Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
им. М.Т. Калашникова»
Воткинский филиал

Смирнов В.А.

Методические указания
к выполнению самостоятельной работы
по курсу «Методы оптимизации технических решений»
(для заочной формы обучения)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Воткинск 2013

УДК 519.615.7, 519.812.3

Методические указания к выполнению самостоятельной работы по дисциплине "Методы оптимизации технических решений" / Воткинский филиал Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова.

Составитель: Смирнов Виталий Алексеевич, доцент кафедры ТМ и П ВФ ИжГТУ им. М.Т. Калашникова, Воткинск, 2013.

Методические указания составлены для студентов специальности 151001 – «Технология машиностроения». В них даны основные сведения, необходимые для решения задач безусловной оптимизации в технике и технологии.

Методические указания могут быть использованы при выполнении курсовых и дипломных проектов по специальности 151001.

Указания составлены на основе требований действующего государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению «Машиностроительные технологии и оборудование».

Ижевский государственный технический университет
им. М.Т. Калашникова
Воткинский филиал

ВВЕДЕНИЕ

Задачи безусловной оптимизации - это первый класс задач, с которыми мы столкнемся в курсе "Методы оптимизации технических решений". Найти решение задачи безусловной оптимизации - это значит определить значения переменных, обращающих в минимум или максимум целевую функцию. При этом не накладывается никаких ограничений на значения переменных. Методы решения подобных задач являются базой для решения более сложных задач оптимизации с ограничениями.

Многие практические задачи в конечном итоге могут быть сведены к задачам безусловной оптимизации. В данной лабораторной работе рассматриваются примеры проектирования емкостей различной конфигурации.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Методы одномерной безусловной оптимизации. Задача о баке №1.

Начнем рассмотрение методов безусловной оптимизации с простой задачи.

Пусть необходимо спроектировать цилиндрический бак объемом V (рис. 1), состоящий из днища, крышки и боковой стенки. Конструкция бака сварная.

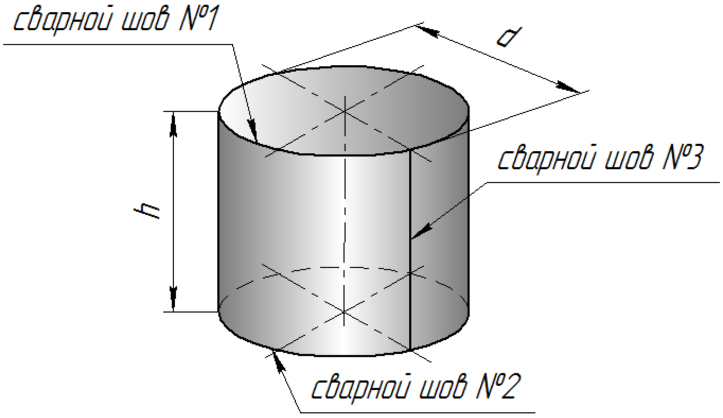

Рис. 1. Задача о баке

Проектными параметрами в данном случае являются диаметр бака d и его высота h. Их мы и должны определить.

Рассмотрим 3 варианта постановки задачи. Варианты будут отличаться друг от друга различной ЦФ:

1. ЦФ - общая площадь расходуемых листов (F);
2. ЦФ - общая длина сварных швов (L);
3. ЦФ - стоимость изготовления бака (C).

ЦФ - общая площадь расходуемого листового материала на изготовление бака ($F \rightarrow min$).

Величину F можно определить геометрически:

$$F(d,h)=\frac{\pi d^2}{4}\cdot 2+\pi dh\to\min \qquad (1)$$

Объем бака является постоянной величиной и может быть определен по следующей формуле:

$$V=\frac{\pi d^2}{4}\cdot h \qquad (2)$$

Формула (2) является условием-ограничением, связывающим значения переменных *d* и *h*. То есть в рассматриваемом примере обе переменные *d* и *h* не являются независимыми, так как связаны функциональным соотношением. Из формулы (2) выразим высоту *h*:

$$h=\frac{4\cdot V}{\pi d^2} \qquad (3)$$

Полученное выражение (3) подставим в формулу (1) и после преобразований получим:

$$F(d)=\frac{\pi d^2}{2}+\frac{4\cdot V}{d}\to\min \qquad (4)$$

Получили ЦФ, зависящую от одной переменной *d*. График полученной зависимости *F*(*d*) для *V*=0,1 м^3 показан на рис. 2. Хорошо видно, что имеется точка минимума.

