Пример выполнения расчетного задания
по теме «Кинематика точки»

Дано:

$x = 2 \cdot \cos\left(\pi \cdot \dfrac{t}{3}\right) - 1$ см, $y = 4 \cdot \sin\left(\pi \cdot \dfrac{t}{3}\right)$ см, $t_1 = 1{,}75$ с.

Найти:

1) траекторию точки;
2) для заданного момента времени положение точки, её скорость, касательное, нормальное, полное ускорения и радиус кривизны траектории в данной точке.

Решение.

1) Сначала определим траекторию точки. Для этого из заданных уравнений движения точки, а это, по сути, параметрические уравнения кривой, избавимся от параметра t и получим уравнений кривой в координатной форме в виде зависимости одной координаты от другой. Так как уравнения движения содержат периодические функции, то воспользуемся основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Преобразуем уравнение $x = 2 \cdot \cos\left(\pi \cdot \dfrac{t}{3}\right) - 1$:

$$\frac{x+1}{2} = \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right) \text{ и возведем в квадрат } \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \cos^2\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right).$$

Преобразуем уравнение $y = 4 \cdot \sin\left(\pi \cdot \dfrac{t}{3}\right)$:

$$\frac{y}{4} = \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right) \text{ и возведем в квадрат } \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \sin^2\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right).$$

Используем тригонометрическое тождество:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 = \cos^2\left(\pi \cdot \dfrac{t}{3}\right), \\ + \\ \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = \sin^2\left(\pi \cdot \dfrac{t}{3}\right), \\ -------------- \\ \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Получили уравнение эллипса

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1,$$

центр эллипса находится в точке с координатами (-1, 0), полуось по оси x равна 2 см, по оси y – 4 см.

Определим область значений для x и y при условии, что время $t \geq 0$.

Согласно исходным уравнениям:

$-3 \leq x \leq 1, -4 \leq y \leq 4.$

Строим эллипс по нескольким точкам, используя таблицу.

x, см	0	0,5	1	– 1	– 2	– 2,5	– 3
y, см	3,46 и – 3,46	2,65 и – 2,65	0	4 и – 4	3,46 и – 3,46	2,65 и – 2,65	0

Так как весь эллипс попадает в указанные ограничения, то и траекторией точки является весь эллипс.

