Только 1 вариант по двум последним цифрам шифра - 57

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Целью контрольной работы **является формирование** у обучающихся **профессиональных компетенций и приобретение** обучающимися:

знаний о теоретических основах механики, методах составления и исследования уравнений статики, кинематики и динамики; ***умений*** составлять и рассчитывать механическую систему по уравнениям статики, кинематики и динамики; ***навыков*** владения принципами и методами моделирования, анализа, синтеза и оптимизации систем.

Задание на контрольную работу по дисциплине «Теоретическая механика» включает в себя 3 раздела: статика, кинематика, динамика.

В контрольной работе студент должен:

Раздел. Статика

- построить исходный рисунок и записать числовые значения величин;
- освободить конструкцию от связей, заменить их реакциями связей; - составить уравнения равновесия и решить их;
- проанализировать результат.

Раздел. Кинематика

- построить механизм в масштабе;
- вычислить и построить скорости точек.

Раздел. Динамика

- выбрать метод решения задачи;
- сделать рисунок и показать все силы действующие на тело; - показать известные скорости и ускорения точек тела;
- составить уравнение теоремы или принципа и решить.

Контрольную работу следует оформлять в соответствии с требованиями ЕСКД. Текстовая часть курсовой работы выполняется с использованием ЭВМ, и только рисунки можно делать карандашом. Работа должна содержать оглавление, текст самой работы и список используемой литературы. Текст работы должен начинаться с задания, сопровождаемого исходными данными в соответствии с выбранным вариантом, а затем последовательно излагается расчетная часть.

Решение каждой задачи должно сопровождаться краткими пояснениями. Следует указать, какие теоремы, принципы и формулы использованы для решения задачи. Все промежуточные преобразования, расчеты должны быть показаны в решении и сопровождены необходимыми пояснениями. Все уравнения и формулы следует записывать сначала в общем виде, а затем подставлять вместо буквенных обозначений их числовые значения. Вычисления должны быть доведены до получения окончательного результата. В конце решения необходимо привести ответы. Обязательно указывать размерность искомых величин.

В настоящих заданиях приводится 20 вариантов для каждой задачи.

Номер варианта для всех задач курсовой работы выбирается студентом по двум последним цифрам его учебного шифра (табл. 1).

Таблица 1

Предпоследняя	**Последняя**	**Номер варианта**	**Предпоследняя**	**Последняя**	**Номер варианта**
цифра шифра			**цифра шифра**		
0;1;2;3;4	0	1	5;6;7;8;9	0	11
	1	2		1	12
	2	3		2	13
	3	4		3	14
	4	5		4	15
	5	6		5	16
	6	7		6	17
	7	8		7	18
	8	9		8	19
	9	10		9	20

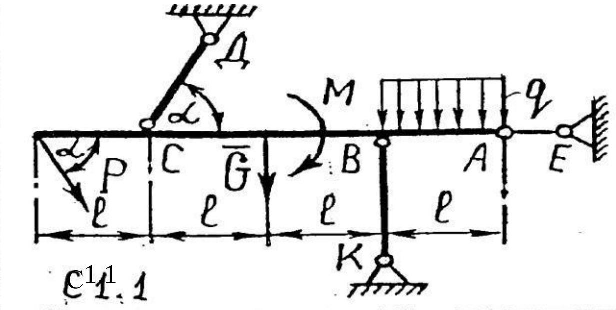
Например, шифрам с последними цифрами 51, 41, и 77 соответствуют варианты 12, 2 и 18.

Задача С1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

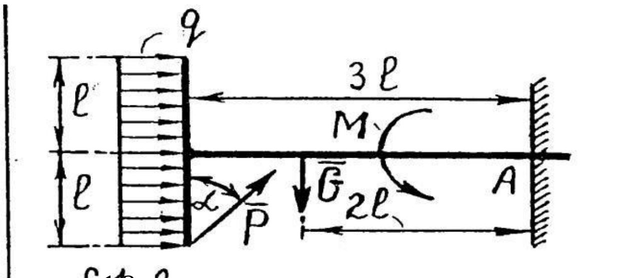
Определить реакции связей заданной плоской конструкции. Схемы конструкций указаны на рисунках С1.1 - С1.20, исходные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

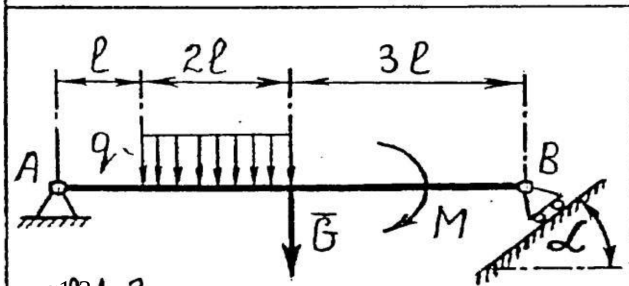
Номер варианта	Р,кН	G,кН	М,кНм	q,кН/м	l,м	α,град.
С1.1	4	12	4	3	1	60_o
С1.2	10	6	5	2	1,5	45_o
С1.3	-	10	4	3	1	45^o
С1.4	15	-	3	4	1	45^o
С1.5	10	8	5	2	2	30_o
С1.6	6	9	3	5	2	60^o
С1.7	20	14	4	-	1	30^o
С1.8	14	-	6	2	1	30^o
С1.9	10	15	6	-	1	30^o
С1.10	16	-	10	3	1	60^o
С1.11	10	8	6	2	2	30^o
С1.12	15	12	8	1	1,5	60^o
С1.13	8	-	3	6	1	60^o
С1.14	10	-	4	2	1	45^o
С1.15	20	12	3	4	1	60^o
С1.16	15	5	2	3	1	30^o
С1.17	12	6	8	3	2	30^o
С1.18	8	-	3	2	1	45^o
С1.19	20	-	4	6	1	30^o
С1.20	15	10	5	-	1	30^o



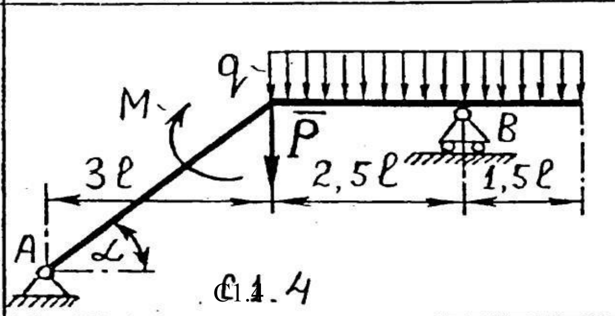
C1.1



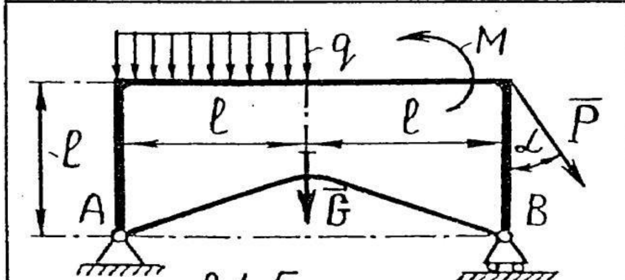
C1.2



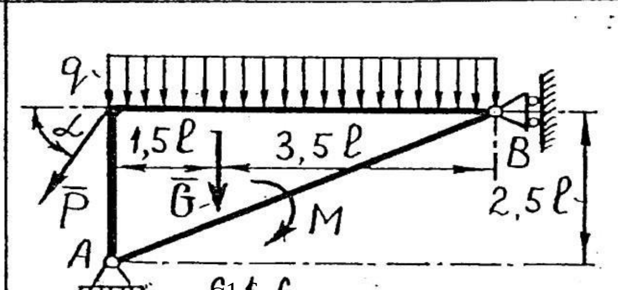
C1.3



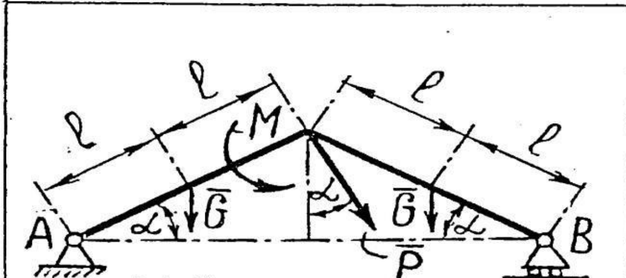
C1.4



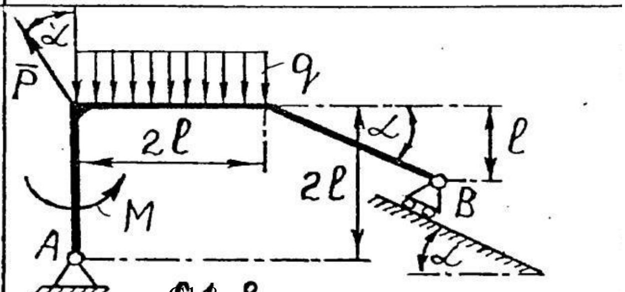
C1.5



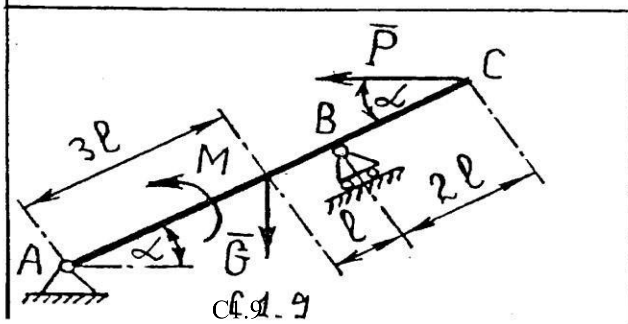
C1.6



C1.7

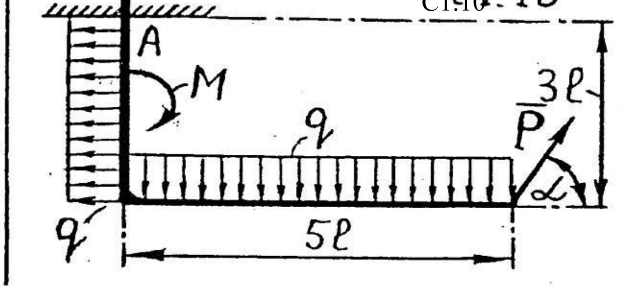


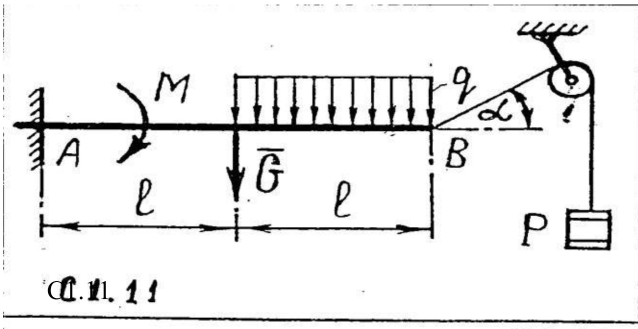
C1.8



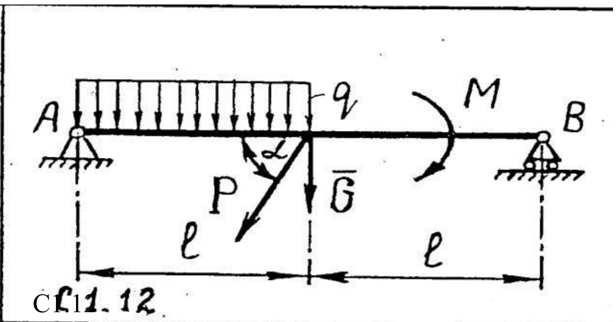
C1.9

C1.10

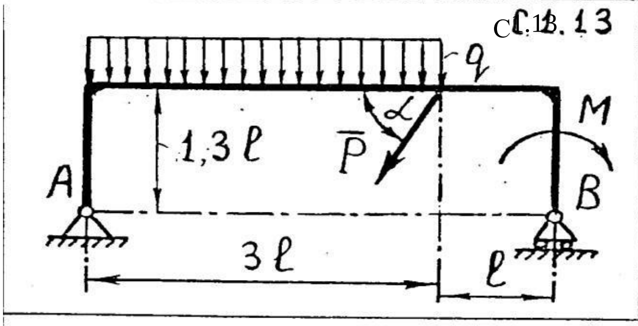




C1.11



C1.12



C1.13

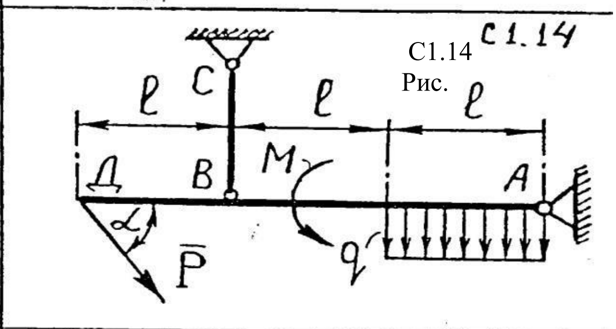
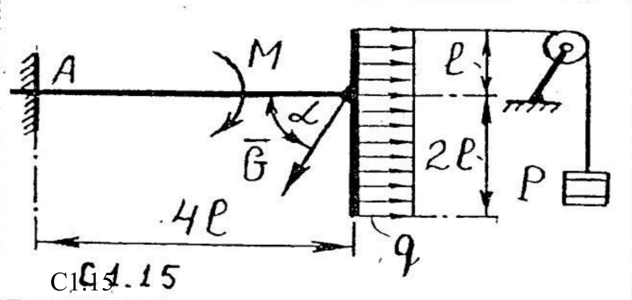
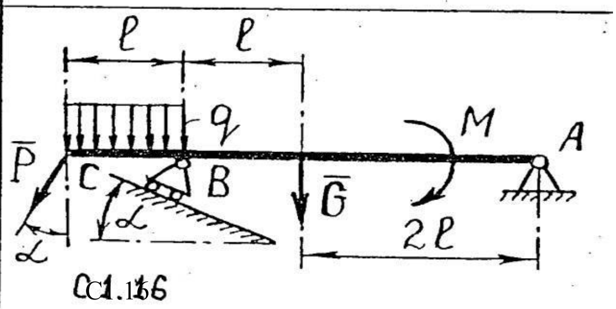