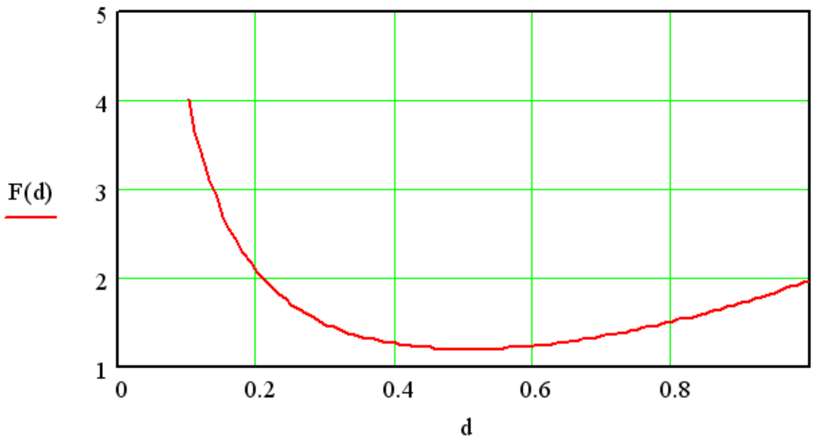

Рис. 2. График зависимости *F*(*d*)

Как известно из курса математического анализа, для того, чтобы найти минимум функции одной переменной, нужно взять производную *F*'(*d*) и приравнять ее к нулю:

$$F'(d)=\pi d-\frac{4\cdot V}{d^2}=0 \qquad (5)$$

Решение уравнения (5):

$$d=\left(\frac{4V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Из уравнения (3) найдем высоту *h*:

$$h=\left(\frac{4V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, найдены оптимальные размеры бака с точки зрения площади расходуемого материала. Например, для V = 100 л = 0,1 м^3 получаем следующие оптимальные размеры бака:

d, м	h, м	F, м^2
0,503	0,503	1,192

Рассмотрим ту же задачу, но изменим целевую функцию. Предположим, материал листов плохо сваривается. В этом случае стоимость бака будет в основном определяться не общей площадью расходуемого листового материала, а общей протяженностью сварных швов L, которая должна быть минимальной:

$$L(d,h) = 2\pi d + h \to \min \qquad (6)$$

Или с учетом формулы (3):

$$L(d) = 2\pi d + \frac{4 \cdot V}{\pi d^2} \to \min \qquad (7)$$

График зависимости $L(d)$ показан на рис. 3. Видно, что и в данном случае имеется точка минимума, но находится она в другом месте по сравнению с предыдущей задачей.

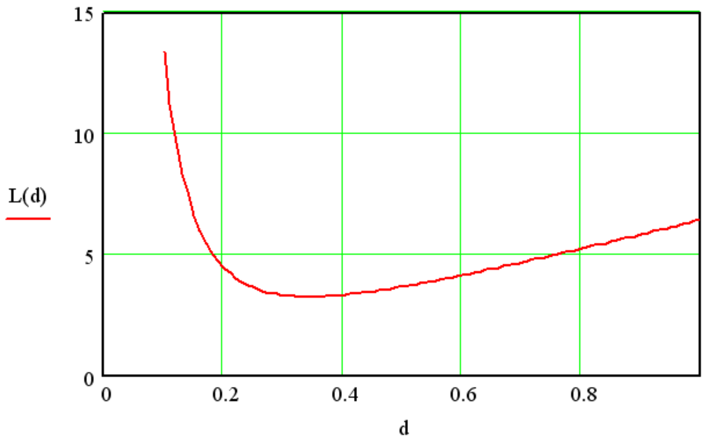

Рис. 3. Зависимость $L(d)$

Найдем координату точки минимума $L(d)$. Берем производную $L'(d)$ и приравниваем к нулю:

$$L'(d) = 2\pi + \frac{4 \cdot V}{\pi} \cdot (-2) \cdot d^{-3} = 0 \qquad (8)$$

Решение уравнения (8):

$$d = \left(\frac{4V}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Из формулы (3) найдем h:

$$h = (4\pi V)^{1/3}$$

Например, для V = 100 л = 0,1 м^3 оптимальные размеры бака с точки зрения минимальной протяженности сварных швов L:

d, м	h, м	L, м
0,343	1,079	3,237

Снова та же задача о баке. На этот раз в качестве ЦФ будем рассматривать стоимость изготовления бака C. В упрощенном варианте стоимость изготовления складывается из стоимости листового материала и стоимости сварочных работ:

$$C = c_F \cdot F + c_L \cdot L \to \min \qquad (9)$$

где c_F - стоимость 1 м^2 материала (руб/м^2), c_L - стоимость 1 м сварного шва (руб/м), F - общая площадь используемых листов (м^2), L - общая длина сварных швов (м).

