

Министерство образования Российской Федерации

Казанский государственный технологический
университет

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Методические указания

Казань 2004

Составители: доц. К.А.Абдулхаков,
доц. С.Г.Сидорин

Задание на расчетно-графическую работу по прикладной механике на тему «Расчет статически определимой стержневой системы». Методические указания. /Казан. гос. технол. ун-т; Сост. К.А.Абдулхаков, С.Г.Сидорин. Казань, 2004, 13 с.

Содержит исходные данные, расчетные схемы и примеры выполнения расчетно-графической работы «Расчет статически определимой стержневой системы» по курсу прикладной механики (раздел «Сопротивление материалов»).

Предназначено для студентов технологических специальностей в качестве одного из разделов СРС.

Разработано на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета казанского государственного технологического университета.

Рецензенты: проф. В.А. Иванов
доц. Ю.Г. Коноплев

Расчет статически определимой стержневой системы

Основные требования к оформлению работы

Расчетно-пояснительная записка выполняется на листах белой писчей бумаги формата А4 со стандартным оформлением титульного листа в соответствии с рекомендуемым порядком и обязательным соблюдением требований по оформлению работы. На титульном листе должны быть указаны наименование и номер задания, название дисциплины, номер группы, фамилия и инициалы студента и преподавателя. На первой странице расчетно-пояснительной записки должны быть указаны шифр задания, а также все исходные числовые данные и исходные чертежи-схемы с размерами, соответствующими этому шифру. Все результаты расчетов приводятся с точностью до трех значащих цифр.

Графическая часть работы выполняется на стандартных листах ватмана формата А4 с соблюдением масштабов. Она должна содержать расчетную схему, схему деформирования стержневой системы, формы сечений стержней.

Исходные данные к заданию выбираются из соответствующих таблиц и рисунка 1 согласно шифру указанному преподавателем. Шифр задается в виде двух чисел, первое из которых - одно- или двузначное, второе - трехзначное. Под первым числом и под каждой цифрой трехзначного числа шифра следует подписать начальные буквы русского алфавита, например:

шифр	05-196
буквы	а б в г

Число «а» соответствует номеру расчетной схемы из рис. 1, числа «б», «в», «г» используются для определения исходных данных по табл. 1. Из каждого вертикального столбца таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. В данном случае из каждого столбца «б» следует взять числовые данные первой строки, из каждого столбца «в» - девятой, а из столбца «г» - шестой строки.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Для заданной статически определимой стержневой системы найти усилия в стержнях, подобрать из условия прочности размеры сечений заданной формы и определить полное перемещение точки приложения силы (точки K).

Исходные данные

1. Схема стержневой системы определяется по шифру из рис.1. В системах с параллельными стержнями 1 и 2 элементы, изображенные жирной линией считать абсолютно жесткими.

2. Величина силы F , длины стержней l_1 и l_2 , формы поперечных сечений, материал первого стержня выбираются по шифру из табл.1. Материал второго стержня - сталь Ст. 3. Толщины стенок коробчатого и кольцевого сечений определяются из отношений $t/b = t/D = 0,2$, где t - толщина стенки, b - сторона квадратного коробчатого сечения по наружному контуру, D - наружный диаметр кольцевого сечения. Коэффициент запаса прочности при растяжении $n_p = 1,5$, при сжатии - $n_{сж} = 2$. Принять $a = l_1$.

Таблица 1

№ п/п	F , МН	l_1 , м	l_2 , м	Формы сечений стержней		Материал первого стержня
				первого	второго	
1	0,2	0,8	2,2	сплошное	швеллер	СЧ-12-28 или алюми- ниевый сплав Д1
2	0,25	0,9	2,4	квадратное	двутавр	
3	0,15	1,0	2,6	сплошное прямоугольное $h/b=2$	равнобокий уголок	СЧ-15-32 или сталь Ст. 2
4	0,1	1,1	2,8		швеллер	
5	0,25	1,2	3,0	сплошное круглое	двутавр	СЧ-35-56 или титано- вый сплав ВТ-9
6	0,2	1,3	3,2		равнобокий уголок	
7	0,15	1,4	3,4	коробчатое квадратное	швеллер	СЧ-28-48 или сталь Ст. 30
8	0,2	1,5	3,6		двутавр	
9	0,25	1,6	3,8	кольцевое круглое	равнобокий уголок	СЧ-21-40 или алюми- ниевый сплав Д16
10	0,3	1,7	4,0		швеллер	
	б	в	г	б	в	г

3. Характеристики используемых материалов приведены в таблице 2, где E - модуль упругости, $\sigma_{ор}$ - предельное напряжение на растяжение, $\sigma_{о сж}$ - предельное напряжение на сжатие.