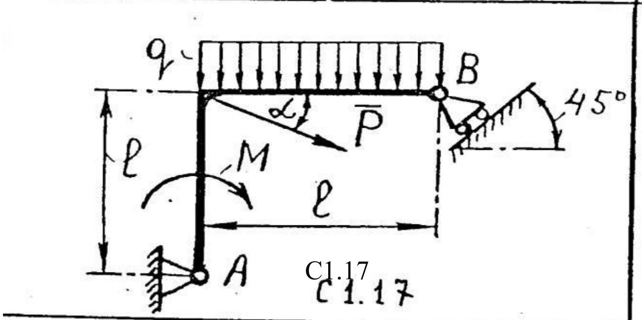
Рис. C1.14



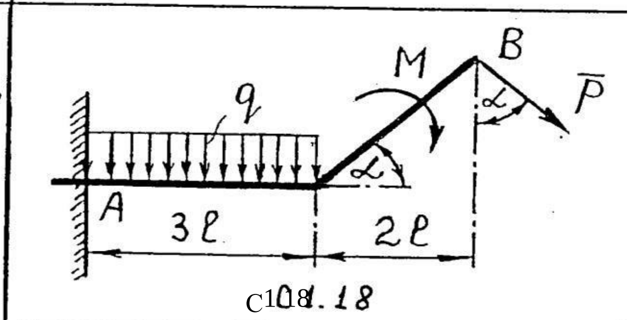
C1.15



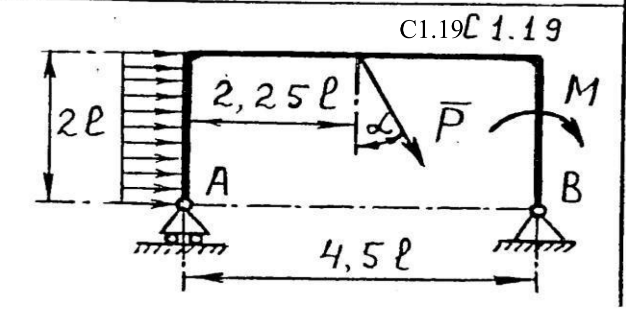
C1.16



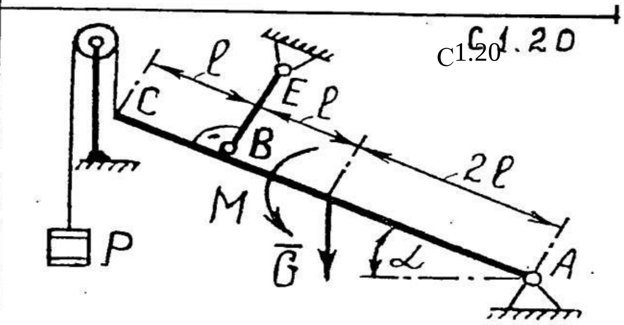
C1.17



C1.18



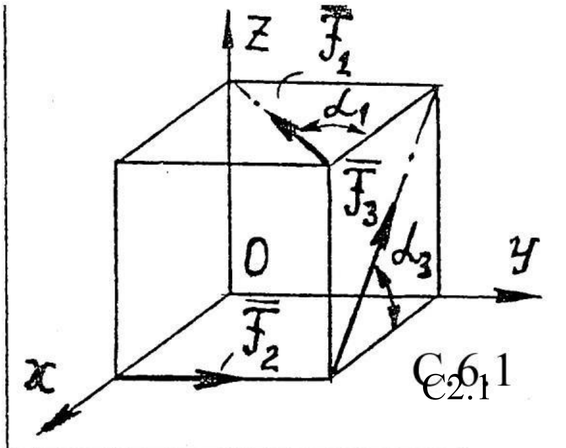
C1.19



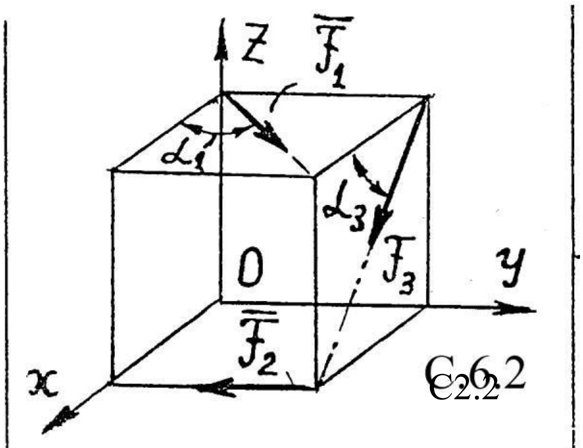
C1.20

Задача С2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕЙСТВИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

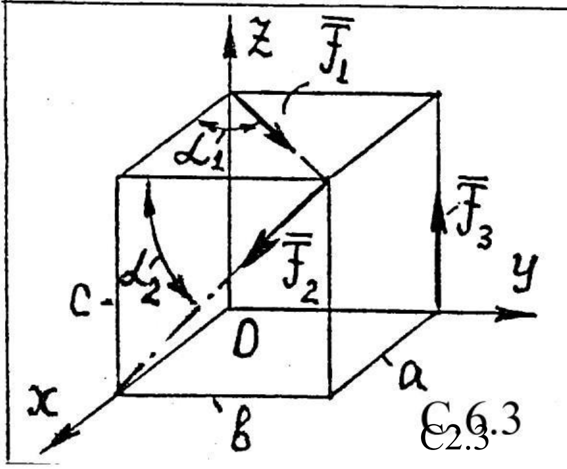
Определить модули главного вектора и главного момента относительно центра О пространственной системы сил (**F1** , **F2** , **F3**). Силы приложены к вершинам прямоугольного параллелепипеда с ребрами а = 1 м, в = с = 3м, причем F_1 = 2кН, F_2 = 3кН, F_3= 5кН.



