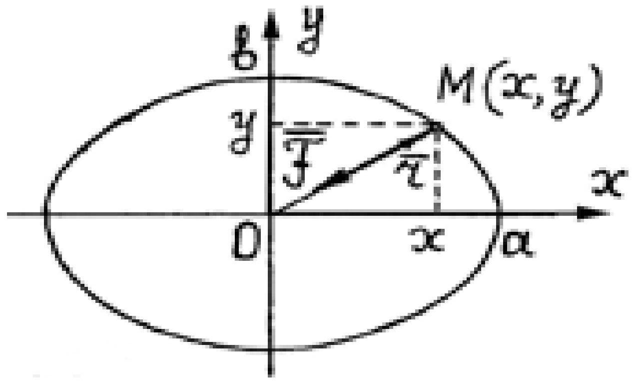


Рис. 21

При t=0 x_0 = 0 и y_0 = b. Точка движется по эллипсу по часовой стрелке.

Проекции приложенной к точке силы $\vec{F}$ на оси координат:

$$F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2 \sin\omega t = -m\omega^2 x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mb\omega^2 \cos\omega t = -m\omega^2 y.$$

Проекции радиус-вектора $\vec{r}$ точки M на оси координат и длина этого вектора равны:

$$r_x = x; \qquad r_y = y; \qquad \vec{r} = \vec{r}(x, y);$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Далее получаем:

$$F_x = -m\omega^2 r_x; \qquad F_y = -m\omega^2 r_y; \qquad F = m\omega^2 r;$$

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}.$$

Сила $\vec{F}$ направлена к точке O и её величина пропорциональна расстоянию от начала координат до точки приложения этой силы.

Задача14 (рис. 22)и (рис. 23)

Груз M массы m = 0,102 кг, подвешенный на нити длиной OM= l = 0,3 м в точке O, представляет собой конический маятник, то есть описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол α = 60^{o} .

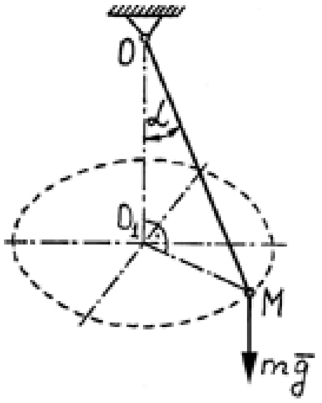


Рис. 22

Определить скорость v груза и натяжение T нити.

Решение (рис. 23)

Будем считать груз материальной точкой. Приложим к точке M силу тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити $\vec{T}$.

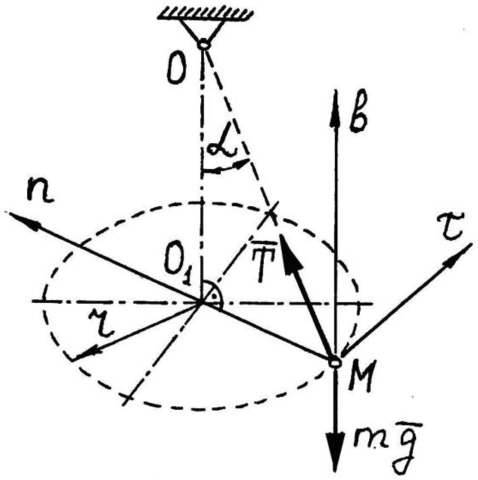


Рис. 23

Построим подвижную естественную систему координат Mτnb.

Суммы проекций приложенных к точке сил на указанные оси:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l\sin\alpha}; \qquad a_b = 0.$$

Составим дифференциальные уравнения движения точки в подвижной естественной системе координат:

$$m\frac{dv}{dt} = 0; \qquad m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = T\sin\alpha; \qquad 0 = T\cos\alpha - mg.$$

Из системы уравнений находим:

$$v = const; \qquad T = \frac{mg}{\cos\alpha}; \qquad v = \sqrt{gl\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.$$

С учетом исходных данных получаем:

$$T = 2H; \qquad v = 2{,}1 мс^{-1}.$$

Задача 15 (рис. 24)

Тело спускается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. В начальный момент тело имело скорость V_0. Найти уравнение движения тела, если коэффициент трения равен f .