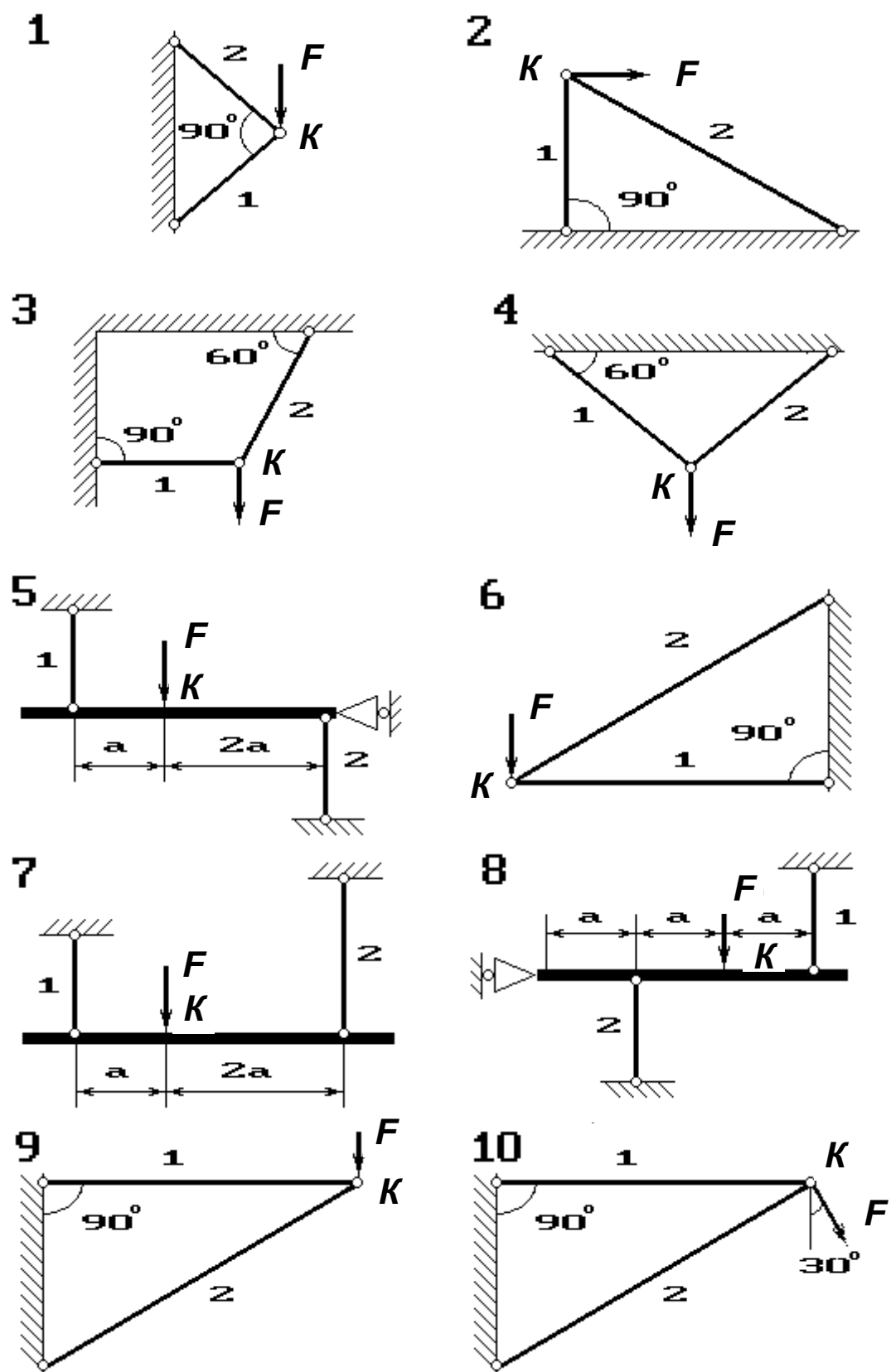
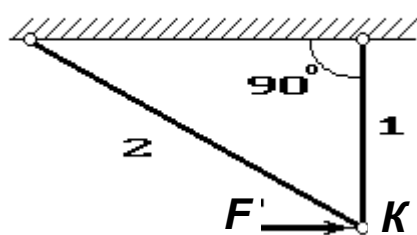
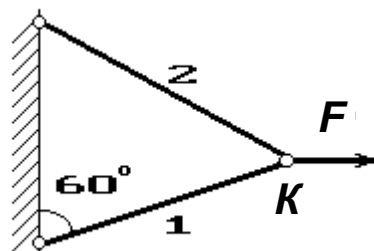