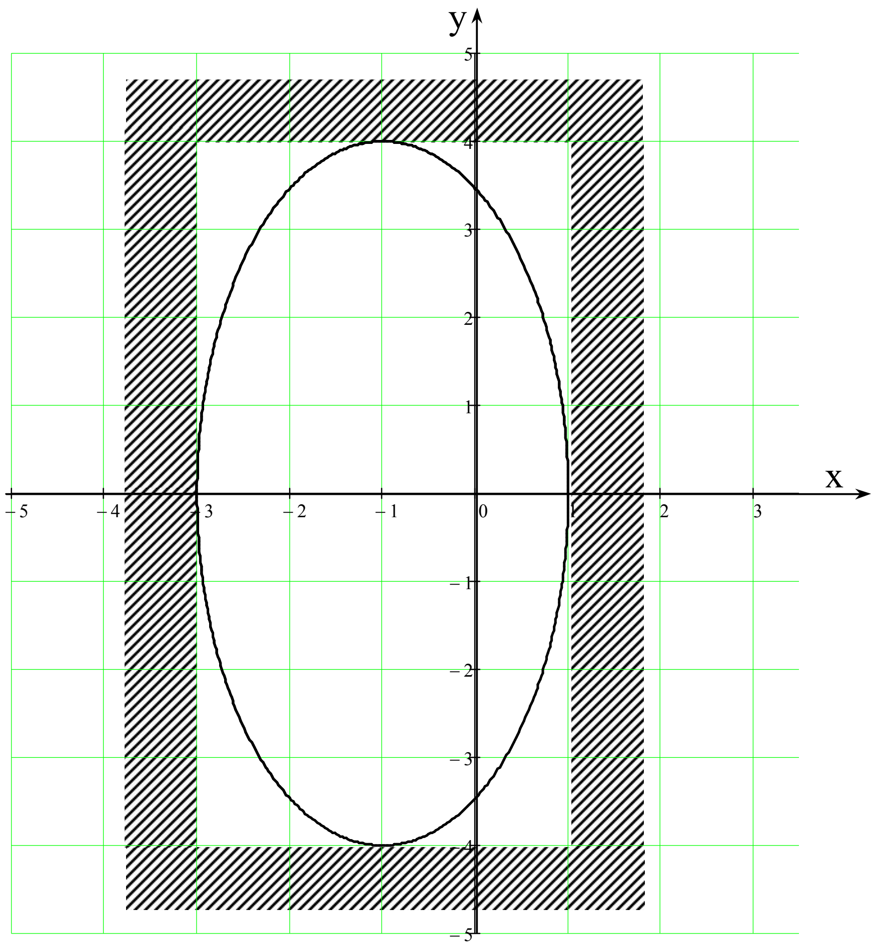

Рисунок 1 – Траектория точки

2) Далее определяем текущее положение точки:

при $t_1 = 1,75$ с

$$x_1 = 2 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{1,75}{3}\right) - 1 = -1,518 \text{ см},$$

$$y_1 = 4 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{1,75}{3}\right) = 3,864 \text{ см}.$$

Проекция вектора скорости точки на ось x:

$$V_x = \dot{x} = -2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right)\ \text{см/с},$$

проекция вектора скорости точки на ось y:

$$V_y = \dot{y} = 4\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right)\ \text{см/с}.$$

При $t_1 = 1{,}75$ с

$$V_{x1} = -\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{1{,}75}{3}\right) = -2{,}023\ \text{см/с},$$

$$V_{y1} = \frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{1{,}75}{3}\right) = -1{,}084\ \text{см/с},$$

тогда скорость точки

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{(-2{,}023)^2 + (-1{,}084)^2} = 2{,}295\ \text{см/с}.$$

Определяем ускорение точки.

Проекция вектора ускорения точки на ось x:

$$a_x = \dot{V}_x = -\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right) = -\frac{2\pi^2}{9}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right)\ \text{см/с}^2,$$

проекция вектора ускорения точки на ось y:

$$a_y = \dot{V}_y = -\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right) = -\frac{4\pi^2}{9}\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right)\ \text{см/с}^2.$$

При $t_1 = 1{,}75$ с

$$a_{x1} = -\frac{2\pi^2}{9}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{1{,}75}{3}\right) = 0{,}568\ \text{см/с}^2,$$

$$a_{y1} = -\frac{4\pi^2}{9}\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{1{,}75}{3}\right) = -4{,}237\ \text{см/с}^2,$$

тогда ускорение точки

$$a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \sqrt{(0{,}568)^2 + (-4{,}237)^2} = 4{,}275\ \text{см/с}^2.$$

Определяем касательное ускорение

$$a_{\tau 1} = \frac{V_{x1}\cdot a_{x1} + V_{y1}\cdot a_{y1}}{V_1} = \frac{-2{,}023\cdot 0{,}568 + (-1{,}084)\cdot(-4{,}237)}{2{,}295} = 1{,}501\ \text{см/с}^2$$

и нормальное ускорение

$$a_{n1} = \frac{\left|V_{x1}\cdot a_{y1} - V_{y1}\cdot a_{x1}\right|}{V_1} = \frac{\left|-2{,}023\cdot(-4{,}237) - (-1{,}084)\cdot 0{,}568\right|}{2{,}295} = 4{,}003\ \text{см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{2{,}295^2}{4{,}003} = 1{,}316\ \text{см (на схеме это отрезок } M_1C\text{)}.$$

Построение векторов скоростей и ускорений необходимо выполнять в масштабе.