Обратите внимание, что в данном случае мы имеем дело с многокритериальной оптимизацией, так как в задаче фигурирует и площадь листов F и длина сварных швов L. Многокритериальная задача сведена к однокритериальной за счет введения линейной комбинации величин F и L с весовыми коэффициентами c_F и c_L.

Подставим формулы (4) и (7) в формулу (9):

$$C(d) = c_F \cdot \left(\frac{\pi d^2}{2} + \frac{4 \cdot V}{d} \right) + c_L \cdot \left(2\pi d + \frac{4 \cdot V}{\pi d^2} \right) \to \min \qquad (10)$$

Вновь запишем выражение для ЦФ (10), в которой для определенности примем $V = 0{,}1$ м^3, $c_F = 1000$ руб/м^2, $c_L = 600$ руб/м.

$$C(d) = 1570{,}8 \cdot d^2 + 3769{,}9 \cdot d + 400 \cdot d^{-1} + 76{,}38 \cdot d^{-2} \to \min \qquad (11)$$

График ЦФ (10) показан на рис. 4. Видно, что точка минимума существует.

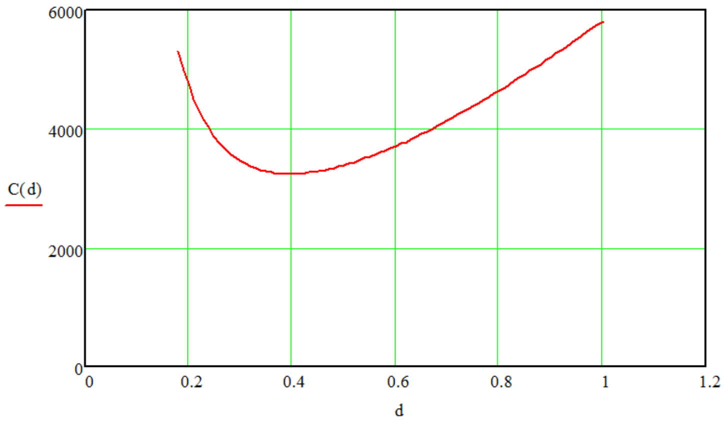

Рис. 4. Стоимость изготовления бака

Поставленную задачу можно решить методом перебора.

Изначально требуется найти интервал $[a, b]$, в котором находится один экстремум функции. По графику, изображенному на рис. 4, примем интервал поиска [0,3; 0,5].

Рассматриваемые методы позволяют приближенно найти как максимум так и минимум ЦФ. Рассмотрим алгоритмы на примере поиска минимумов.

Этапы метода перебора:

Этапы метода:

1. Исходный интервал поиска $[a, b]$ делится на N равных частей. Получаем N+1 точку.

2. Вычисляем значения ЦФ в полученных точках.

3. Выбираем точку с наименьшим значением ЦФ и две соседние от нее точки. Эти точки образуют новый интервал поиска.

4. Шаги 1-3 повторяются до тех пор, пока ширина интервала поиска не станет меньше заданной точности ε.

Если взять N=10, то на каждом этапе расчета интервал поиска будет сужаться в 5 раз.

Необходимое число итераций:

$$k = \frac{\ln \varepsilon - \ln(b-a)}{\ln 2 - \ln N} \qquad (12)$$

Полученное значение k округляется до большего целого.

При решении практических задач рекомендуется принимать число интервалов N=4...10.

Полученное оптимальное решение задачи имеет вид:

d, м	h, м	C, руб.
0,396	0,812	3236

2. Методы многомерной безусловной оптимизации. Задача о баке №2.

Требуется спроектировать сварной бак в форме прямоугольного параллелепипеда размерами a, b, h (рис. 5). На рис. 5 утолщенной линией выделены сварные швы №1, 2, 3.