Рис. 1

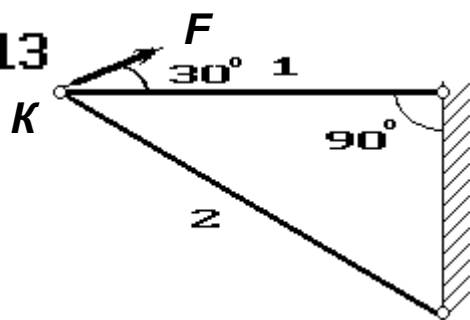
11



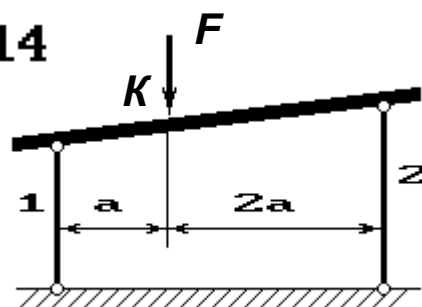
12



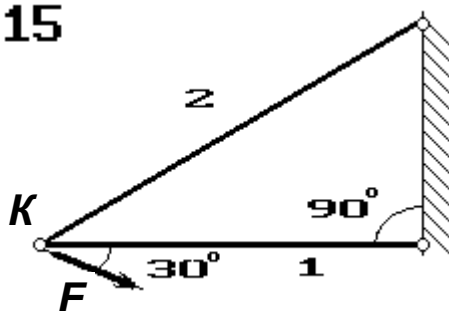
13



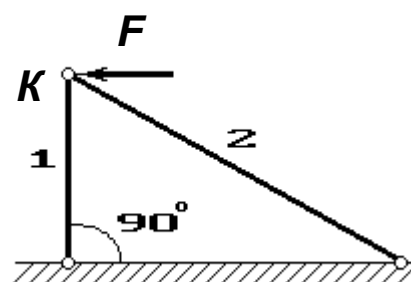
14



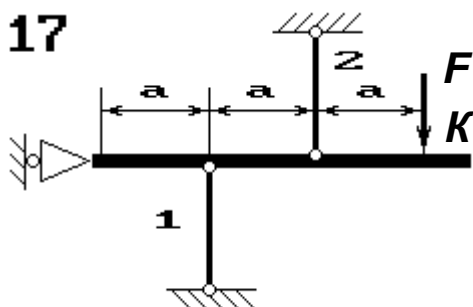
15



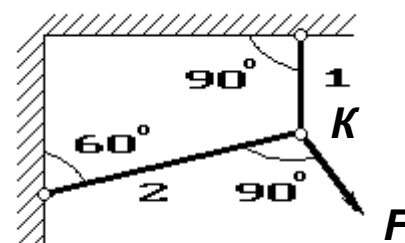
16



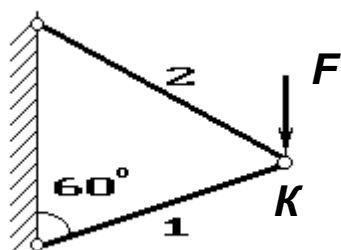
17



18



19



20

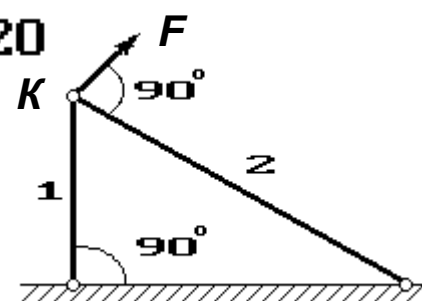


Рис. 1 (продолжение)