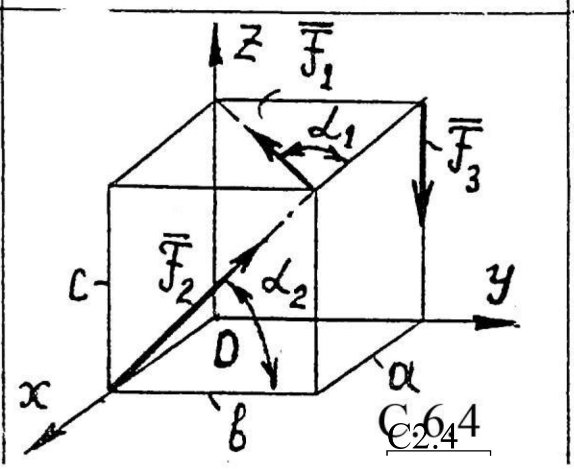
С6.1 С2.1



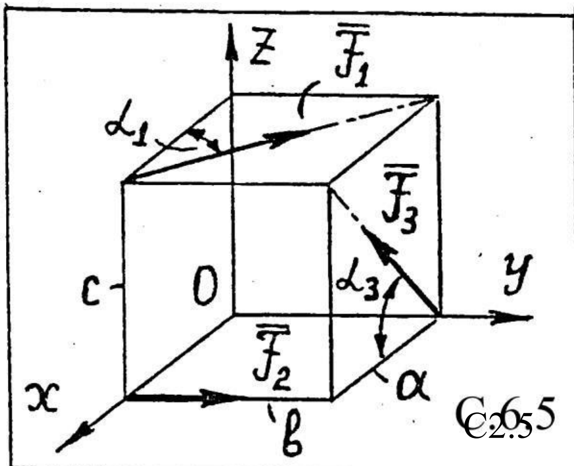
С6.2 С2.2



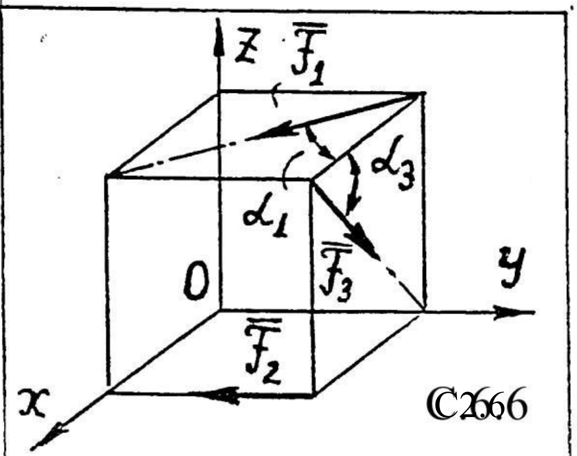
С6.3 С2.3



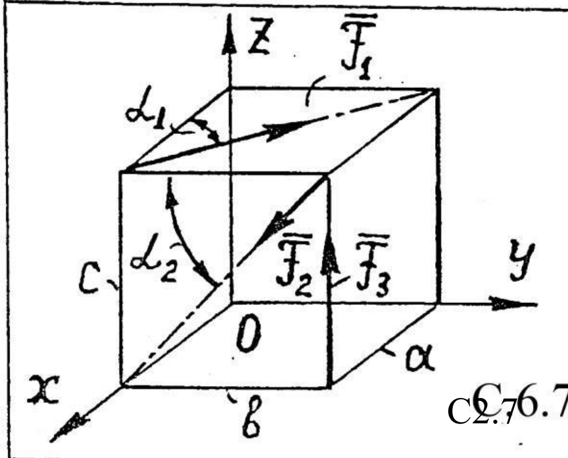
С6.4 С2.4



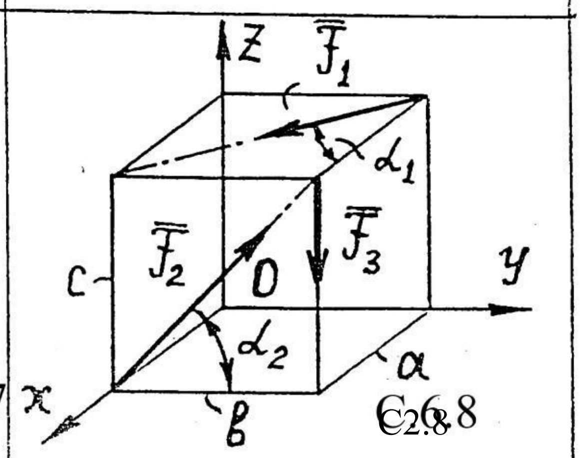
C.6.5
C2.5



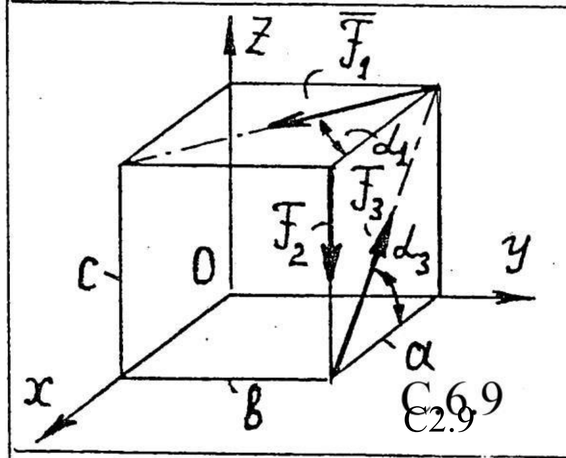
C.6.6
C2.6



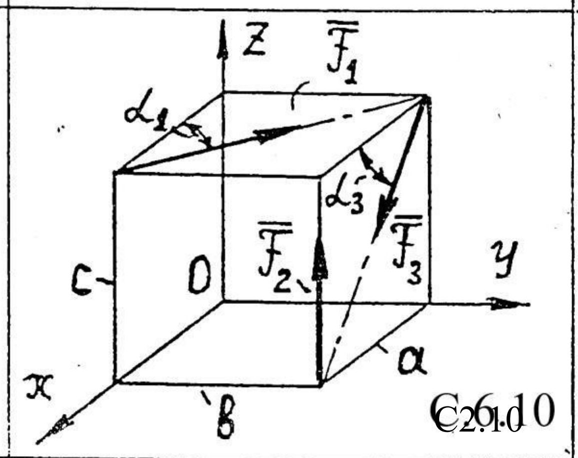
C.6.7
C2.7



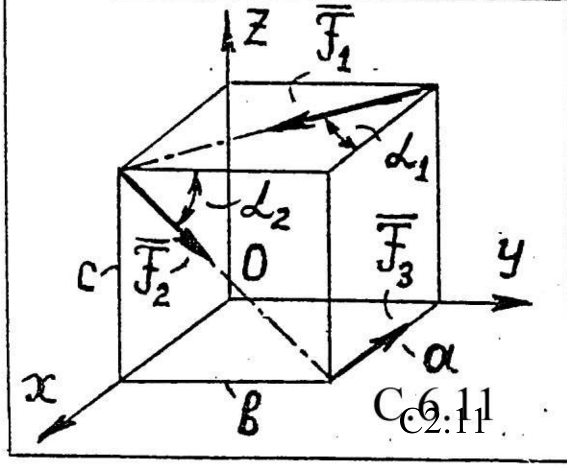
C.6.8
C2.8



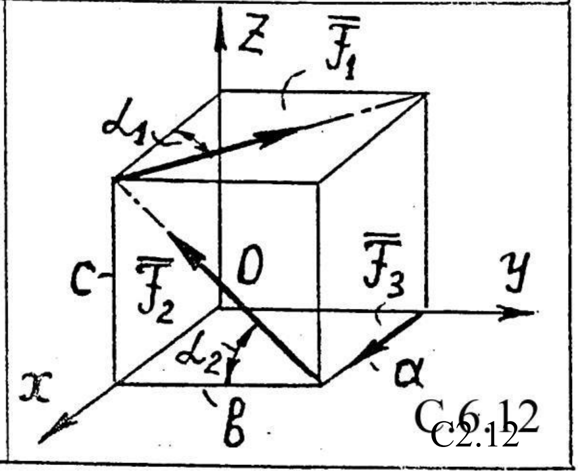
C.6.9
C2.9



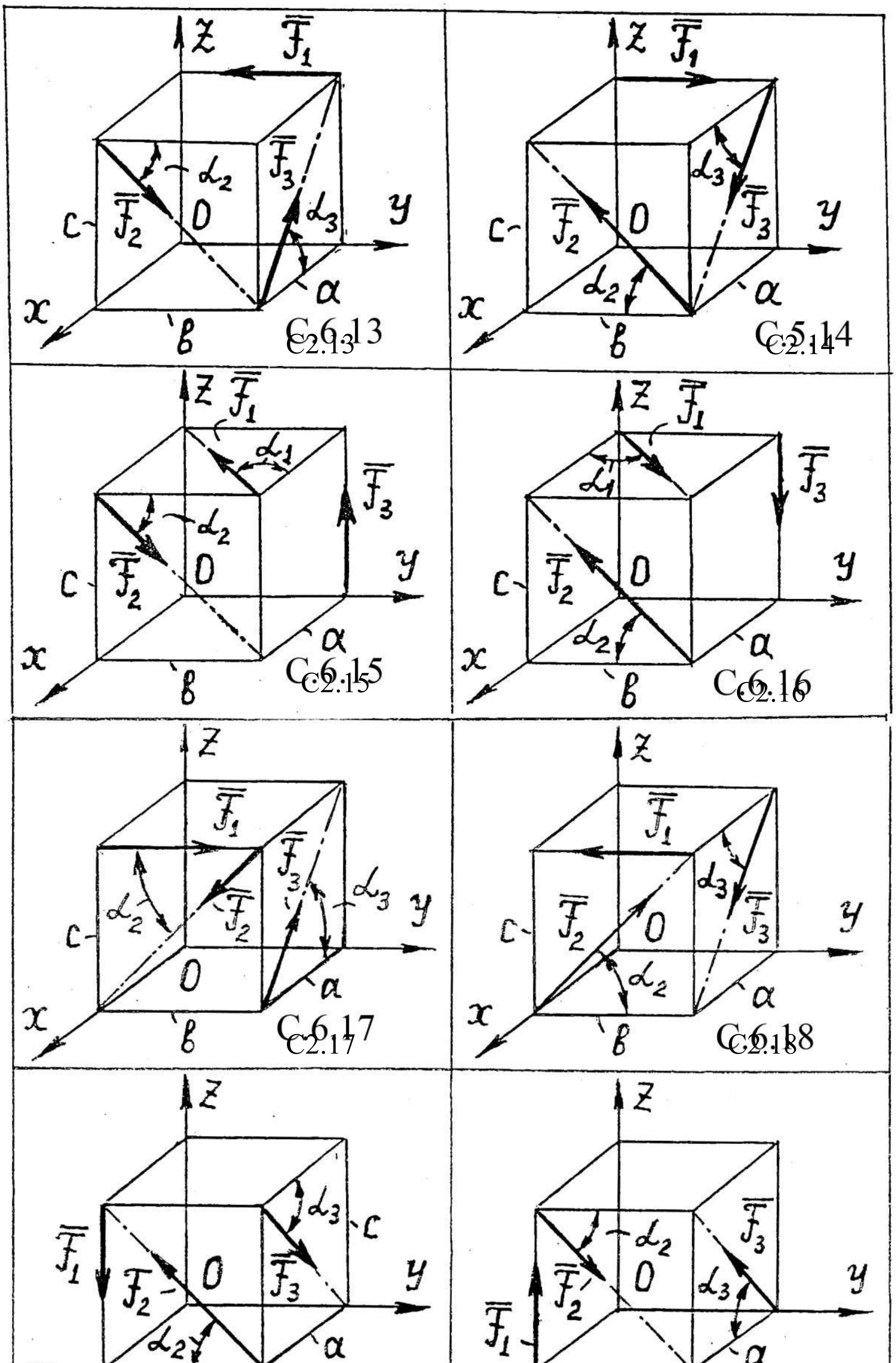
C.6.10
C2.10



C.6.11
C2.11

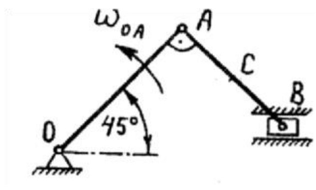


C.6.12
C2.12



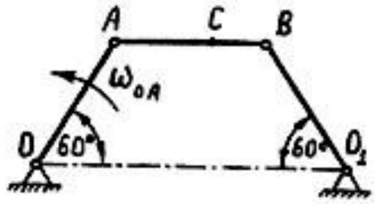
Задача К1 ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Для заданного положения механизма найти скорости точек B и C, а также угловую скорость звена, которому принадлежат эти точки. Схемы механизмов и необходимые для расчета данные показаны на рис. К6.1-К6.20.



К1.1.

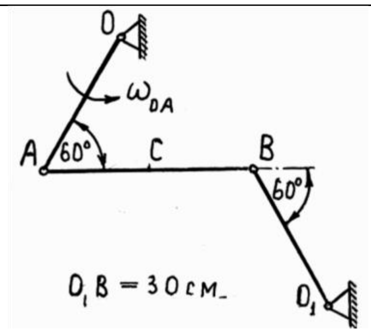
OA=40см, AB=30см,AC=15см, ω_{OA}=2с$^{-1}$.



К1.2.

OA=30см, AB=30см,AC=20см,

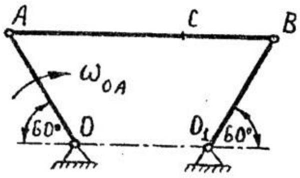
ω_{OA}=4с$^{-1}$.



К1.3.

OA=30см, AB=40см, AC=20см,

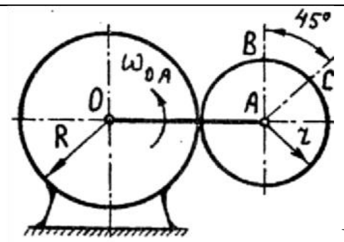
ω_{OA}=2с$^{-1}$.



К1.4.

OA=30см, AB=60см, AC=40см,

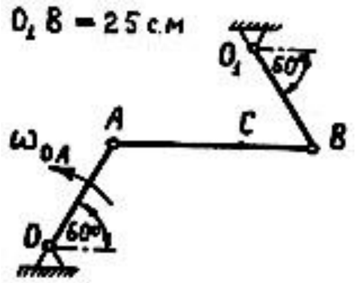
ω_{OA}=2с$^{-1}$.



К1.5.

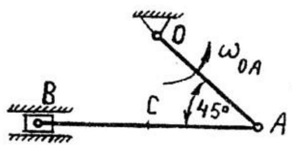
OA=35см, AB=15см, AC=15см,

ω_{OA}=3с$^{-1}$.



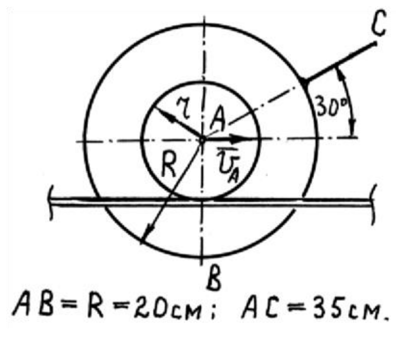
К1.6.

OA=25см, AB=40см, AC=25см, ω_{OA}=3с$^{-1}$.



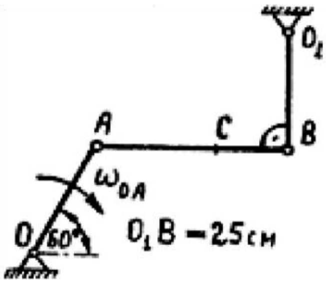
К1.7.

OA=30см, AB=50см, AC=25см, ω_{OA}=3с$^{-1}$.



К1.8.

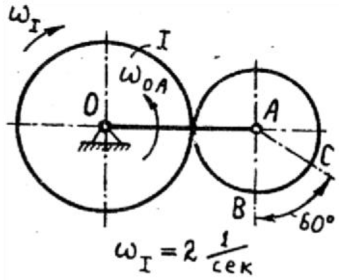
r=10см , V_A=45см/с.



К1.9.

OA=25см, AB=40см, AC=25см,

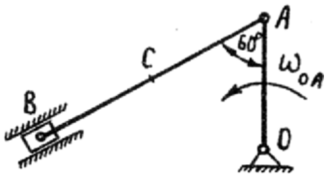
ω_{OA}=5с$^{-1}$.



К1.10.

OA=35см, AB=15см, AC=15см,

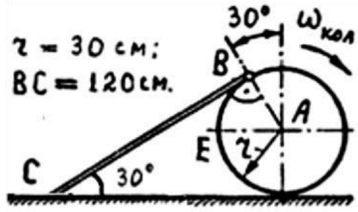
ω_{OA}=6с$^{-1}$.



К1.11.

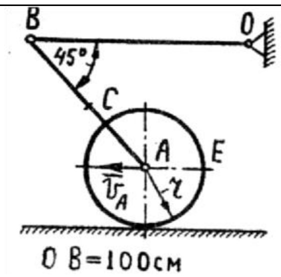
OA=30см, AB=60см, AC=30см,

ω_{OA}=6с$^{-1}$.



К1.12.

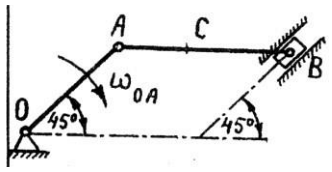
$\omega_{кол}$=3с$^{-1}$.



К1.13.

AB=80см, AC=40см, r=25см

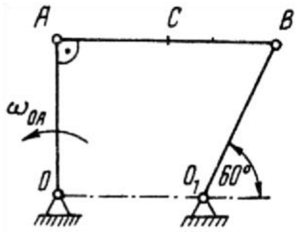
, V_A=100см/с.



К1.14.

OA=30см, AB=40см, AC=15см,

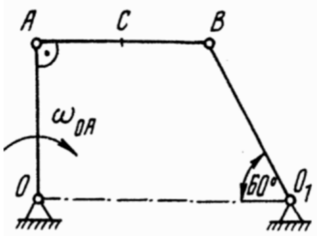
ω_{OA}=4с$^{-1}$.



К1.15.

OA=30см, AB=50см, AC=25см,

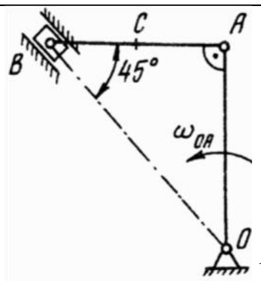
ω_{OA}=3с$^{-1}$.



К1.16.

OA=30см, AB=40см, AC=20см,

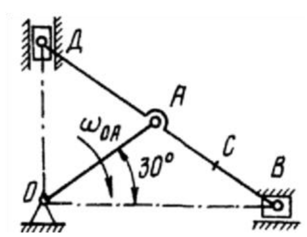
ω_{OA}=2с$^{-1}$.



К1.17.

OA=40см, AB=40см, AC=20см,

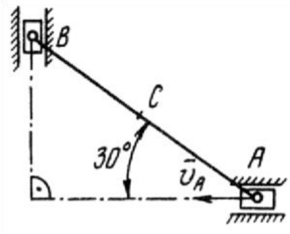
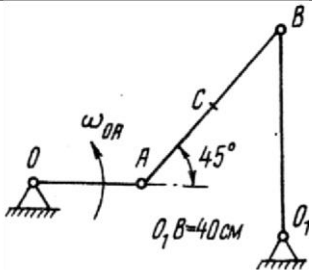
ω_{OA}=5с$^{-1}$.