Решение (рис. 24)

Примем тело за материальную точку **М** . Начало координат поместим в начальное положение материальной точки. Ось X направим вдоль наклонной плоскости в сторону движения точки, а ось Y – перпендикулярно плоскости.

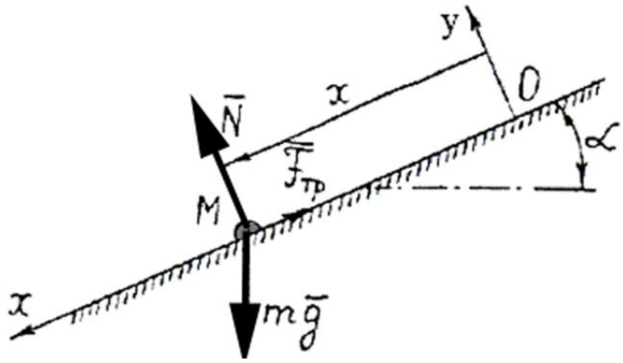


Рис. 24

Приложим к точке силу тяжести mg , нормальную реакцию плоскости N и силу трения $F_{тр}$. Составляем уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = mg\,sin\alpha - F_{тр}$$

$$m\ddot{y} = N - mg\,cos\alpha$$

Поскольку движение точки происходит только вдоль оси X, то $\ddot{y} = 0$ и из второго уравнения следует, что $N = mg\,cos\,\alpha$.

Сила трения не обеспечивает точке состояние покоя (точка движется), сила трения имеет предельное значение $F_{тр} = fN = fmg\,cos\alpha$.

Итак, уравнение движения точки имеет вид

$$m \cdot \ddot{x} = mg\,sin\,\alpha - fmg\,cos\,\alpha = mg(sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha)$$

Правая часть уравнения движения является постоянной величиной, учитывая, что $F_0 = mg(sin\alpha - f\,cos\alpha)$ и $x_0 = 0$, после интегрирования получим

$$x = \frac{g(sin\alpha - f\,cos\alpha)}{2}t^2 + V_0 t$$.

Задача 16 (рис. 25)

Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы $F = F_0\,cos\omega t$ (F_0 и ω - постоянные величины). Пренебрегая весом, определить скорость и положение точки в момент времени $t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega}$, если она в начальный момент находилась в начале координат и ее скорость была равна V_0.

Решение: (рис. 25)

Точка движется прямолинейно, поэтому достаточно одной оси координат. Направим ось X вдоль траектории точки. Изобразим точку в промежуточном положении на ее траектории. Приложим к точке силу F (вес точки и реакции связей отсутствуют).

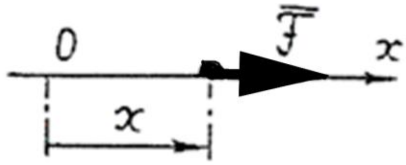


Рис. 25

Составим уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = F_0 \cos \omega t$$

Скорость точки :

$$V = \dot{x} = \frac{1}{m}\int F_0 \cos \omega t dt = \frac{F_0}{m\omega}\sin \omega t + C_1.$$

Подставляя начальные условия $t = 0$; $V = V_0$ с учетом того, что $\sin 0 = 0$, получим $C_1 = V_0$.

Закон движения точки:

$$x = \int V(t)dt = \int\left(\frac{F_0}{m\omega}\sin \omega t + V_0\right)dt = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos \omega t + V_0 t + C_2.$$

Подставляя начальные условия $t = 0$; $x = 0$ с учетом того, что $\cos 0 = 1$, получим $C_2 = \dfrac{F_0}{m\omega^2}$.