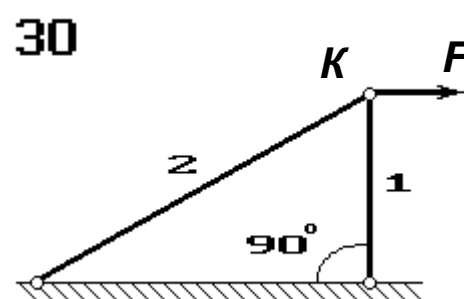
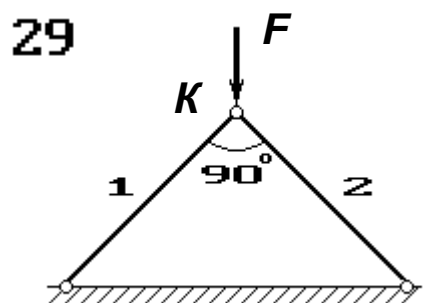
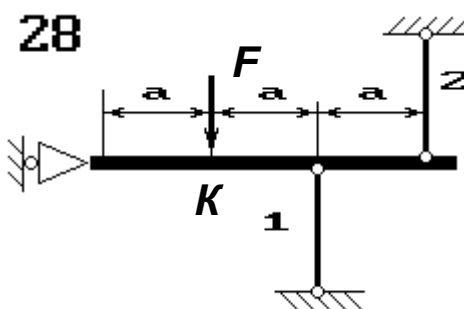
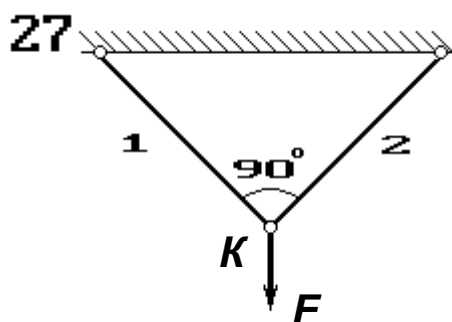
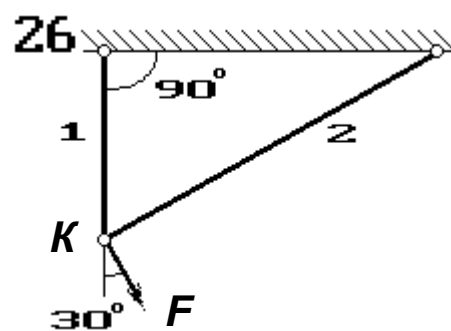
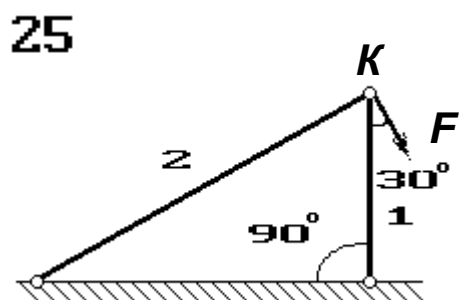
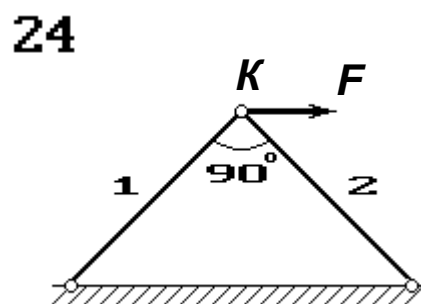
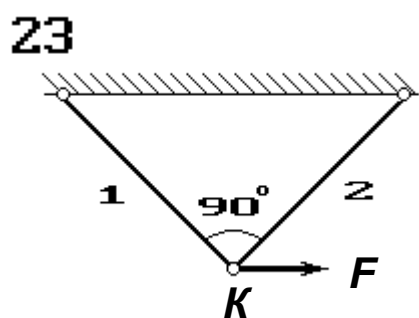
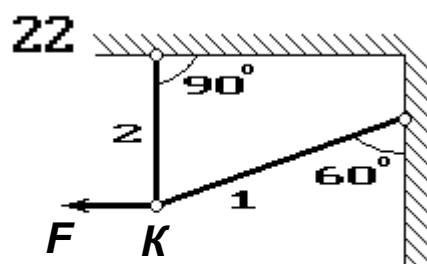
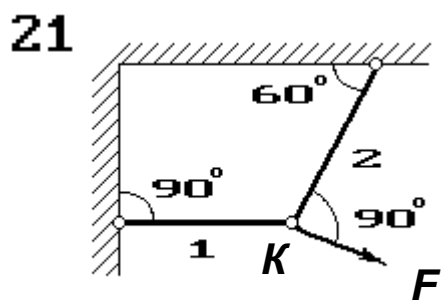