К1.18.

OA=30см, AB=30см, AC=15см,

ω_{OA}=4с$^{-1}$.

 К1.19. AB=70см, AC=35см, V_A=35см/с.	 К1.20. OA=25см, AB=45см, AC=22.5см, $\omega_{OA}=3c^{-1}$.

Задача Д1
ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Д1.1. Гиря массы ***m = 0,2 кг*** подвешена к нити длиной ***l = 1 м,*** вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость **V = *3 м/с.*** Определить натяжение нити непосредственно после толчка.	**Д1.2.** Груз, привязанный к нити длиной ***l***, движется по окружности в вертикальной плоскости. Какую минимальную скорость в наивысшем положении должен иметь груз, чтобы нить оставалась натянутой?
Д1.3. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой ***m*=3кг** в момент времени ***t* = 6 с**, если она движется по оси Ох согласно уравнению ***x= 0.4t*^{3}*+21t***.	**Д1.4**. Вагон массой ***m=9000 кг*** скатывается с горки . Какой угол к горизонту должна иметь горка, для того чтобы вагон двигался с ускорением ***a = 3 м/с*^{2}**? Угол выразить в градусах.
Д1.5. Точка массой ***m = 4 кг*** движется по горизонтальной прямой с ускорением ***a = 0,3t***. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени ***t = 3 с.***	**Д1.6**. Груз массы ***m = 0,1 кг,*** подвешенный на нити длиной ***l = 0,4м*** в неподвижной точке О, представляет собой конический маятник, то есть описывает окружность в горизонтальной плоскости, причѐм нить составляет с вертикалью угол $\alpha = 30°$**.** Определить скорость груза и натяжение нити.
Д1.7. Автомобиль массы ***m = 1500 кг*** движется по вогнутому, участку дороги со скоростью ***V = 10 м/с.*** Радиус кривизны в нижней точке дороги $\rho = 60$ ***м***. Определить силу давления автомобиля на дорогу в момент прохождения этого участка дороги.	**Д1.8**. Локомотив, двигаясь с ускорением ***a = 1 м/с*^{2}** по горизонтальному участку пути, перемещает вагоны массой 60000 кг. Определить силу в автосцепке, если сила сопротивления движению состава равна F_c = 0.002mg.
Д1.9. Тело массой ***m = 4 кг*** движется по горизонтальной прямой со скоростью ***V = 0,9t*^{2}*+2t***. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени *t* = 3 с.	**Д1.10**. Искусственный спутник Земли описывает круговую орбиту радиуса R на небольшой высоте над поверхностью Земли (изменением силы тяжести на этой высоте по сравнению с силой тяжести на поверхности Земли можно пренебречь). Определить скорость движения спутника по орбите и время одного оборота спутника. Радиус Земли ***R= 6380 км***.
Д1.11. Материальная точка массой m=2 кг движется по окружности радиуса R = 0,6 м согласно уравнению ***S= 2,4t*^{2}**. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к материальной точке.	**Д1.12**. Материальная точка массой ***m=100кг*** движется в плоскости ***Oxy*** согласно уравнениям ***x = at*^{2}*, y = bt,*** где ***a=10 и b=100 -*** постоянные. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке.
Д1.13. Груз массы m = 100 кг, подвешенный к концу намотанного на барабан троса, движется с ускорением ***a = 0,2 g***. Определить натяжение троса при подъѐме и опускании груза.	**Д1.14**. Материальная точка массой ***m = 16 кг*** движется по окружности радиуса ***R = 9 м*** со скоростью ***V=3 м/с***. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на главную нормаль к траектории.
Д1.15. Материальная точка массой ***m*= 9 кг** движется в горизонтальной плоскости *Oxy* с $a = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ ускорением . Определить модуль силы, действующей на нее в плоскости движения.	**Д1.16** .Движение материальной точки массой ***m = 8 кг*** происходит в горизонтальной плоскости ***Oxy*** согласно уравнениям ***x = 5t и y = t*^{3}**. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени t = 4 с.

Д1.17. Автомобиль массы ***m = 1500 кг*** движется по выпуклому участку дороги со скоростью **V** = ***10 м/с***. Радиус кривизны в верхней точке дороги ρ = ***60 м***. Определить силу давления автомобиля на дорогу в момент прохождения этого участка дороги.	**Д1.18**. Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой ***b=5 см***. Найти наименьшую частоту ***k*** колебаний решета, при котором куски руды, лежащие на нѐм, отделяются от него и подбрасываются вверх.
Д1.19. Материальная точка массы **m** движется в плоскости согласно уравнениям $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$. Найти силу, действующую на точку.	**Д1.20**. Определить давление человека массой **m = 80 кг** на площадку лифта в начале подъѐма и перед остановкой; ускорение (замедление) лифта **a = 0,2g**.

Задача Д2
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Д2.1. Вагон массой m ударяет в пружинный амортизатор жѐсткостью c, имея в момент начала удара скорость V_0 . Определить максимальную деформацию пружины амортизатора, пренебрегая еѐ массой и полагая еѐ недеформированной перед ударом.
Д2.2. Маховое колесо радиуса R и веса P вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Колесо останавливают с помощью тормозной колодки силой P, линия действия которой проходит через ось маховика перпендикулярно этой оси. Найти коэффициент трения между тормозной колодкой и ободом колеса, если оно до остановки сделало N оборотов. Трением в подшипниках пренебречь.
Д2.3. Барабан массой m и радиусом r приводится во вращательное движение из состояния покоя моментом M. Определить ускорение поднимаемого с помощью троса груза массой m_1 . Барабан считать однородным цилиндром, массой троса пренебречь.
Д2.4. Транспортѐр приводится в движение из состояния покоя моментом M, приложенным к нижнему шкиву. Определить ускорение груза массой m, если шкивы А и В радиусом r и массой m_1 каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортѐра, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам и груза по ленте отсутствует.
Д2.5. Тележка начинает движение из состояния покоя под действием момента M, приложенного к передним колѐсам. Масса тележки без колѐс равна m_1 масса каждого из четырѐх колѐс радиусом r равна m_2 , коэффициент трения качения δ. Определить ускорение тележки, считая колѐса однородными дисками.
Д2.6. Тележка начинает движение без скольжения из состояния покоя под действием горизонтальной силы P. Масса тележки без колѐс равна m_1 масса каждого из четырѐх колѐс радиусом r равна m_2, коэффициент трения качения δ. Определить скорость тележки, считая колеса однородными дисками.
Д2.7. Чему равна кинетическая энергия зубчатой передачи двух цилиндрических колес с числом зубьев $z_2= 2z_1$, если их момент инерции относительно осей вращения $I_2= 2\ I_1=6$ *кгм*^{2}, а угловая скорость колеса 1 равна $\omega_1=10$ *рад/с*
Д2.8. На горизонтальный вал диаметром d насажен маховик диаметром D делающий n *[об/мин]*. Определить коэффициент трения скольжения между валом и подшипниками, если после выключения привода маховик сделал N оборотов до остановки. Массу маховика считать равномерно распределѐнной по его ободу. Массой вала пренебречь.
Д2.9. Шар весом P, лежащий на пружине с коэффициентом жѐсткости c, вызывает статическую осадку пружины ***0,025 м***. Какова будет осадка пружины, если тот же шар упадѐт на пружину с высоты $h = 0,1$ ***м.*** Массой пружины пренебречь.
Д2.10. Оси колеса радиусом r, находящемуся на горизонтальной плоскости, сообщили скорость V_0. Коэффициент трения качения равен δ. Определить путь, пройденный колесом до остановки. Качение колеса происходит без скольжения. Колесо считать однородным диском.

Д2.11. Однородный диск массой ***m= 30 кг*** радиуса ***R=1 м*** начинает вращаться из состояния покоя равноускорено с постоянным угловым ускорением ***=2рад/с***^{2}. Определить кинетическую энергию диска в момент времени ***t=2с*** после начала движения.
Д2.12. Снаряд массой ***m*** вылетает из ствола орудия со скоростью V_0. Длина ствола орудия ***l.*** Найти силу среднего давления газов на снаряд.

Д2.13. Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса ***R*** для того, чтобы оно, катясь без скольжения, поднялось на высоту ***H*** по наклонной плоскости, образующей угол ***α*** с горизонтом? Коэффициент трения качения равен . Колесо считать однородным диском.
Д2.14. Стержень длиной ***l*** подвешен на шарнире О. Какую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он поднялся до горизонтального положения?
Д2.15. Однородная цепочка длиной ***l*** лежит на гладком горизонтальном столе, и часть еѐ свешивается. Предоставленная самой себе, цепочка соскальзывает со стола. Найти скорость цепочки в тот момент, когда она вся сойдѐт со стола, если в начальный момент длина свешивающейся части незначительна.
Д2.16. Лыжник скатывается с горки. Длина горки - ***l,*** угол наклона горки с горизонтом - ***α,*** коэффициент трения между лыжами и снегом – ***f.*** Найти расстояние, пройденное лыжником на горизонтальном участке до остановки.
Д2.17. Какую скорость приобрѐл бы камень при падении без начальной скорости с высоты ***H,*** если бы не было сопротивления воздуха?
Д2.18. Груз массой ***m*** подвешен к недеформированной пружине жѐсткостью ***c*** и отпущен без начальной скорости. Найти наибольшее расстояние, на которое опустится груз.
Д2.19. Шар весом ***P,*** лежащий на пружине с коэффициентом жѐсткости ***c*** , вызывает статическую осадку пружины ***0,025 м***. Какова будет осадка пружины, если тот же шар упадѐт на пружину с высоты ***h = 0,1 м***. Массой пружины пренебречь.
Д2.20. Пружина имеет в ненапряжѐнном состоянии длину ***20 см.*** Сила, необходимая для изменения еѐ длины на ***0,01 м,*** равна ***1,96 Н***. С какой скоростью ***V*** вылетит из трубки шарик массой ***0,03 кг***, если пружина была сжата до длины ***0,1 м.*** Трубка с пружиной расположена горизонтально.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧ

Задача 1 (рис. 1, рис. 2)

Найти реакции связей изогнутой балки АВС, находящейся под действием плоской системы сил . Вычисление реакций выполнить при $a = 1{,}2$ *м*, $b = 2{,}4$ *м*, $l = 1{,}8$ *м*, $\alpha = 30^o$, $P_1 = 8$ *кН*, $P_1 = 6$ *кН*, $M = 8$ *кНм*.

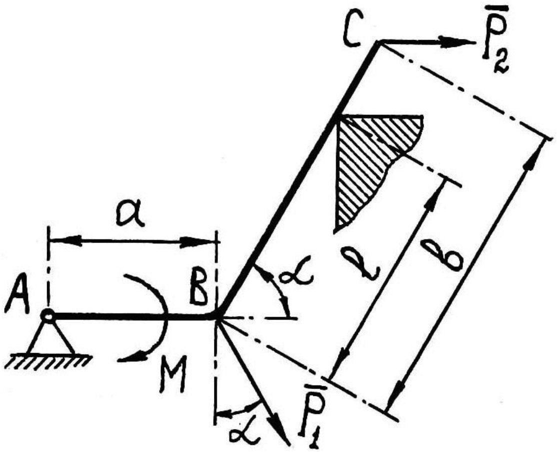


Рис. 1

Решение

Освободим балку от связей и приложим к ней реакции связей. На рис.2 $\bar R_Д$ – реакция выступа стены ($\bar R_Д \perp BC$), $\bar R_{Ax}, \bar R_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А.

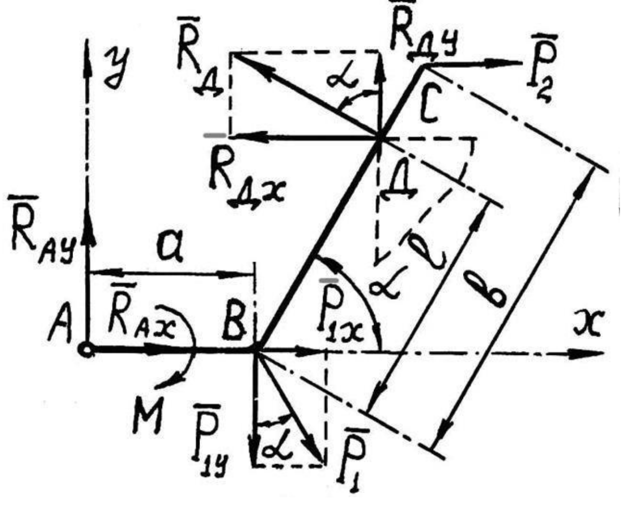


Рис. 2

Разложим силы $\bar P_1$ и $\bar R_Д$ на составляющие вдоль осей координат

$$\bar P_1 = \bar P_{1x} + \bar P_{1y}; \qquad \bar R_Д = \bar R_{Дx} + \bar R_{Дy}.$$

Условия равновесия балки имеют вид

$$R_Д \sin 2\alpha + P_2 = 0;$$

$$R_Д \cos 2\alpha = 0;$$

$$\sum F_{kx}=0; \qquad R_{Ax}+P_1\sin\alpha-(R_Д\sin 2\alpha)l\sin 2\alpha+(R_Д\cos 2\alpha)(a+l\cos 2\alpha)-$$
$$\sum F_{ky}=0; \qquad R_{Ay}-P_1\cos\alpha+$$
$$\sum m_A(F_k)=0; \qquad -P_2 b\sin 2\alpha+$$
$$-(P_1\cos\alpha)a-M=0$$

После решения составленной системы уравнений получаем

$R_{Ax}=-1{,}04кН,$ $R_{Ay}=1{,}27кН,$ $R_Д=10{,}34кН$.