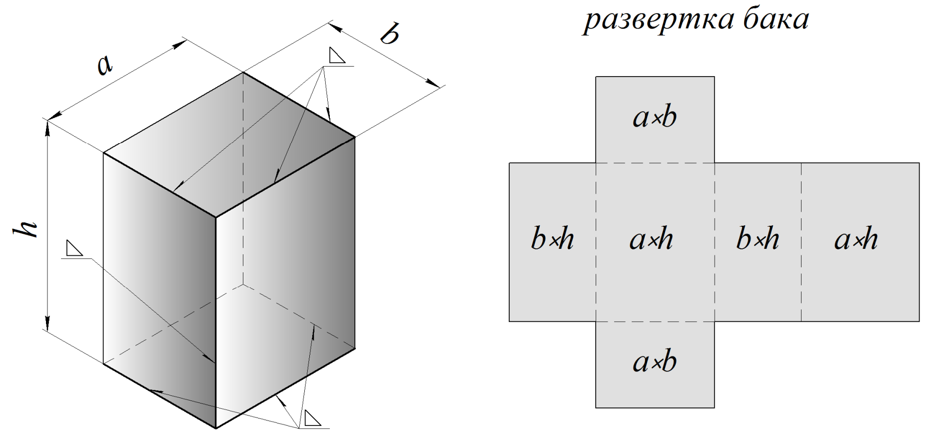

Рис. 5. Задача о баке №2

Бак должен иметь объем V, то есть:

$$g(a,b,h) = abh - V = 0 \qquad (13)$$

Формула (13) выражает условие-ограничение, накладываемое на размеры бака.

В качестве ЦФ примем общую стоимость изготовления бака, складывающуюся из стоимости материалов и стоимости сварных швов (аналогично примеру о цилиндрическом баке):

$$C = c_F \cdot F + c_L \cdot L \to \min \qquad (14)$$

где c_F - стоимость 1 м^2 материала (руб/м^2), c_L - стоимость 1 м сварного шва (руб/м), F - общая площадь используемых листов (м^2), L - общая длина сварных швов (м).

С учетом условия-ограничения (23) получим:

$$\begin{cases} C(a,b,h) = c_F \cdot (2ab + 2ah + 2bh) + c_L \cdot (2a + 4b + h) \to \min \\ abh - V = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Для определенности примем V=0,1 м^3; c_F=1000 руб/м^2; c_L=600 руб/м.

$$\begin{cases} C(a,b,h) = 2000ab + 2000ah + 2000bh + 1200a + 2400b + 600h \to \min \\ abh = 0{,}1 \end{cases} \qquad (16)$$

Из условия-ограничения выразим $h = \dfrac{0{,}1}{ab}$ и подставим в ЦФ:

$$C(a,b) = 2000 \cdot ab + \frac{200}{b} + \frac{200}{a} + 1200 \cdot a + 2400 \cdot b + \frac{60}{ab} \to \min \qquad (17)$$

График линий уровня стоимости бака (17) показан на рис. 6. Затемненные участки соответствуют впадине. Хорошо видно, что точка минимума существует.

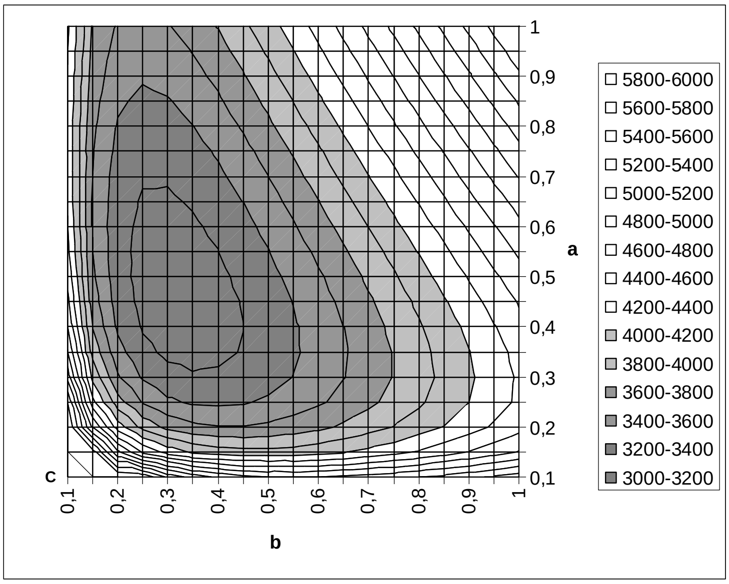

Рис. 6. График линий уровня ЦФ

В результате получили задачу безусловной оптимизации функции двух переменных. Решим задачу методом покоординатного спуска.