Рис. 1 (окончание)

Содержание и порядок выполнения работы

1. Определить нормальные силы N_1, N_2 методом сечений.

2. Определить размеры сечений стержней.

Из условия прочности $\sigma = N/A \leq [\sigma]$ определяется требуемая площадь поперечного сечения каждого стержня $A \geq N/[\sigma]$, где $[\sigma] = \sigma_0/n$, а затем находится его характерный размер или номер прокатного профиля. Для первого стержня материал назначается в зависимости от того, как он нагружен - растянут или сжат. При растяжении, как правило, целесообразнее назначать пластичные материалы, имеющие $\sigma_{0p} = \sigma_{0сж} = \sigma_T$, при сжатии - хрупкие, у которых $\sigma_{0сж} > \sigma_{0p}$ ($\sigma_0 = \sigma_e$).

3. Определить перемещение точки приложения силы (точка K).

Для этого необходимо определить абсолютные деформации стержней 1 и 2 по закону Гука:

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad i = 1, 2,$$

изобразить стержневую систему в деформированном состоянии, а затем найти связь между полным перемещением точки K (Δ_K) и абсолютными деформациями стержней Δl_1 и Δl_2 .

Таблица 2

Материал	Марка	E , МПа	σ_{0p} , МПа	$\sigma_{0сж}$, МПа
Серый чугун	СЧ-12-28	$1,2 \cdot 10^5$	120	500
	СЧ-15-32		150	600
	СЧ-21-40		210	760
	СЧ-28-48		280	900
	СЧ-35-56		350	1080
Сталь	Ст. 2	$2 \cdot 10^5$	200	200
	Ст. 3		240	240
	Ст. 30		290	290
Алюминиевый сплав	Д 1	$0,7 \cdot 10^5$	200	200
	Д 16		300	300
Титановый сплав	ВТ 9	$1 \cdot 10^5$	610	610

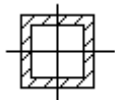
Расчетно - графическая работа содержит два типа схем: со сходящимися в точке K или с параллельными стержнями. Рассмотрим примеры расчета для обоих случаев.

Пример расчета стержневой системы со сходящимися в узле K стержнями

Исходные данные.

Схема стержневой системы со сходящимися силами приведена на рис.2.

1. Величина силы $F = 8 \cdot 10^5$ Н.
2. Длины стержней $l_1 = 2,8$ м,
 $l_2 = 1,6$ м.
3. Формы сечений стержней:
первого - коробчатое квадратное,



второго - равнобокий уголок.

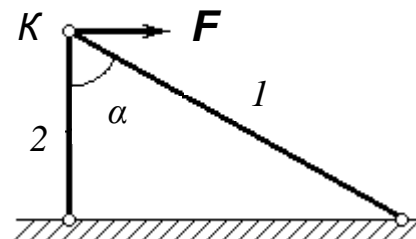


Рис.2. Схема стержневой системы

4. Материалы стержней:

первого - серый чугун марки СЧ-12-28 ($E_1 = 1,2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{0p} = 120$ МПа, $\sigma_{0сж} = 500$ МПа) или алюминиевый сплав Д1 ($E_1 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{0p} = 200$ МПа, $\sigma_{0сж} = 200$ МПа),

второго - сталь Ст.3 ($E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{0p} = \sigma_{0сж} = 240$ МПа).