Задача 2 (рис. 3, рис. 4)

Определить реакции изогнутой балки АВС, находящейся под действием плоской системы сил. Вычисление реакций выполнить при l = 1 м, α = 60°, P = 20 кН, M = 25 кНм (момент пары сил), q = 3 кН/м (интенсивность равномерно распределенной нагрузки).

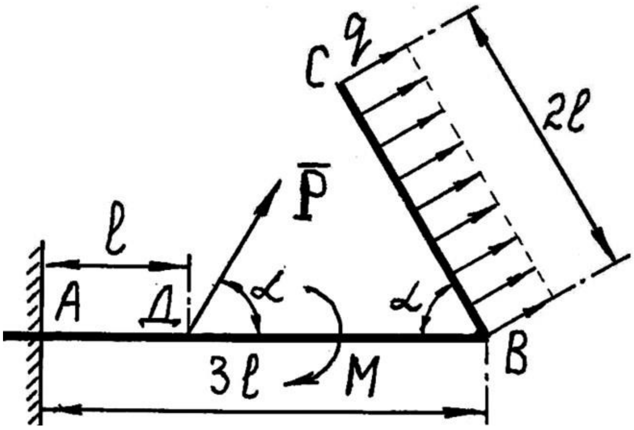


Рис. 3

Решение:

Освободим балку от связей и приложим к ней реакции связей. На рис. 4 $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции заделки вдоль осей координат, m_A – момент заделки (момент пары сил).

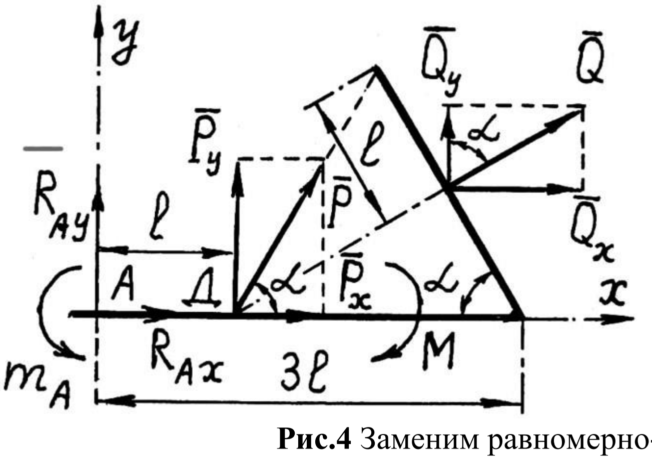


Рис.4 Заменим равномерно-распределенную нагрузку на участке ВС равнодействующей силой $\vec{Q}$, причем $Q=q\times 2l=6кН$.

Разложим силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ на составляющие вдоль осей координат

$$\vec{Q} = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y; \qquad \vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y .$$

Составим уравнения равновесия балки

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad R_{Ax} - P\cos\alpha - Q\sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad R_{Ay} + P\sin\alpha + Q\cos\alpha = 0;$$

$$\sum m_Д(F_k) = 0; \qquad m_A - M - R_{Ay} l = 0.$$

Из этой системы уравнений находим

$$R_{Ax} = 15{,}2\,кН, \qquad R_{Ay} = -20{,}32\,кН, \qquad m_A = 4{,}68\,кНм.$$

Задача 3 (рис. 5, рис. 6)

К изогнутой балке АВСД приложены силы *P_1 = 5 кН, P_2 = 4 кН* и пара сил с моментом *M = 8 кНм* . Размеры *а = 1,5 м, в = 1,8 м, h = 1,2 м, α = 30°*. Определить реакции балки.

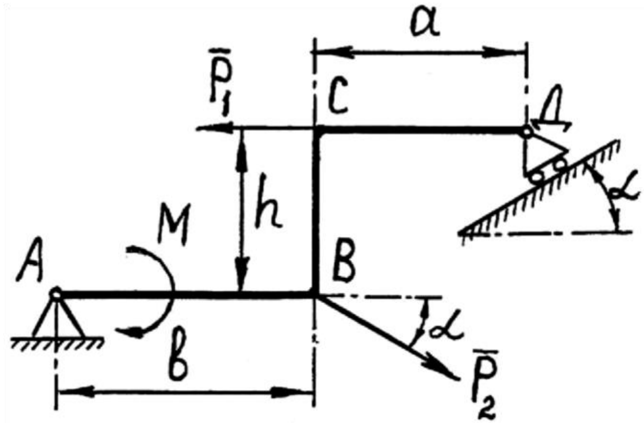


Рис. 5

Решение (рис. 6)

Освободим балку от связей, приложим к ней реакции связей. На рис.6 $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А, $\vec{R}_Д$ – реакция подвижного шарнира Д. Заметим, что $\vec{R}_Д$ направлена перпендикулярно плоскости, по которой могут перемещаться катки реакция тележки шарнира Д.

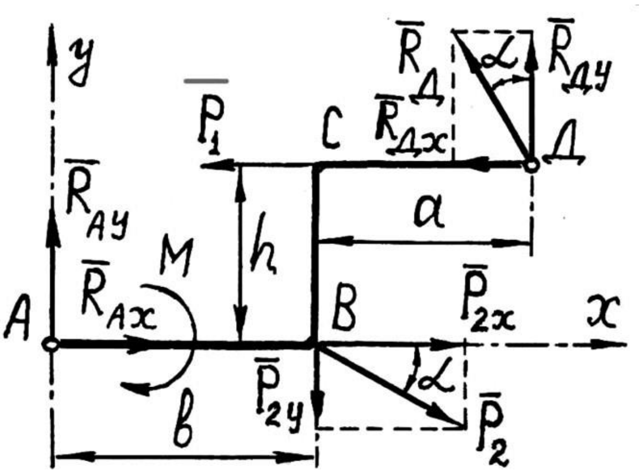


Рис. 6

Разложим силы $\vec P_1$ и $\vec R_Д$ на составляющие вдоль осей координат:

$\vec P_1 = \vec P_{1x} + \vec P_{1y}$; $\quad \vec R_Д = \vec R_{Дx} + \vec R_{Дy}$.

Составим уравнения равновесия балки:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} - P_1 + P_2\cos\alpha - R_Д \sin\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - P_2\sin\alpha + R_Д\cos\alpha = 0;$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad (R_Д\cos\alpha)(a+b) + (R_Д\sin\alpha)h - (P_2\sin\alpha)b + P_1 h - M = 0.$$

Решаем эту систему уравнений и находим неизвестные величины:

$R_{Ax} = 2{,}34\,кН,\quad R_{Ay} = 0{,}6\,кН,\quad R_Д = 1{,}62\,кН$.

Задача 4 (рис. 7, рис. 8)

Определить реакции связей плиты АВСД, находящейся под действием плоской системы сил. Невесомый стержень СЕ образует угол α с горизонталью. Вычисление реакций выполнить при заданных размерах *a = 1,6 м, b = 1,2 м, h = 1,2 м,* $\alpha = 60^o$, $P_1 = 15$ *кН,* $P_2 = 10$ *кН, M = 8кНм..*

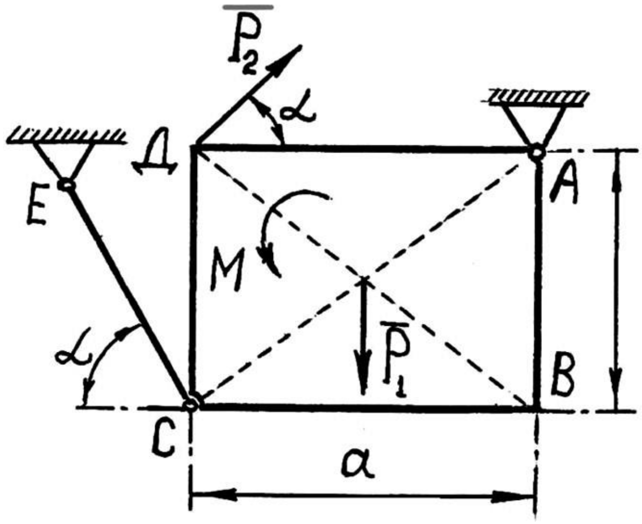


Рис. 7

Решение (рис. 8)

Освободим плиту от связей, приложим к ней реакции связей. На схеме показаны: $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ – составляющие реакции шарнира А, $\vec{R}_C$ – реакция подвижного шарнира С, направленная вдоль стержня СЕ. Силу $\vec{P}_2$ разложим на составляющие

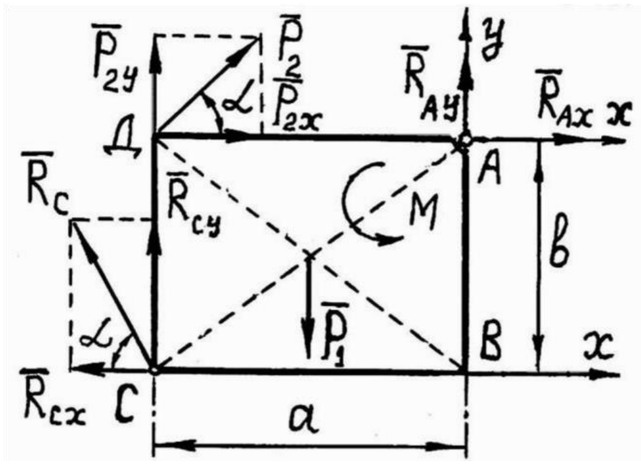


Рис. 8

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_{2x} + \vec{P}_{2y}.$$

Уравнения равновесия плиты имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + P_2 \cos 45^o - R_C \cos 60^o = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} + P_2 \sin 45^o + R_C \sin 60^o = 0;$$

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad (R_C \sin 60^o)a - (R_C \cos 60^o)b - (P_2 \sin 45^o)a + P_1 a/2 + M = 0$$

Из решения этой системы уравнений находим

$$R_{Ax} = -0{,}6\kappa H, \qquad R_{Ay} = -18{,}26\kappa H, \qquad R_{Д} = 12{,}92\kappa H \,.$$

Задача 5 (рис. 9, рис. 10)

Определить модули главного вектора и главного момента системы сил, изображенной на рисунке, если F_1 = 6 кН, F_2 = 4 кН, F_3 =3 кН. Силы приложены в вершинах прямоугольного параллелепипеда со сторонами 5, 3 и 4 м.

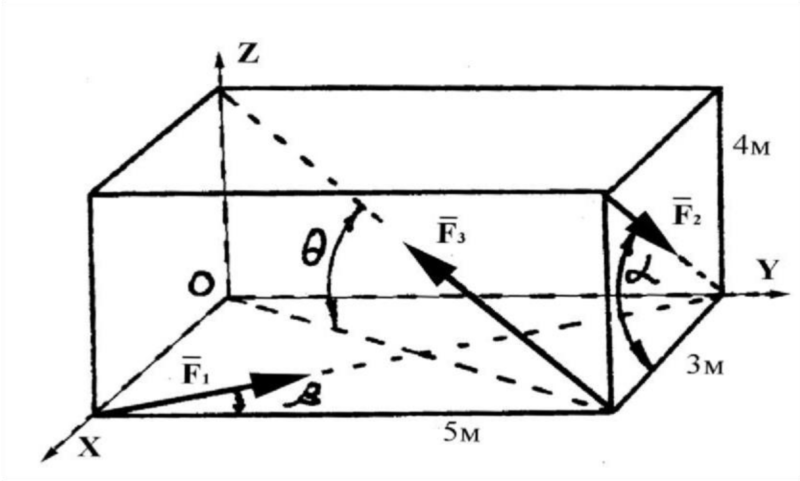


Рис. 9

α, β, θ , как показано на рисунке 9. В ходе решения понадобятся значения синусов и косинусов этих углов, которые определим ниже.

$$\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} \quad ,\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}},$$

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}} \quad ,\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}},$$

$$\theta = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}} \quad ,\cos\theta = \frac{\sqrt{5^2+3^2}}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}}.$$

Находим проекции главного вектора на оси координат

$$= \sum F_{kx}; \qquad R_x = -F_1 \sin\beta - F_3 \cos\theta \sin\beta - F_2 \cos\alpha;$$

$$= \sum F_{ky}; \qquad R_y = F_1 \cos\beta - F_3 \cos\theta \cos\beta;$$

$$R_z = \sum F_{kz}; \qquad R_z = F_3 \sin\theta - F_2 \sin\alpha.$$

Обозначим углы

sin

sin

sin

$R_x R_y$

Определяем значения проекций главного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Подставляем численные значения величин в эти уравнения и определяем числовые значения проекций главного вектора, которые равны: R_x = -6.8 кН; R_y = 3 кН; R_z = -1.5 кН; R = 7.6кН.