Метод покоординатного спуска

Суть метода заключается в том, что мы последовательно спускаемся к точке минимума ЦФ, изменяя лишь одну переменную и фиксируя все остальные.

Рассматриваем ЦФ (17):

$$C(a,b) = 2000 \cdot ab + \frac{200}{b} + \frac{200}{a} + 1200 \cdot a + 2400 \cdot b + \frac{60}{ab} \to \min$$

Этапы метода:

1. Выбираем стартовую точку: a_0=1; b_0=1. $C(a_0, b_0)$=6060 руб.

2. Фиксируем координату b. Записываем выражение для ЦФ с учетом того, что b=1:

$$C(a) = 3200a + \frac{260}{a} + 2600 \qquad (18)$$

Теперь функция C зависит лишь от переменной a. График функции $C(a)$ показан на рис. 7.

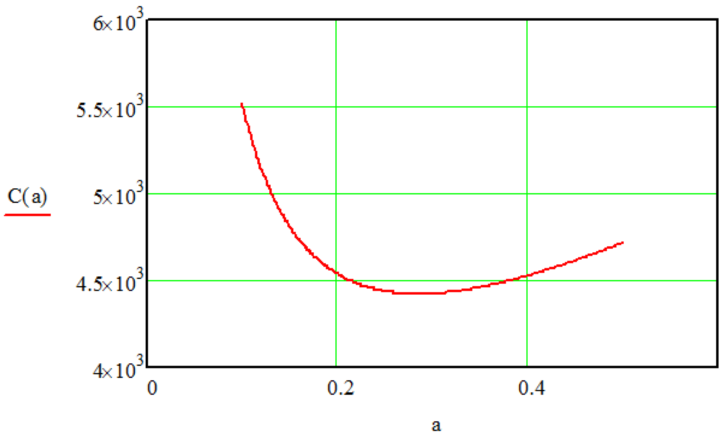

Рис. 7. График функции $C(a)$

По графику видно, что точка минимума существует. Найдем точку минимума функции (18). Для этого возьмем производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dC}{da} = 3200 - \frac{260}{a^2} = 0 \qquad (19)$$

Откуда находим значение *a*=0,285. Таким образом, решение имеет вид: *a*=0,285; *b*=1; *C*=4424 руб. Решение улучшилось.

3. Фиксируем координату *a*. Записываем выражение для ЦФ с учетом того, что *a*=0,285:

$$C(b) = 2970b + \frac{410{,}53}{b} + 1043{,}75 \qquad (20)$$

Теперь функция *C* зависит лишь от переменной *b*. Найдем точку минимума функции (20). Для этого возьмем производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dC}{db} = 2970 - \frac{410{,}53}{b^2} = 0$$

Откуда находим значение *b*=0,372. Таким образом, решение имеет вид: *a*=0,285; *b*=0,372; *C*=3252 руб. Решение улучшилось.

4. Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор, пока разность между значениями ЦФ на соседних итерациях не станет меньше заданной допустимой погрешности ε:

$$\left|C_{k+1} - C_k\right| \le \varepsilon \qquad (21)$$

Выполнение условия (21) будет свидетельствовать о том, что точка минимума практически достигнута.

Примем ε=0,5 руб. Результаты вычислений показаны в таблице:

Итерация	*a*, м	*b*, м	*C*, руб.	$\left\|C_{k+1} - C_k\right\|$
0	1	1	6060,0	-
1	0,285	1	4424,3	1635,7
2	0,285	0,372	3252,2	1172,1
3	0,431	0,372	3106,6	145,6
4	0,431	0,322	3085,1	21,5
5	0,458	0,322	3082,0	3,1
6	0,458	0,316	3081,6	0,4

Графическая иллюстрация решения методом покоординатного спуска показана на рис. 8.