5. Коэффициенты запаса прочности:
на растяжение $n_p = 1,5$, на сжатие - $n_{сж} = 2$.

1. Определение внутренних усилий в стержнях.

Рассечем стержни (рис. 3), отбросим нижнюю часть, заменим влияние отброшенных частей стержней растягивающими нормальными силами N_1 и N_2 . На рис. 4 изображена расчетная схема данной системы.

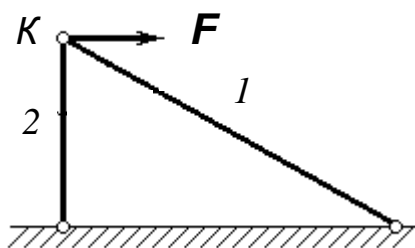


Рис. 3

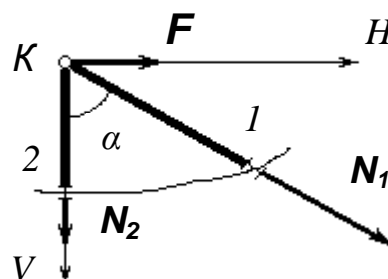


Рис. 4

Запишем уравнения равновесия для полученной системы сил в виде сумм проекций сил на оси H и V :

$$\begin{aligned}\sum H = 0: & \quad F + N_1 \sin \alpha = 0, \\ \sum V = 0: & \quad N_2 + N_1 \cos \alpha = 0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= l_2 / l_1 = 1,6 / 2,8 = 0,573, \\ \alpha &= \arccos(0,573) = 55^\circ, \quad \sin 55^\circ = 0,82.\end{aligned}$$

Отсюда определим N_1 и N_2 :

$$\begin{aligned}N_1 &= -\frac{F}{\sin \alpha} = -\frac{8 \cdot 10^5}{0,82} = -9,8 \cdot 10^5 \text{ Н}, \\ N_2 &= -N_1 \cos 55^\circ = 9,8 \cdot 10^5 \cdot 0,573 = 5,6 \cdot 10^5 \text{ Н}.\end{aligned}$$

Усилие N_1 отрицательно, следовательно, первый стержень сжат.

Усилие N_2 положительно, следовательно, первоначально принятое направление выбрано правильно: второй стержень растянут.

2. Определение размеров сечений стержней.

Так как первый стержень сжат, то в качестве материала для него выбираем серый чугун СЧ-12-28, предел прочности на сжатие которого превышает $\sigma_{0сж}$ для алюминиевого сплава Д1. Такой выбор является также экономически более целесообразным вследствие дешевизны чугуна и значительно более высокой стоимости сплава из цветных металлов.

Допускаемое напряжение на сжатие для материала СЧ-12-28 равно

$$[\sigma_{1сж}] = \frac{\sigma_{0сж1}}{n_{сж}} = \frac{500}{2} = 250 \text{ МПа}.$$

Второй стержень растянут; допускаемое напряжение для него равно

$$[\sigma_{2p}] = \frac{\sigma_{0p2}}{n_p} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}.$$

Определим площадь поперечного сечения первого стержня

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma_{сж}]_1} = \frac{9,8 \cdot 10^5}{250 \cdot 10^6} = 39,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Отсюда с учетом $t = 0,2b$,

$$A_1 = b^2 - (0,6b)^2 = 0,64b^2 \text{ (см. рис. 5),}$$

находим

$$b = \sqrt{\frac{A_1}{0,64}} = \sqrt{\frac{39,2 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 0,0783 \text{ м}.$$