Вычислим проекции главного момента M_0 на оси координат рис.10.

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на перпендикулярную оси плоскость, относительно точки пересечения оси и плоскости. Момент будет равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или линия действия силы пересекает ось.

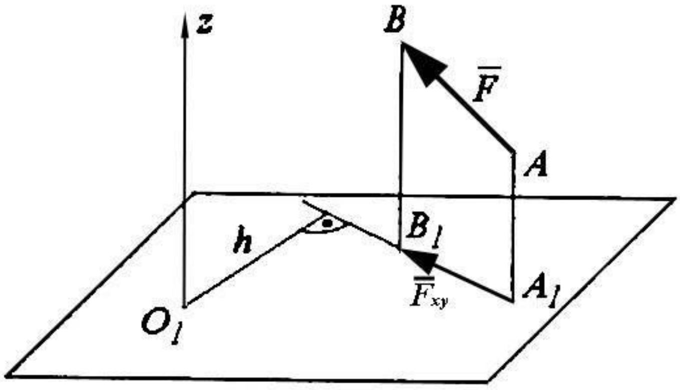


Рис. 10

Момент силы относительно оси будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси поворот, который стремится совершить сила F, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус - по ходу часовой стрелки.

Проекции главного момента M_0 на оси координат и величина этого момента определяются по формулам

$$M_x = \sum m_{kx}; \qquad M_x = 5 \cdot F_3 \sin\theta - 5 \cdot F_2 \sin\alpha;$$
$$M_y = \sum m_{ky}; \qquad M_y = -3 \cdot F_3 \sin\theta;$$
$$M_z = \sum m_{kz}; \qquad M_z = 3 \cdot F_1 \cos\beta + 5 \cdot F_2 \cos\alpha.$$

$$M0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

После подстановки численных значений, получим M_x = -7.5 кНм; M_y = -5.1 кНм; M_z = 27.4 кНм; M_0 = 28.9 кНм.

Задача 6 (рис. 11)

Колесо радиуса R = 0,6 [м] катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость его центра С постоянна и равна V_C = 12 [м/с].

Найти угловую скорость колеса и скорости концов M_1, M_2, M_3, M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса.

Решение (рис. 11)

Колесо совершает плоско – параллельное движение. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке M_1 контакта горизонтальной плоскости, то есть $V_{M1} = 0$.

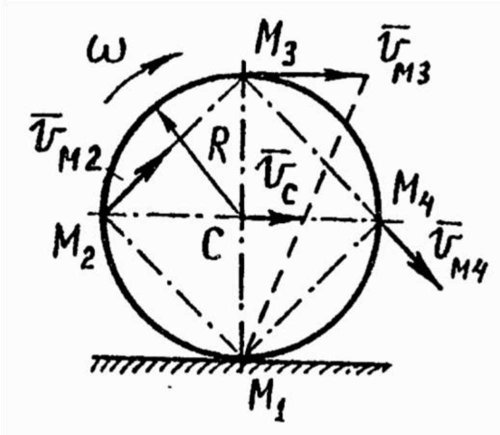


Рис. 11 Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CM_1} = \frac{V_C}{R} = \frac{12}{0,6} = 20 \quad [1/с].$$

Находим скорости точек M_2, M_3 и M_4

$$V_{M2} = \omega \cdot M_2M_1 = \frac{V_C}{R} R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 16,92 \quad [м/с]$$

$$V_{M3} = \omega \cdot M_3M_1 = \frac{V_C}{R} 2r = 2V_C = 24 \quad [м/с]$$

$$V_{M4} = \omega \cdot M_4M_1 = \frac{V_C}{R} R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2} = 16,92 \quad [м/с]$$

$\bar{V}_{M2} \perp M_2M_1$; $\bar{V}_{M3} \perp M_3M_1$; $\bar{V}_{M4} \perp M_4M_1$.

Задача 7 (рис. 12)

Ведущее колесо автомобиля радиуса R = 0,5 [м] катится со скольжением (с буксованием) по прямолинейному участку шоссе; скорость его центра С постоянна и равна V_C = 4 [м/с]. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке Р на расстоянии h = 0,3 [м] от плоскости качения. Найти угловую скорость колеса и скорости точек А и В его вертикального диаметра.

Решение (рис. 12)

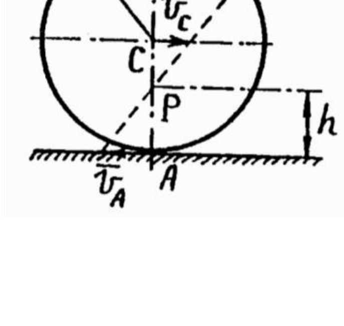


Рис. 12

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R-h} = \frac{4}{0{,}5-0{,}3} = 20 \text{ [1/с]}$$

Находим скорости точек А и В

$$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot h = 20 \cdot 0{,}3 = 6 \text{ [м/с]}$$

$$V_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (2R-h) = 20 \cdot 0{,}7 = 14 \text{ [м/с]};$$

$\bar{V}_A \perp AP$; $\bar{V}_B \perp BP$.

Задача 8 (рис. 13)

Ведомое колесо автомобиля радиуса R = 0,5[м] катится со скольжением (с юзом) по прямолинейному участку шоссе; скорость его центра С постоянна и равна V_C = 9 [м/с]. Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке Р на расстоянии h = 0,4 [м] от плоскости качения. Найти угловую скорость колеса и скорости точек А и В его вертикального диаметра.

Решение (рис. 13)

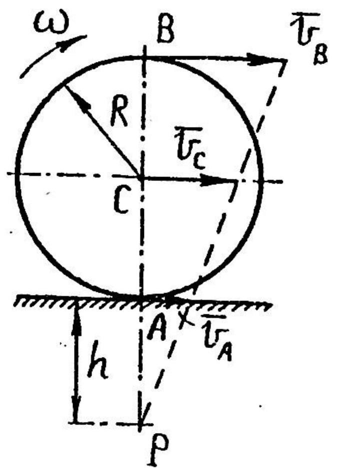


Рис. 13

Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R+h} = \frac{9}{0{,}5+0{,}4} = 10 \text{ [1/с]}$$

Находим скорости точек А и В

$V_A = \omega \cdot AP = \omega \cdot h = 10 \cdot 0{,}4 = 4$ [м/с]; $V_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot (R+h) = 10 \cdot 1{,}4 = 14$[м/с];

$\bar{V}_A \perp AP$; $\bar{V}_B \perp BP$.

Задача 9 (рис. 14, рис. 15)

Для заданного положения механизма, найти скорости точек А, В, С, Д и угловые скорости звена АВ и колеса с ребордой, катящегося без скольжения. Дана угловая скорость кривошипа ОА и размеры: ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ОА = 0,3 м, АВ = 0,4 м, R = 0,15 м, r = 0,1 м.

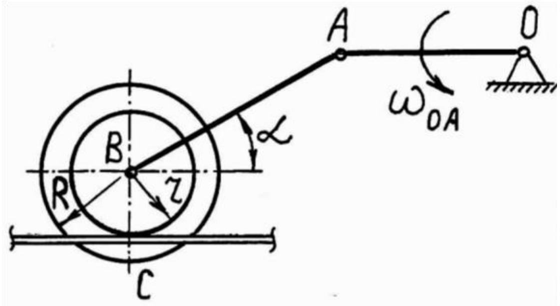


Рис. 14

Решение (рис. 15)

Кривошип ОА совершает вращательное движение, звено АВ и колесо – плоскопараллельное движение.

Находим скорость точки А звена ОА $v_A = \omega_{OA} OA = 2 \times 0{,}3 = 0{,}6\, мс^{-1}$

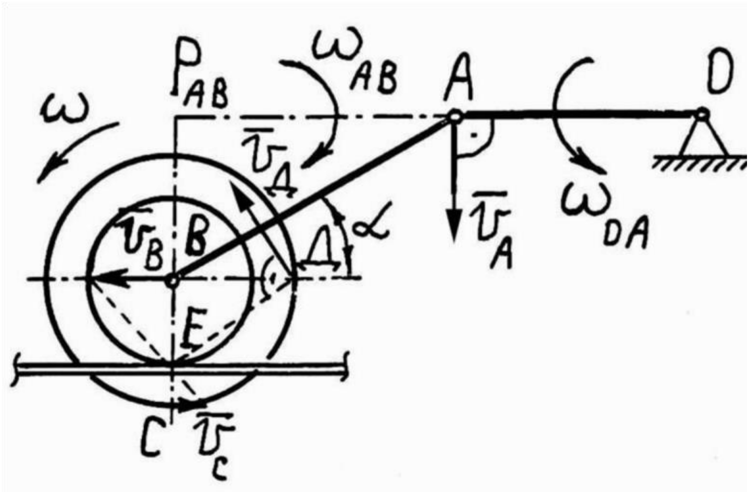


Рис. 15

Зная направление скоростей точек А и В звена АВ, определяем положение его мгновенного центра скоростей – точку P_{AB}. ($\vec{v}_A \perp OA$; вектор $\vec{v}_B$ направлен по горизонтали).

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_A}{AB\cos 30^o} = \frac{0{,}6}{0{,}4 \times 0{,}866} = 1{,}732\, с^{-1},$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{AB}(AB\sin 30^o) = 1{,}732(0{,}4 \times 0{,}5) = 0{,}346\, мс^{-1}.$$

Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке Е.

Угловая скорость колеса и скорости точек С и Д:

$$\omega = \frac{v_B}{\ } = \frac{v_B}{\ } = \frac{0{,}346}{\ } = 3{,}46\, с^{-1}$$

$BE \quad r \quad 0,1 \quad ;$

$$v_{C1} = \omega C_E = \omega(R - r) = 3,46(0,15 - 0,1) = 0,173\ м/с;$$

$$v_Д = \omega ДЕ = \omega\sqrt{R^2 + r^2} = 3,46\sqrt{0,15^2 + 0,1^2} = 0,634\ м/с.$$

Задача 10 (рис. 16)

Две параллельные рейки движутся в одну сторону со скоростями V_1 = 1,8 м/с и V_2 = 0,6 м/с. Между рейками зажат диск радиуса r = 0,3 м, катящийся по рейкам без скольжения. Найти угловую скорость диска и скорость его центра С.

Решение (рис. 16)

Скорости точек А и В диска (этими точками диск касается реек) $V_A = V_1$; $V_B = V_2$

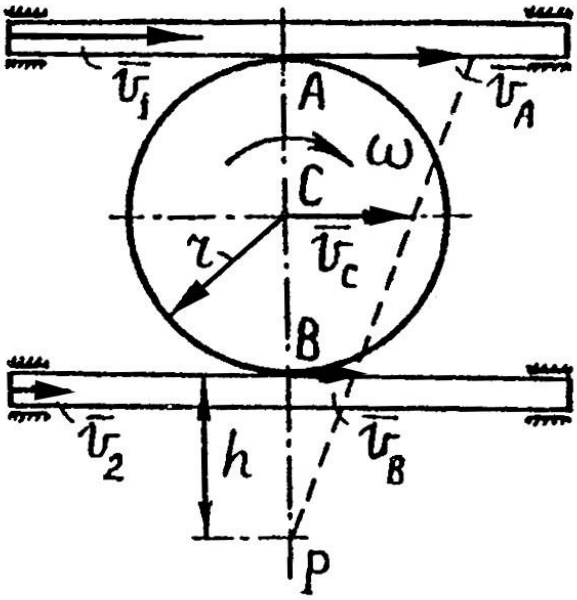


Рис. 16

Мгновенный центр скоростей диска лежит на прямой АВ в некоторой точке Р, причем

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \text{ или } \frac{V_A}{2r + h} = \frac{V_B}{h}.$$

Отсюда находим

$$h = BP = \frac{V_B 2r}{V_A - V_B} = \frac{0,6 \cdot 0,6}{1,8 - 0,6} = 0,3 \text{ [м]}$$

Угловая скорость диска и скорость его центра

$$\omega = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_B}{h} = \frac{0,6}{0,3} = 2 \text{ [1/с]}$$

$$V_C = \omega \cdot CP = \omega(r + h) = 2 \cdot 0,6 = 1,2 \text{[м/с]}$$

Задача 11 (рис. 17, рис. 18)

Найти угловую скорость шатуна АВ и скорости точек В и С кривошипно-шатунного механизма. Дана угловая скорость кривошипа ОА и размеры: $\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$, ОА = АВ = 0,35 м, АС = 0,18 м.