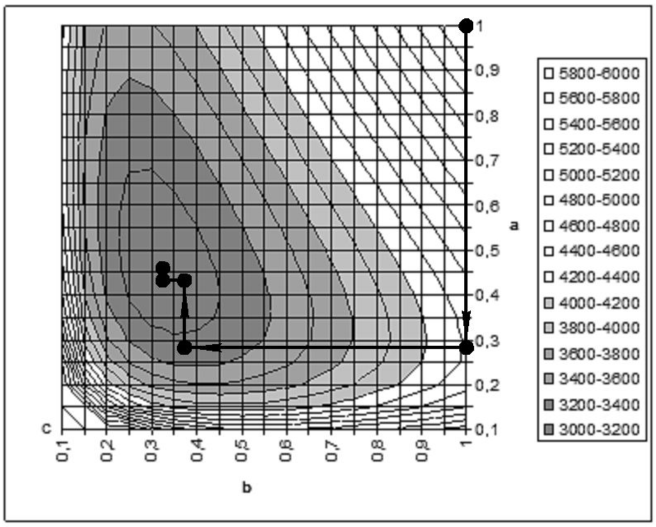

Рис. 8. Метод покоординатного спуска

Решение с заданной точностью получено за 6 итераций. Оптимальные размеры бака:

a, м	b, м	h, м	C, руб.
0,458	0,316	0,691	3081,6

Метод покоординатного спуска достаточно прост и надежен, но все же у него есть и ряд недостатков.

- Сходимость метода сильно зависит от вида ЦФ. Например, если линии уровня ЦФ искривлены или растянуты (что вполне может возникнуть при решении реальных задач), то итерации могут превратиться в бесконечную последовательность уменьшающихся шагов и процедура поиска становится неэффективной [2].

- При нахождении локального минимума по заданной переменной x_i могут возникнуть проблемы при аналитическом решении уравнения $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ и придется использовать численные методы одномерной оптимизации (например, одномерный метод прямого поиска).

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Задачи выбираются следующим образом:

1. Если номер студента по списку в журнале четный, то необходимо решать задачи 2 и 4.
2. Если номер студента по списку журнале нечетный, то необходимо решать задачи 1 и 3.
3. Номер варианта соответствует номеру по списку в журнале.

Задача 1. Проектирование бака

Спроектировать цилиндрический бак со сферическим дном и плоской крышкой объемом V и обеспечить его минимальную стоимость C, которая определяется как сумма стоимости листового материала и стоимости сварочных работ.

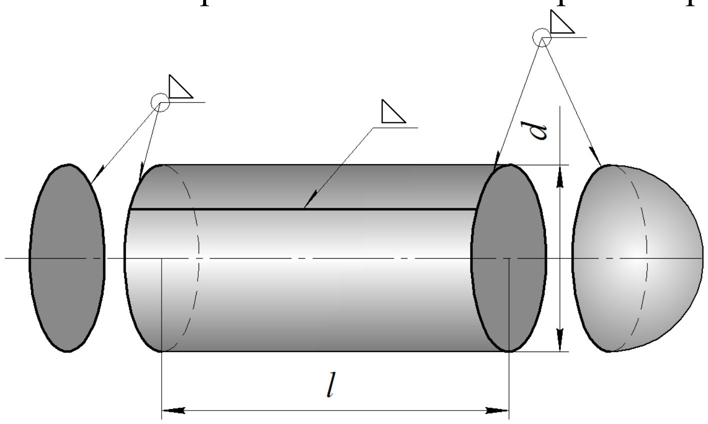

Рис. 9. Задача о баке

Рекомендация: необходимо свести задачу оптимизации к одномерной с помощью условия-ограничения.

Вариант	V, м^3	c_F, руб/м^2	c_L, руб/м
1	0,05	900	750
2	0,025	600	700
3	0,2	1000	450
4	0,5	750	1000
5	0,125	800	1100
6	0,05	1200	950
7	0,025	850	650
8	0,2	950	1100
9	0,5	600	1100
10	0,125	900	650
11	0,05	1000	700
12	0,025	1000	1200
13	0,2	650	800
14	0,5	950	700
15	0,125	800	1050
16	0,05	900	800

Задача 2. Проектирование емкости для хранения жидкости.

Требуется спроектировать сварной бак для хранения жидкости, показанный на рис. 10, имеющий минимальную стоимость. Объем бака должен составлять V м^3. Общая длина бака должна составлять L м. Стоимость листов для изготовления бака составляет c_1 руб/м^2. Стоимость сварных швов составляет c_2 руб/м.