Находим для момента времени $t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega}$

$$V = \frac{F_0}{m\omega}\sin \omega\frac{\pi}{2\omega} + V_0 = \frac{F_0}{m\omega}\sin\frac{\pi}{2} + V_0 = \frac{F_0}{m\omega} + V_0;$$

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos \omega\frac{\pi}{2\omega} + V_0\frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2} = V_0\frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Задача 17 (рис. 26)

Груз массы m подвешен на нити длиной l. В начальный момент времени груз отклонили в сторону (нить натянута) и сообщили ему горизонтальную скорость, перпендикулярную нити. Найти величину скорости груза и натяжение нити, если нить составляет с вертикалью постоянный угол α.

Решение (рис. 26)

Будем считать груз материальной точкой. Приложим к грузу силу тяжести mg и натяжение нити $\boldsymbol{N}$.

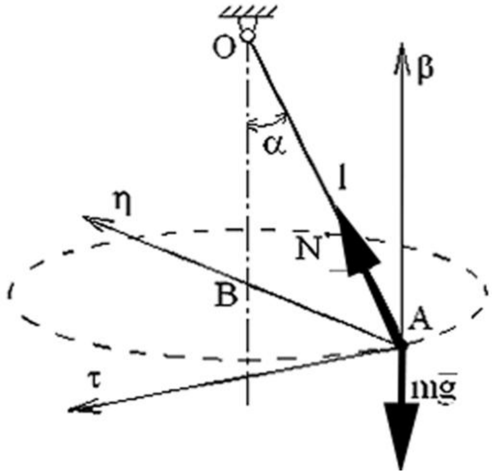


Рис. 26

Как следует из условия задачи, при движении груза нить описывает коническую поверхность, траекторией груза является окружность с центром в точке B и радиусом AB=$l\,sin\alpha$. Если известна траектория, воспользуемся естественной системой координат (τ, η, β) и уравнениями движения в естественной форме

$$\begin{cases} m\dot{V} = 0 \\ m \cdot \dfrac{V^2}{l\,sin\alpha} = N\,sin\alpha \\ 0 = N\,cos\alpha - mg \end{cases}$$

Из первой формулы следует, что скорость движения груза будет постоянной по величине, т.е. будет сохранять начальное значение. Из третьей формулы можем выразить натяжение нити

$$N = \frac{mg}{cos\alpha}$$

Подставив полученное выражение силы натяжения во вторую формулу, получим

$$m \cdot \frac{V^2}{l\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha,$$

Откуда скорость $V = \sqrt{\dfrac{lg\,sin^2\alpha}{cos\alpha}}$.

Задача 18. (рис. 27)

При движении поезда массы $\mathbf{m}$ по участку пути однородного профиля сила сопротивления движению изменяется по закону $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{aV}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{a}$ - постоянные величины; $\mathbf{V}$ - переменная скорость поезда. Сила тяги локомотива изменяется по закону

$\mathbf{T} = \mathbf{F}_0 - \mathbf{bV}$, где $\mathbf{F}_0$ и $\mathbf{b}$ - постоянные величины ($\mathbf{F}_0 > \mathbf{R}_0$). Определить закон изменения скорости и закон движения поезда.

Решение (рис. 27)

Примем поезд за материальную точку. Направим координату X по направлению движения. Начало координат совпадает с начальным положением поезда.

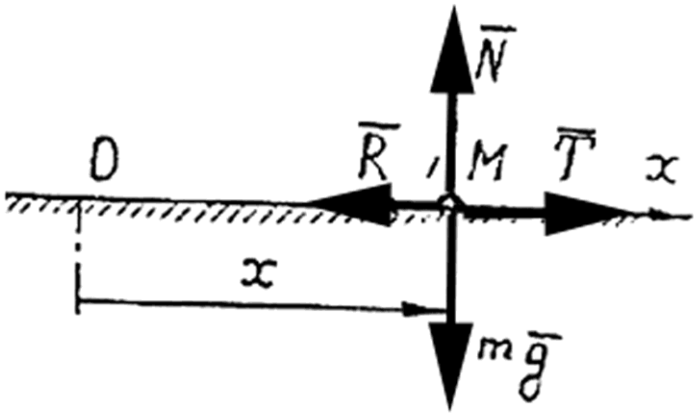


Рис. 27

Изобразим точку в промежуточный момент времени на ее траектории. К точке приложены сила тяжести mg, движущая сила T, сила сопротивления R и нормальная реакция плоскости N.