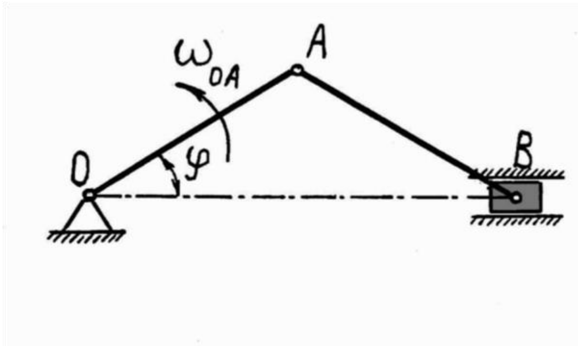


Рис. 17

Решение (рис. 18)

Кривошип ОА совершает вращательное движение, шатун АВ – плоскопараллельное движение.

Находим скорость точки А звена ОА :

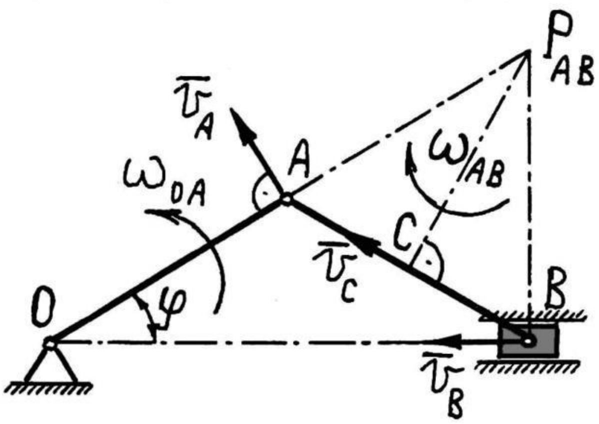


Рис. 18

$$v_A = \omega_{OA} OA = 2 \times 0{,}36 = 0{,}72 мс^{-1},\quad \vec{v}_A \perp OA.$$

Скорость точки В направлена по горизонтали. Зная направление скоростей точек А и В шатуна АВ, определяем положение его мгновенного центра скоростей – точку P_{AB}.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{0{,}72}{0{,}36} = 2 с^{-1},\quad AP_{AB} = AB.$$

$$v_B = \omega_{AB} BP_{AB} = 2 \times 0{,}36 = 0{,}72 мс^{-1},\quad BP_{AB} = AB.$$

$$v_C = \omega_{AB} CP_{AB} = \omega_{AB}(BP_{AB} \sin 60^o) = 2(0{,}36 \times 0{,}866) = 0{,}52 мс^{-1},$$

$$\vec{v}_C \perp CP_{AB}.$$

Задача 12 (рис. 19, рис. 20)

В шарнирном четырехзвеннике OABC ведущий кривошип OA = $10\sqrt{3}$ [см] равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω = 4 [сек $^{-1}$] и при помощи шатуна AB = 20 [см] приводит во вращательное движение кривошип BC вокруг оси C. Определить скорости точек A и B, а также угловые скорости шатуна AB и кривошипа BC.

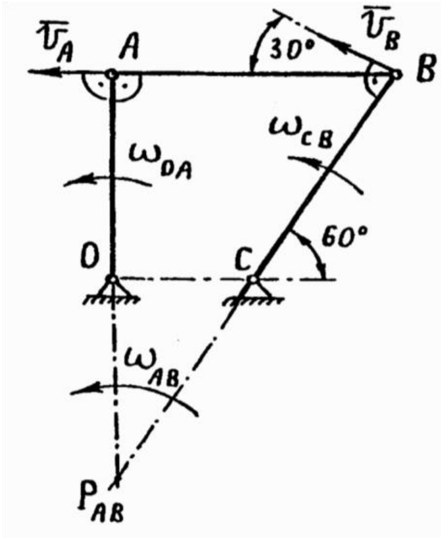


Рис. 19

Решение (рис. 19)

Скорость точки A кривошипа OA

$V_A = \omega_{OA} OA = 4 \cdot 10\sqrt{3} = 69{,}2$ [см/с]; $\overline{V}_A \perp OA$

Взяв точку A за полюс, составим векторное уравнение

$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$,

где $\overline{V}_B \perp CB$ и $\overline{V}_{BA} \perp BA$.

Графическое решение этого уравнения дано на рис. 20 (план скоростей).

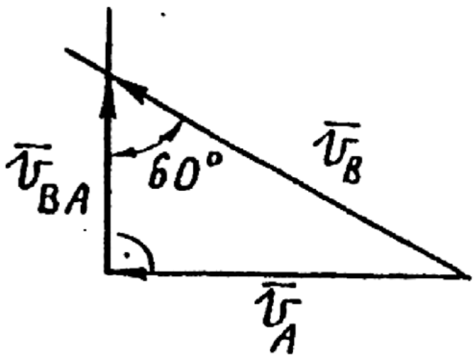


Рис. 20 С

помощью плана скоростей получаем

V_A 80

$V_B = \dfrac{}{\cos 30^\circ} =$ [см/с]; $V_{BA} = V_B \sin 30^\circ = 40$ [см/с].

Угловая скорость шатуна АВ

$\omega_{AB} = \dfrac{V_{BA}}{BA} = 2$ [с $^{-1}$].

Скорость точки В можно найти с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на соединяющую их прямую

$$Пр_{AB}\bar{V}_B = Пр_{AB}\bar{V}_A; \quad V_B = \frac{V_A}{\cos 30^\circ} = 80 [см/с].$$

В заключении найдем скорость точки В с помощью мгновенного центра скоростей P_{AB} шатуна АВ. Зная направления скоростей точек А и В ($\bar{V}_A \perp OA$ и $\bar{V}_B \perp CB$) находим положение точки P_{AB}.

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{AB \cdot tg 60^\circ} = 2$$

Угловая скорость шатуна АВ [с $^{-1}$].

Скорость точки В и угловая скорость кривошипа СВ

$$V_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \omega_{AB}\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 80 [см/с]; \quad \omega_{CB} = \frac{V_B}{CB} = \frac{V_B \sin 60^\circ}{OA} = 4 [с^{-1}].$$

Задача 13 (рис. 21) Точка массы m движется в плоскости Oxy согласно уравнениям: $x = a\sin\omega t; y = b\cos\omega t$.

Найти силу, действующую на точку.

Решение (рис. 21)

Найдем траекторию точки. Исключив время t из уравнений ее движения. Получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Траекторией точки М является эллипс с полуосями a и b .

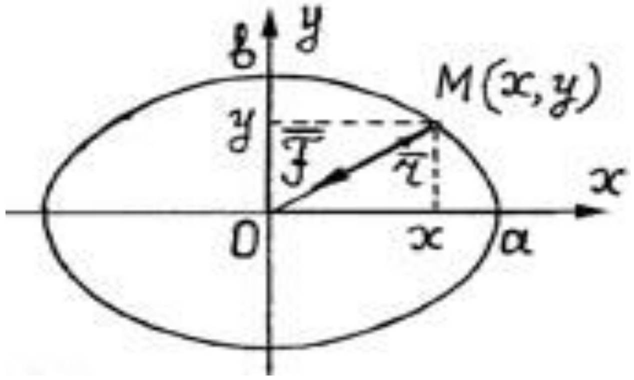


Рис. 21

При t=0 $x_0 = 0$ и $y_0 = b$. Точка движется по эллипсу по часовой стрелке.

Проекции приложенной к точке силы $\vec{F}$ на оси координат:

$$F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2 \sin\omega t = -m\omega^2 x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mb\omega^2 \cos\omega t = -m\omega^2 y.$$

Проекции радиус-вектора $\vec{r}$ точки М на оси координат и длина этого вектора равны:

$$= x; \qquad r_y = y; \qquad \vec{r} = \vec{r}(x, y);$$

$$= \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Далее получаем:

$$F_x = -m\omega^2 r_x; \qquad F_y = -m\omega^2 r_y; \qquad F \quad m \quad {}^2 r; \qquad = \quad \omega$$

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}.$$

r_x $\rightarrow$

r

Сила F направлена к точке О и её величина пропорциональна расстоянию от начала координат до точки приложения этой силы.

Задача14 (рис. 22)и (рис. 23)

Груз М массы m = 0,102 кг, подвешенный на нити длиной ОМ= l = 0,3 м в точке О, представляет собой конический маятник, то есть описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол α = 60° .

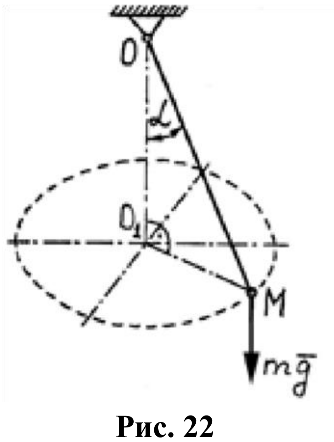


Рис. 22

Определить скорость v груза и натяжение T нити.

Решение (рис. 23)

Будем считать груз материальной точкой. Приложим к точке М силу тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити $\vec{T}$.

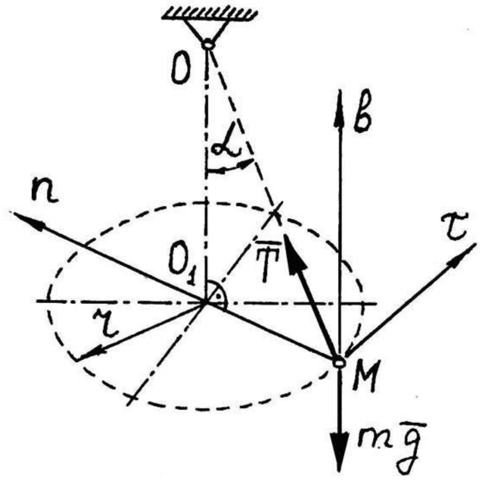


Рис. 23

Построим подвижную естественную систему координат Mτnb. Суммы проекций приложенных к точке сил на указанные оси:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l\sin\alpha}; \qquad a_b = 0.$$

Составим дифференциальные уравнения движения точки в подвижной естественной системе координат:

$$m\frac{dv}{dt} = 0; \quad m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = T\sin\alpha; \quad 0 = T\cos\alpha - mg.$$

Из системы уравнений находим:

$$v = const; \qquad T = \frac{mg}{\cos\alpha}; \qquad v = \sqrt{gl\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.$$

С учетом исходных данных получаем:

$$T = 2\,H; \qquad v = 2{,}1\,мс^{-1}.$$

Задача 15 (рис. 24)

Тело спускается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. В начальный момент тело имело скорость $\mathbf{V}^0$. Найти уравнение движения тела, если коэффициент трения равен $\mathbf{f}$.

Решение (рис. 24)

Примем тело за материальную точку **М** . Начало координат поместим в начальное положение материальной точки. Ось X направим вдоль наклонной плоскости в сторону движения точки, а ось Y – перпендикулярно плоскости.

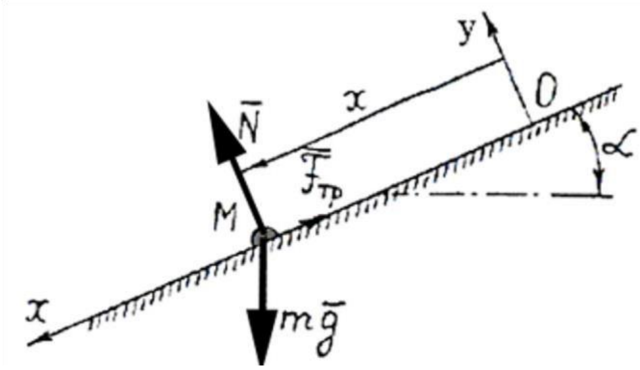


Рис. 24

Приложим к точке силу тяжести $m\bar{g}$, нормальную реакцию плоскости $\bar{N}$ и силу трения $\bar{F}^{тр}$. Составляем уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{тр}, \quad m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha.$$

Поскольку движение точки происходит только вдоль оси X, то $\ddot{y} = 0$ и из второго уравнения следует, что $N = mg\cos\alpha$.

Сила трения не обеспечивает точке состояние покоя (точка движется), сила трения имеет предельное значение $F^{тр} = fN = fmg\cos\alpha$.

Итак, уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Правая часть уравнения движения является постоянной величиной, учитывая, что $F_0 = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ и $x_0 = 0$, после интегрирования получим

$$x = \frac{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{2}t^2 + V_0 t.$$

Задача 16 (рис. 25)

Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы $F = F^0\cos\omega t$ (F^0 и ω - постоянные величины). Пренебрегая весом, определить скорость и положение точки в момент времени $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, если она в начальный момент находилась в начале координат и ее скорость была равна V_0.

Решение: (рис. 25)

Точка движется прямолинейно, поэтому достаточно одной оси координат. Направим ось X вдоль траектории точки. Изобразим точку в промежуточном положении на ее траектории. Приложим к точке силу F (вес точки и реакции связей отсутствуют).

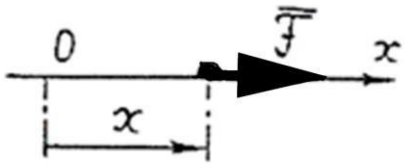


Рис. 25

Составим уравнение движения точки $m\ddot{x} = F_0 \cos\omega t$

Скорость точки :

$$V = \dot{x} = \frac{1}{m}\int F_0 \cos\omega t\,dt = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + C_1$$

Подставляя начальные условия $t = 0$; $V = V_0$ с учетом того, что $\sin 0 = 0$, получим $C_1 = V_0$.