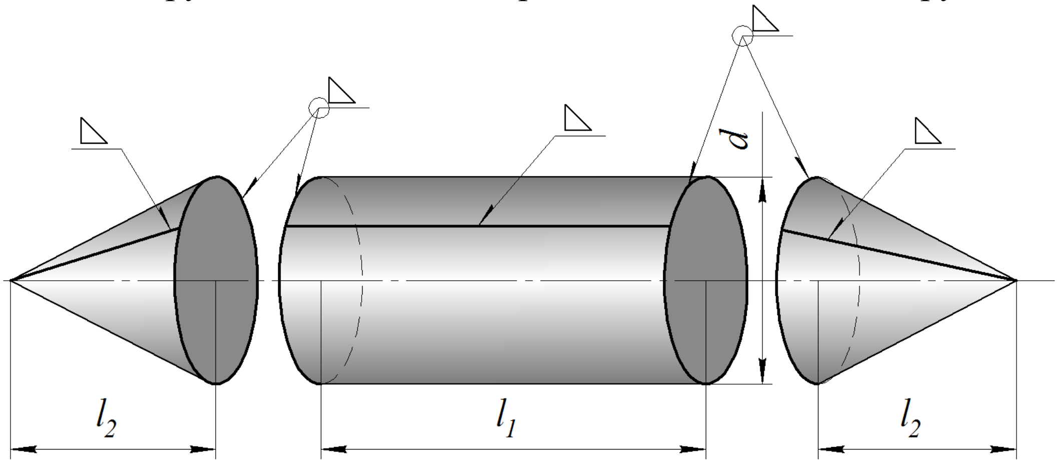

Рис. 10. Задача о емкости для хранения жидкости

Вариант	V, м^3	L, м	c_1, руб/м^2	c_2, руб/м
1	0,1	0,7	800	250
2	0,2	1	700	150
3	0,125	1	500	400
4	0,15	1,2	600	300
5	0,175	0,8	900	350
6	0,1	0,8	1000	200
7	0,2	1,2	800	400
8	0,125	0,8	700	300
9	0,15	0,9	500	350
10	0,175	1	600	200
11	0,1	1	900	250
12	0,2	1,1	1000	150
13	0,125	1,25	800	150
14	0,15	1	700	200
15	0,175	1,1	500	300
16	0,1	0,6	600	350

Решить задачу оптимизации, предварительно исключив две переменные из трех с помощью условий-ограничений.

Задача 3. Проектирование емкости для жидких отходов.

Имеется емкость для жидких отходов (с крышкой или без крышки). Объем емкости должен составлять V м^3. Емкость изготавливается из железобетона толщиной t м. Конструктивные параметры емкости (H, W, L, α) показаны на рис. 11. Определить размеры емкости, обеспечивающей минимальный расход железобетона на ее изготовление.

Примечание: следует уменьшить количество изменяемых конструктивных параметров с помощью условий-ограничений.

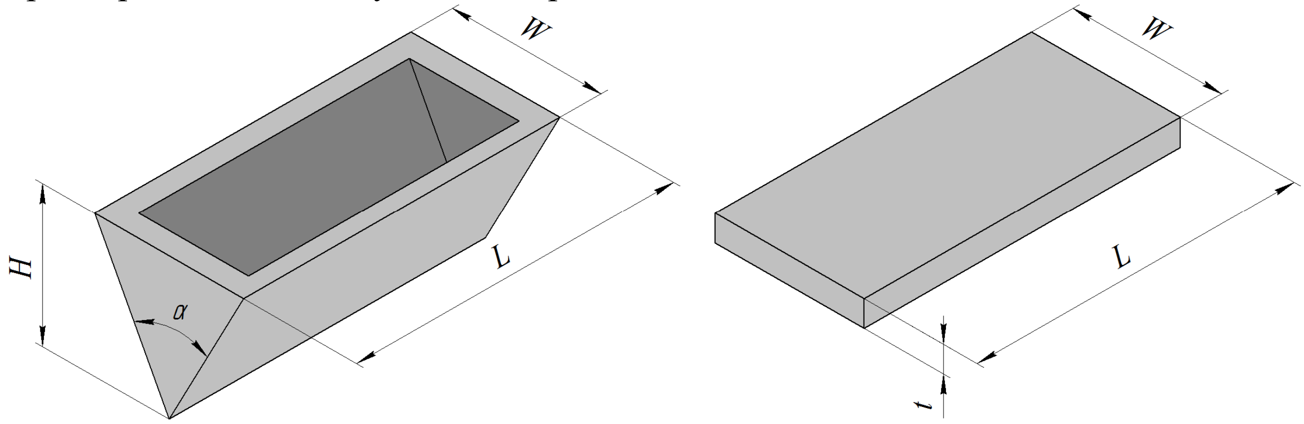

Рис. 11. Задача о емкости

Вариант	V, м^3	t, м	крышка
1	40	0,1	есть
2	50	0,1	есть
3	60	0,1	нет
4	70	0,1	нет
5	80	0,1	есть
6	40	0,125	есть
7	50	0,125	нет
8	60	0,125	нет
9	70	0,125	есть
10	80	0,125	есть
11	40	0,2	нет
12	50	0,2	нет
13	60	0,2	есть
14	70	0,2	есть
15	80	0,2	нет
16	90	0,2	нет