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m\frac{dV}{dt} = (F_0 - bV) - (R_0 + aV).$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{(b+a)V}{m} - \frac{F_0 - R_0}{m}.$$

решение этого уравнения имеет вид

$$V = C_1 e^{-qt} + \frac{p}{q}, где$$

$$q = \frac{a+b}{m},\ p = \frac{F_0 - R_0}{m}$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из начальных условий: при $t = 0$; $V = 0$,

$$C_1 = \frac{F_0 - R_0}{b+a}.$$

$$V = \frac{p}{q}(1 - e^{-qt}) = \frac{F_0 - R_0}{b+a}\left(1 - e^{-(\frac{a+b}{m})t}\right)$$

Закон изменения скорости

Установившееся значение скорости (значение скорости через достаточно большой промежуток времени) $V = \lim\limits_{t\to\infty} V = \frac{p}{q} = \frac{F_0 - R_0}{b+a}$.

Подставляя зависимости $V=dx/dt$, получим дифференциальное уравнение

$$dx = \frac{p}{q}(1 - e^{-qt})dt.$$

После интегрирования которого, с учетом начального условия ($t = 0$; $x = x_0 = 0$), находим закон движения точки

$$x = \frac{p}{q}\left(t - \frac{1}{q}(1 - e^{-qt})\right).$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Задача 19 (рис. 28)

Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса $\mathbf{r}$, чтобы оно, катясь без проскальзывания, поднялось на высоту $\mathbf{h}$ по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом? Коэффициент трения качения равен δ. Колесо считать однородным диском. Определить также ускорение оси колеса.

Решение (рис. 28)

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии.

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n_A} A_k^e.$$

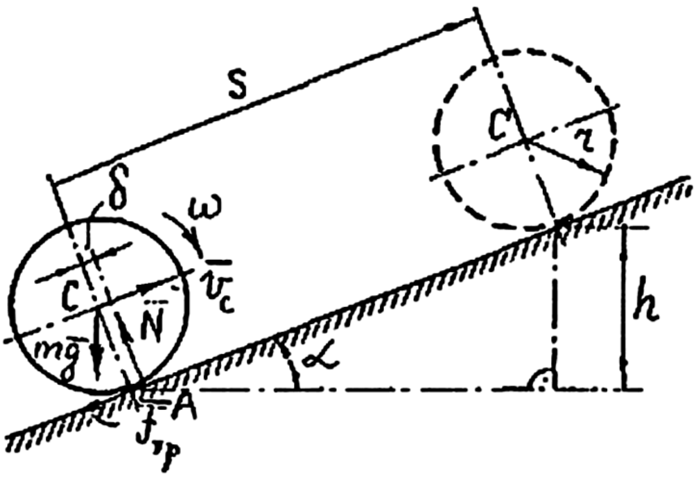


Рис. 28

Кинетическая энергия колеса в начальном положении

$$T_0 = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2} = \frac{3mV_c^2}{4}.$$

Собственный момент инерции колеса равен $J_c = \frac{1}{2}mr^2$ и его угловая скорость $\omega = \frac{V_c}{r}$, На колесо действуют силы: тяжести mg, нормальная реакция плоскости $N = mg\cos\alpha$, трение скольжения F_{mp} и момент трения качения $M_{mp} = N\delta$. Работа активных сил, приложенных к колесу, с учетом того, что угол поворота колеса равен $\varphi = \frac{s}{r}$,

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_k^e = -mgs\sin\alpha - (N\delta)\varphi = -mgs\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right).$$

На основании указанной теоремы имеем:

$$\frac{3}{4}mV_c^{\,2} - \frac{3}{4}mV_0^{\,2} = -mgs\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right).$$

В верхнем положении колесо остановится, следовательно, $V_c = 0$ и перемещение оси колеса составит $s = \dfrac{h}{sin\alpha}$. Скорость оси колеса в начальном положении

$$V_{C0} = \sqrt{\frac{4}{3}gh\left(1 + \frac{\delta}{r}ctg\alpha\right)}.$$

Дифференцируя по времени это выражение, получим

$$2\frac{3\cdot}{4}V_c\frac{dV_c}{dt} = -g\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right)\frac{ds}{dt}.$$