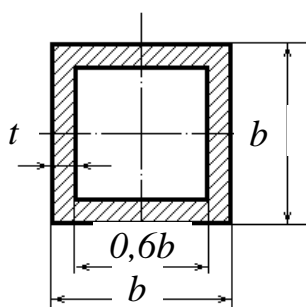


Рис. 5

Размер b округляем в большую сторону до целого значения в миллиметрах, оканчивающегося на «0» или «5»: $b = 0,0783 \text{ м} = 78,3 \text{ мм}$, округляя, получим $b = 80 \text{ мм} = 0,08 \text{ м}$. Тогда фактическая площадь сечения равна $A_{1\phi} = 0,64 \cdot 0,08^2 = 41 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Определим размеры сечения второго стержня

$$A_2 \geq \left[\frac{N_2}{\sigma_p} \right]_2 = \frac{5,6 \cdot 10^5}{160 \cdot 10^6} = 35 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Из таблицы сортамента прокатной стали (ГОСТ 8509-72) подбираем равнобокий уголок с таким расчетом, чтобы площадь его сечения была не меньше требуемой $A_2 = 35 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 35 \text{ см}^2$. Этому условию удовлетворяет уголок №16(12), у которого $A_{2\phi} = A_2^{\text{табл}} = 37,4 \text{ см}^2 = 37,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

3. Определение перемещения точки К.

Сначала подсчитываем абсолютные деформации обеих стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_{1\phi}} = \frac{-9,8 \cdot 10^5 \cdot 2,8}{1,2 \cdot 10^{11} \cdot 41 \cdot 10^{-4}} = -5,58 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -5,58 \text{ мм}.$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_{2\phi}} = \frac{5,6 \cdot 10^5 \cdot 1,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 37,4 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,2 \text{ мм}.$$

Так как первый стержень сжат, то он укорачивается на Δl_1 , второй – растянут, он удлиняется на Δl_2 .

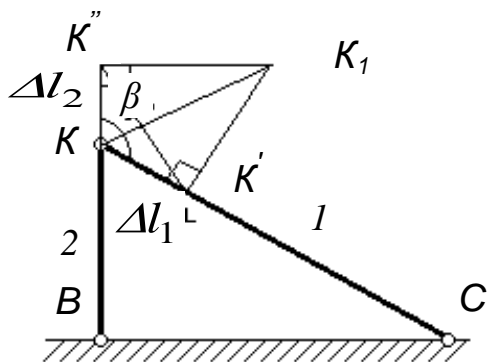


Рис. 6

Для нахождения положения точки K после деформации (точки K_1), отложим абсолютные деформации Δl_1 и Δl_2 на направления стержней 1 и 2; стержень 1 укорачивается, поэтому его длина становится меньше на Δl_1 (т. K'), стержень 2 удлиняется, его длина становится больше на Δl_2 (т. K''). Если провести дуговые засечки радиусами $CK' = l_1 + \Delta l_1$ и $BK'' = l_2 + \Delta l_2$, то получим положение

точки K после деформации (точку K_1) на пересечении дуг. Ввиду малости деформаций ($\Delta l_i \ll l_i$), можно дуговые засечки заменить перпендикулярами к направлениям стержней, восстановленными из точек K' и K'' . На пересечении перпендикуляров и расположена точка K_1 (рис. 6). Перемещение точки K можно найти по известным из геометрии соотношениям диагоналей четырехугольника, имеющего два противоположных прямых угла (см. рис.6):

$$\Delta_K = KK_1 = \frac{K'K''}{\sin \beta}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 125^\circ, \quad \cos \beta = -0,573, \quad \sin \beta = 0,82.$$

Диагональ $K'K''$ определяется из треугольника $KK'K''$ по теореме косинусов:

$$(K'K'')^2 = \Delta l_1^2 + \Delta l_2^2 - 2\Delta l_1\Delta l_2 \cos \beta.$$

Таким образом, Δ_K вычисляется по следующей формуле :

$$\begin{aligned} \Delta_K &= \frac{\sqrt{\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2 - 2|\Delta l_1||\Delta l_2|\cos \beta}}{\sin \beta} = \\ &= \frac{\sqrt{5,58^2 + 1,2^2 - 2 \cdot 5,58 \cdot 1,2(-0,573)}}{0,82} = 7,74 \text{ мм.} \end{aligned}$$

- Ответ: 1. $N_1 = -9,8 \cdot 10^5 \text{ Н}$, $N_2 = 5,6 \cdot 10^5 \text{ Н}$,
 2. $b = 0,08 \text{ м}$, уголок равнобокий, №18(11)
 3. $\Delta_K = 7,74 \text{ мм}$.