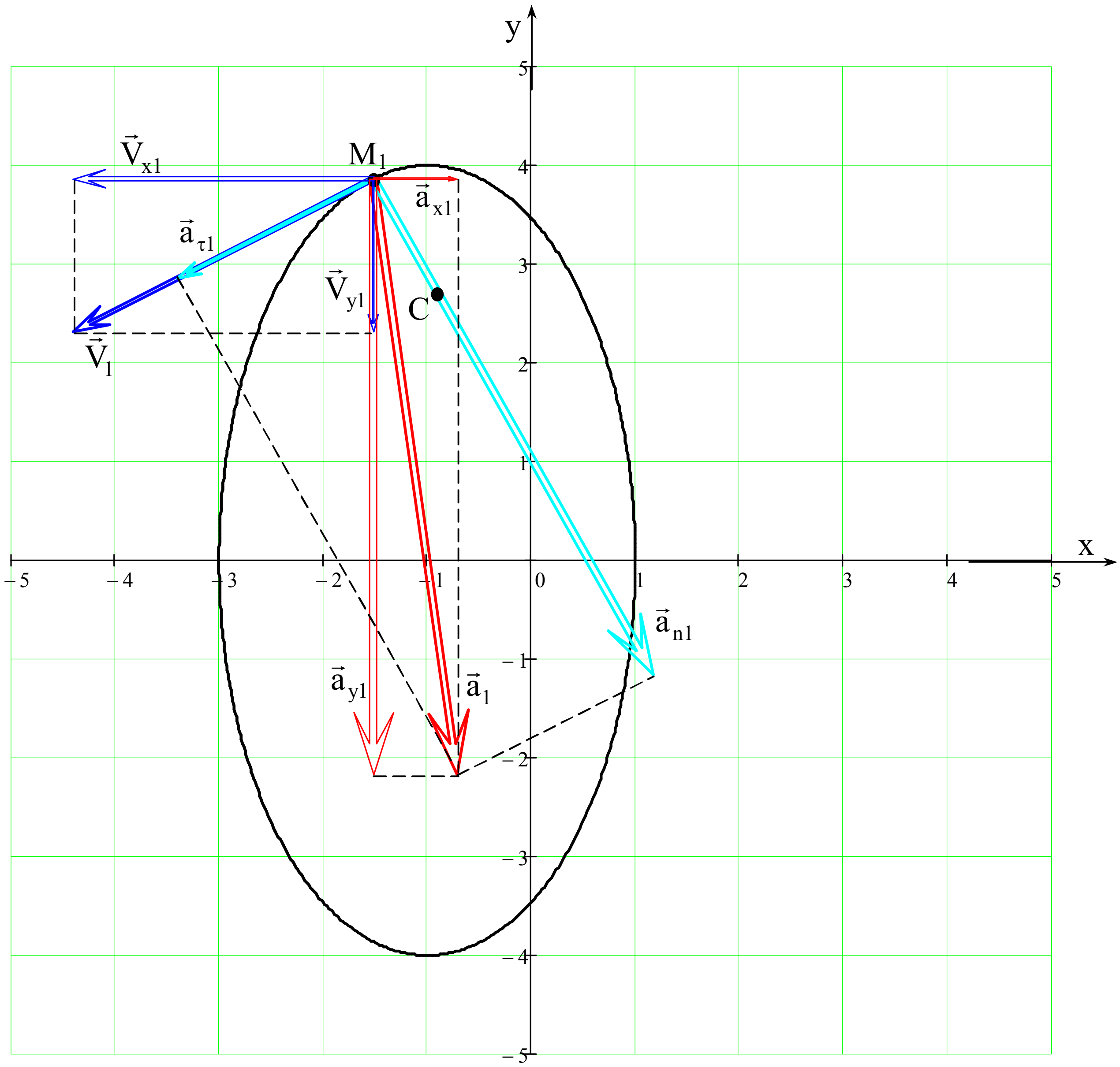

Рисунок 2 – Векторы скоростей и ускорений