Ускорение оси колеса (учитываем, что $V_c = \dfrac{ds}{dt}$)

$$a_c = \frac{dV_c}{dt} = -\frac{2g}{3}\left(sin\alpha + \frac{\delta}{r}cos\alpha\right).$$

Задача 20 (рис. 29)

Вагонетка для обслуживания пути двигалась по горизонтальному участку пути под действием двигателя. Масса корпуса вагонетки **M**=5000кг, масса каждой из двух колесных пар **m**=600кг, коэффициент трения качения δ=0.003м. Колесные пары представляют собой однородные диски радиуса **r**=0.3м. Какой путь пройдет вагонетка до остановки после выключения двигателя, если в момент выключения ее скорость была $\mathbf{V_0}$=36км/ч?

Решение (рис. 29)

Конструкция состоит из трех тел: корпуса и двух колесных пар. Корпус движется поступательно, колесные пары – плоскопараллельно. Используем теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n_A} A_k^e.$$

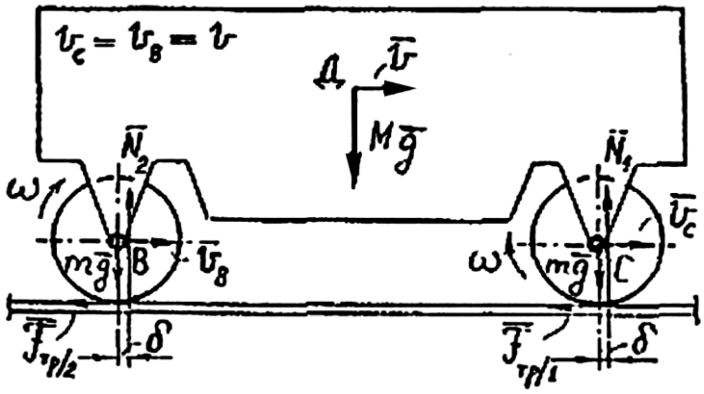


Рис. 29

Собственный момент инерции каждой колесной пары $J_c = \frac{1}{2} m r^2$, угловая скорость колес $\omega = \frac{V}{r}$ ($V -$ скорость корпуса вагонетки), кинетическая энергия системы может быть выражена

$$T = \frac{MV^2}{2} + 2\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}\right) = \frac{MV^2}{2} + 2\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{mr^2}{2 \cdot 2}\left(\frac{V}{r}\right)^2\right) = \frac{M + 3m}{2} V^2.$$

На рассматриваемую систему действуют силы: тяжести Mg и mg, нормальные реакции колесных пар $N_1 = N_2 = N = \frac{Mg + 2mg}{2}$ (в силу симметричности конструкции), моменты трения $M_{тр1} = M_{тр2} = N_1\delta = N_2\delta = N\delta$, а также трения скольжения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$. Работа сил, приложенных к колесу, с учетом того, что угол поворота колеса может быть выражен $\varphi = \frac{s}{r}$ ($s -$ перемещение вагонетки), а также формулы

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_k^e = -(N_1\delta)\varphi - (N_2\delta)\varphi = -2\frac{M + 2m}{2}\frac{g\delta s}{r}.$$

или

$$\frac{M + 3m}{2} V^2 - \frac{M + 3m}{2} V_0^2 = -\frac{(M + 2m) g\delta s}{r}.$$

Поскольку в конце рассматриваемого промежутка времени вагонетка остановится, следовательно, $V = 0$. Поэтому после преобразований получим величину пройденного пути

$$s = \frac{(M + 3m) r V_0^2}{2(M + 2m) g\delta} = \frac{(5000 + 3 \cdot 600) \cdot 0.3 \cdot \left(36 \cdot \frac{1000}{3600}\right)^2}{2 \cdot (5000 + 2 \cdot 600) \cdot 9.81 \cdot 0.03} \approx 55.9 м.$$