Закон движения точки: x

$$= \int V(t)dt = \int\left(\frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + V_0\right)dt = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + V_0 t + C_2 .$$

Подставляя начальные условия $t = 0$; $x = 0$ с учетом того, что $\cos 0 = 1$, получим

$$C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2} .$$

Находим для момента времени $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$

$V = \frac{F_0}{m\omega} sin\,\omega \frac{\pi}{2\omega} + V_0 = \frac{F_0}{m\omega} sin\frac{\pi}{2} + V_0 = \frac{F_0}{m\omega} + V_0$;

$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} cos\,\omega \frac{\pi}{2\omega} + V_0 \frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2} = V_0 \frac{\pi}{2\omega} + \frac{F_0}{m\omega^2}$.

Задача 17 (рис. 26)

Груз массы $\boldsymbol{m}$ подвешен на нити длиной $\boldsymbol{l}$. В начальный момент времени груз отклонили в сторону (нить натянута) и сообщили ему горизонтальную скорость, перпендикулярную нити. Найти величину скорости груза и натяжение нити, если нить составляет с вертикалью постоянный угол $\boldsymbol{\alpha}$.

Решение (рис. 26)

Будем считать груз материальной точкой. Приложим к грузу силу тяжести mg и натяжение нити $\boldsymbol{N}$.

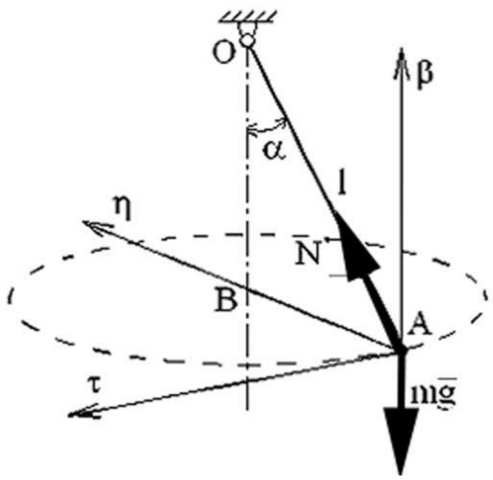


Рис. 26

Как следует из условия задачи, при движении груза нить описывает коническую поверхность, траекторией груза является окружность с центром в точке B и радиусом AB=$l\,sin\,\alpha$. Если известна траектория, воспользуемся естественной системой координат (τ, η, β) и уравнениями движения в естественной форме

$$\begin{cases} mV^{\cdot} = 0 \\ m\cdot\frac{V^2}{l\,sin\,\alpha} = N\,sin\,\alpha \\ 0 = N\,cos\,\alpha - mg \end{cases}$$

Из первой формулы следует, что скорость движения груза будет постоянной по величине, т.е. будет сохранять начальное значение. Из третьей формулы можем выразить натяжение нити

$$N = \frac{mg}{cos\,\alpha}$$

Подставив полученное выражение силы натяжения во вторую формулу, получим

$$\cdot\frac{V^2}{l\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha,$$

Откуда скорость $V = \sqrt{\frac{lg\,sin^2\alpha}{cos\,\alpha}}$. m

Задача 18. (рис. 27)

При движении поезда массы **m** по участку пути однородного профиля сила сопротивления движению изменяется по закону $\mathbf{R}\ \mathbf{R}^0\ \mathbf{aV}$, где $\mathbf{R}^0$ и $\bar{\mathbf{a}}$ - постоянные величины; $\mathbf{V}$ - переменная скорость поезда. Сила тяги локомотива изменяется по закону $\mathbf{T}\ \mathbf{F}^0\,\mathbf{bV}$, где $\mathbf{F}^0$ и $\mathbf{b}$ - постоянные величины ($\mathbf{F}^0\,\mathbf{R}^0$). Определить закон изменения скорости и закон движения поезда.

Решение (рис. 27)

Примем поезд за материальную точку. Направим координату X по направлению движения. Начало координат совпадает с начальным положением поезда.

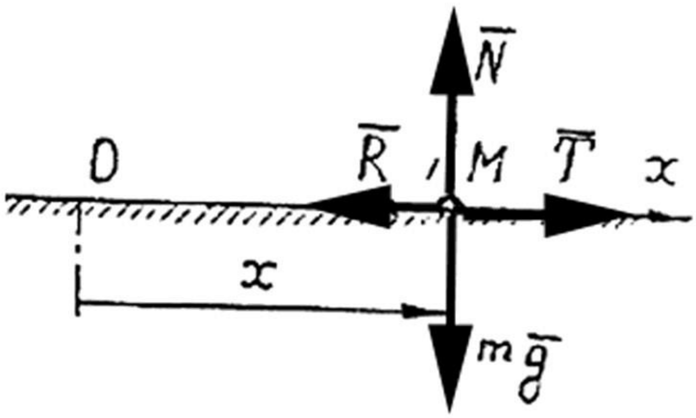


Рис. 27

Изобразим точку в промежуточный момент времени на ее траектории. К точке

$mg\ T$, сила сопротивления R и нормальная реакция приложены сила тяжести , движущая сила плоскости N.

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид dV

$m\ (F_0\ bV)\quad (R_0\quad aV)\ dt$.

Перегруппировав слагаемые, получим

$mdV\ (b\quad a)V\ -\ F_0\quad R_0\,dt\quad m$

m .

решение этого уравнения имеет вид

$V = C_1 e^{-qt} + \frac{p}{q}$, где

$q = \frac{a+b}{m}$, $p = \frac{F_0 - R_0}{m}$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из начальных условий: при $t = 0$; $V = 0$, $C_1 = \frac{F_0 - R_0}{b+a}$.

$$V = \frac{p}{q}(1-e^{-qt}) = \frac{F_0 - R_0}{b+a}\left(1-e^{-(\frac{a+b}{m})t}\right)$$

Закон изменения скорости

Установившееся значение скорости (значение скорости через достаточно большой промежуток времени) $V = \lim_{t\to\infty} V = \frac{p}{q} = \frac{F_0 - R_0}{b+a}$.

Подставляя зависимости $V=dx/dt$, получим дифференциальное уравнение $dx = \frac{p}{q}(1-e^{-qt})dt$.

После интегрирования которого, с учетом начального условия ($t = 0$; $x = X_0 = 0$), находим закон движения точки $x = \frac{p}{q}\left(t - \frac{1}{q}(1-e^{-qt})\right)$.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

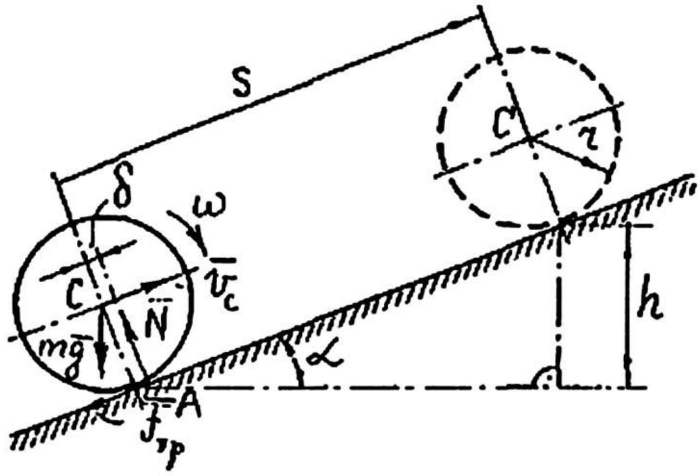
Задача 19 (рис. 28)

Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса **r** , чтобы оно, катясь без проскальзывания, поднялось на высоту **h** по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом? Коэффициент трения качения равен δ. Колесо считать однородным диском. Определить также ускорение оси колеса.

Решение (рис. 28)

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии.

$$-T_0 = \sum_{i=1}^{n_A} A_k^e \; .$$



T

Рис. 28 Кинетическая энергия колеса в начальном положении

$$T_0 = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2} = \frac{3mV_c^2}{4} \; .$$

Собственный момент инерции колеса равен $J_c = \frac{1}{2} mr^2$ и его угловая скорость $\omega = \frac{V_c}{r}$,

На колесо действуют силы: тяжести mg, нормальная реакция плоскости $N = mgcos\alpha$, трение скольжения $F^{тр}$ и момент трения качения $M^{тр} = N\delta$. Работа активных сил, $\varphi = \frac{s}{r}$

приложенных к колесу, с учетом того, что угол поворота колеса равен , $mgs\sin$

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_k^e = - \qquad \alpha - (N\delta)\varphi = -mgs\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right).$$

На основании указанной теоремы имеем:

$$\frac{}{4} \quad _c \; - \frac{}{4} \quad _0 \; = -mgs\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right).$$

$3\ _2 3\ _2 mV\ mV$

$=$

В верхнем положении колесо остановится, следовательно, $V^c 0$ и перемещение оси колеса составит $s = \dfrac{h}{sin\alpha}$. Скорость оси колеса в начальном положении

$$_{C0} = \sqrt{\frac{4}{3}gh\left(1 + \frac{\delta}{r}ctg\alpha\right)}.$$

Дифференцируя по времени это выражение, получим

$$\frac{3\cdot}{4}V_c\frac{dV_c}{dt} = -g\left(\sin\alpha + \frac{\delta}{r}\cos\alpha\right)\frac{ds}{dt}.$$

$V_c \quad ds$

V

2

$= —$

Ускорение оси колеса (учитываем, что dt)

$$= \frac{dV_c}{dt} = -\frac{2g}{3}\left(sin\alpha + \frac{\delta}{r}cos\alpha\right)$$

a_c

.

Задача 20 (рис. 29)

Вагонетка для обслуживания пути двигалась по горизонтальному участку пути под действием двигателя. Масса корпуса вагонетки **M**=5000кг, масса каждой из двух колесных пар **m**=600кг, коэффициент трения качения δ=0.003м. Колесные пары представляют собой однородные диски радиуса **r**=0.3м. Какой путь пройдет вагонетка до остановки после выключения двигателя, если в момент выключения ее скорость была $\mathbf{V_0}$=36км/ч? Решение (рис. 29)

Конструкция состоит из трех тел: корпуса и двух колесных пар. Корпус движется поступательно, колесные пары – плоскопараллельно. Используем теорему об изменении кинетической энергии:

$$-T_0 = \sum_{i=1}^{n_A} A_k \quad T_e$$

.

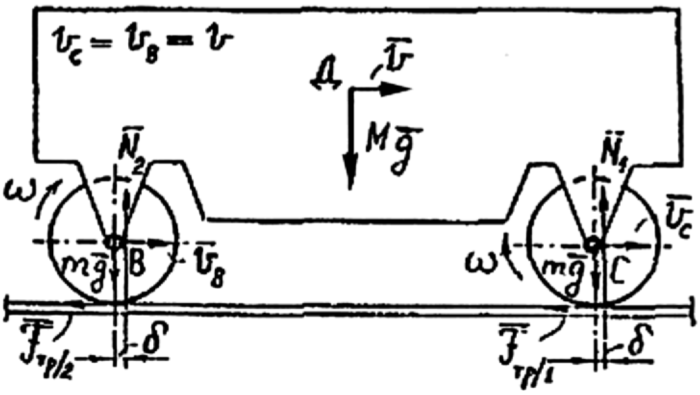


Рис. 29

Собственный момент инерции каждой колесной пары $J_C = \frac{1}{2}mr^2$, угловая скоро сть $\omega = \frac{V}{r}$ ($V -$ скорость корпуса вагонетки), кинетическая энергия системы может быть

$$T = \frac{MV^2}{2} + 2\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}\right) = \frac{MV^2}{2} + 2\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{mr^2}{2\cdot 2}\left(\frac{V}{r}\right)^2\right) = \frac{M+3m}{2}$$

На рассматриваемую систему действуют силы: тяжести Mg и mg, нормальные реакции колесных пар $N_1 = N_2 = N = \frac{Mg+2mg}{2}$ (в силу симметричности конструкции), моменты трения $M_{тр1} = M_{тр2} = N_1\delta = N_2\delta = N\delta$, а также трения скольжения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$. Работа сил, $\varphi = \frac{s}{}$

колес выражена

V^2.

приложенных к колесу, с учетом того, что угол поворота колеса может быть выражен r
(
$-$ перемещение вагонетки), а также формулы

$$\sum_{k=1}^{n_A} A_k^e = -(N_1\delta)\varphi - (N_2\delta)\varphi = -2\frac{M+2m}{2}\frac{g\delta s}{r}.$$

или

$$\frac{M+3m}{2}V^2 - \frac{M+3m}{2}V_0{}^2 = -\frac{(M+2m)g\delta s}{r}.$$

Поскольку в конце рассматриваемого промежутка времени вагонетка остановится, следовательно, $V=0$. Поэтому после преобразований получим величину пройденного пути

$$s = \frac{(M+3m)rV_0{}^2}{2(M+2m)g\delta} = \frac{(5000+3\cdot 600)\cdot 0.3\cdot\left(36\cdot\frac{1000}{3600}\right)^2}{2\cdot(5000+2\cdot 600)\cdot 9.81\cdot 0.03} \approx 55.9\,м.$$

s