Задача 4. Проектирование контейнера для переправки песка

Требуется спроектировать открытый контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда размерами a, b, h без верхней крышки для переправки песка через реку (рис. 12).

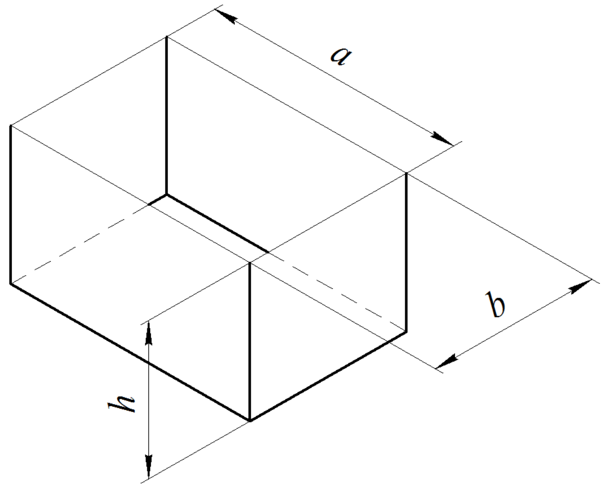

Рис. 12. Задача о проектировании контейнера

Общий объем песка составляет V м^3. Стоимость каждого паромного рейса на противоположный берег реки и обратно зависит от объема контейнера $V_к$ и составляет $c_р$ руб/рейс. Стоимость материалов для изготовления контейнера: c_1 руб/м^2 - дно контейнера, c_2 руб/м^2 - боковые стенки контейнера. Стоимость сварных швов и других соединений составляет $c_{св}$ руб/м. Расположение сварных швов показано на рис. 12 утолщенными линиями.

Требуется найти размеры контейнера, обеспечивающие минимальную общую стоимость переправки песка.

Вариант	V, м^3	$c_р$, руб/рейс	c_1, руб/м^2	c_2, руб/м^2	$c_{св}$, руб/м
1	400	$60+V_к^{1,5}$	600	150	140
2	500	$90+0,8\cdot V_к^{1,8}$	400	220	90
3	600	$150+1,2\cdot V_к^{1,25}$	350	130	140
4	700	$125+0,9\cdot V_к^{1,75}$	500	200	130
5	400	$80+0,5\cdot V_к^{1,8}$	280	160	80
6	500	$50+1,4\cdot V_к^{1,3}$	450	100	120
7	600	$90+1,2\cdot V_к^{1,5}$	380	250	30
8	700	$120+1,5\cdot V_к^{1,25}$	250	300	50
9	400	$50+1,4\cdot V_к^{1,3}$	425	130	130
10	500	$90+1,2\cdot V_к^{1,5}$	350	200	80
11	600	$120+1,5\cdot V_к^{1,25}$	500	160	120
12	700	$60+V_к^{1,5}$	280	100	30
13	400	$90+0,8\cdot V_к^{1,8}$	450	250	110
14	500	$150+1,2\cdot V_к^{1,25}$	380	300	125
15	600	$125+0,9\cdot V_к^{1,75}$	250	150	90
16	700	$80+0,5\cdot V_к^{1,8}$	600	220	140

В качестве начального приближения рекомендуется взять точку с координатами: a=b=h=1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аттеков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 2-е изд., стереотип. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 440 с.
2. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсделл К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. - 349 с., ил.
3. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
4. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. Пер. с англ. - М.: Мир, 1982. - 238 с., ил.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Теоретические сведения и примеры решения задач безусловной оптимизации	3
1. Методы одномерной безусловной оптимизации. Задача о баке №1	3
2. Методы многомерной безусловной оптимизации. Задача о баке №2.	8
Задания для самостоятельного выполнения	12
Литература	16