Пример расчета стержневой системы с параллельными стержнями

Схема стержневой системы приведена на рис.7, расчетная схема - на рис. 8.

Усилия N_1 и N_2 определяются из уравнений равновесия в виде сумм моментов относительно точек B и C :

$$\sum M_B = 0: -N_2 \cdot 4a - F \cdot a = 0;$$

$$\sum M_C = 0: N_1 \cdot 4a + F \cdot 3a = 0;$$

$$N_1 = -\frac{3}{4}F, \quad N_2 = -\frac{1}{4}F.$$

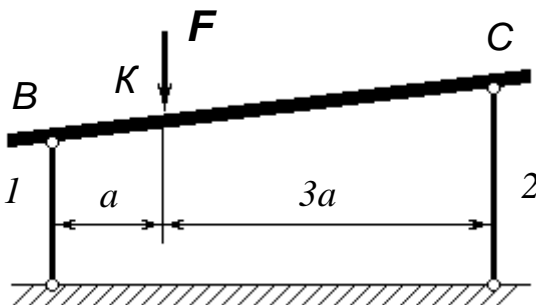


Рис. 7

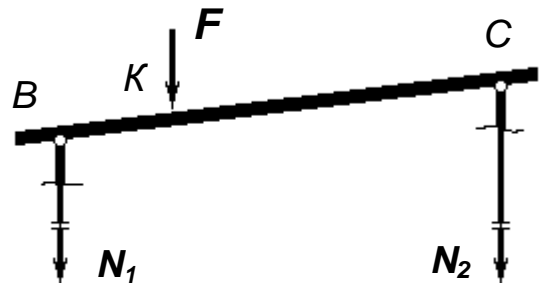


Рис. 8

Подбор сечений осуществляется так же, как и для схемы со сходящимися стержнями.

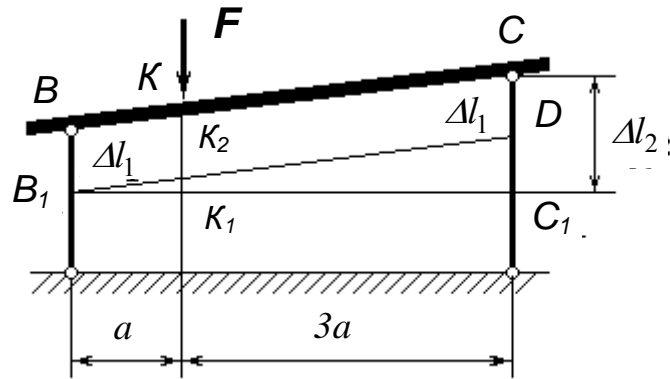


Рис. 9

Для нахождения положения точки K после деформации (точки K_1), отложим абсолютные деформации Δl_1 и Δl_2 на направлениях стержней 1 и 2. Так как оба стержня сжаты, то они укорачиваются и их длины становятся меньше на Δl_1 и Δl_2 соответственно. В результате получим точки B_1 и C_1 (рис. 9). Соединив точки B_1 и C_1 отрезком прямой получим положение жесткого бруса после деформации системы. Вертикальное перемещение точки K : $\Delta_K = KK_1$ его величину найдем из трапеции BCC_1B_1 , используя дополнительное построение. Проведем прямую B_1D параллельно BC . Тогда $KK_1 = KK_2 + K_2 K_1$, где $KK_2 = \Delta l_1$, а из подобия треугольников $B_1K_2K_1$ и B_1DC_1

$$\frac{K_2 K_1}{DC_1} = \frac{a}{4a}, \quad DC = CC_1 - CD = \Delta l_2 - \Delta l_1.$$

$$K_2 K_1 = \frac{1}{4} DC_1 = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{4}.$$

Следовательно искомое перемещение точки K (рис. 9), равно

$$\Delta_K = KK_1 = KK_2 + K_2 K_1 = \Delta l_1 + \frac{1}{4} (\Delta l_2 - \Delta l_1).$$