1.Вычислить вероятности событий, пользуясь формулой полной вероятности и (или) формулой Байеса.

Радиолампа может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями 0,2, 0,3 и 0,5. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий, равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

Решение.

Пусть событие А- лампа проработает заданное число часов.

Пусть событие  - лампа из первой партии, тогда .

Пусть событие  - лампа из второй партии, тогда .

Пусть событие  - лампа из третьей партии, тогда .

Условные вероятности, данные по условию задачи:

, , .

Воспользуемся формулой полной вероятности и найдем вероятность того, что наудачу выбранная лампа проработает заданное число часов:

.

2. Вычислить вероятности событий, пользуясь формулой Бернулли, следствиями из неё, или её асимптотическими приближениями.

Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы вероятность появления среди них цифры, кратной трём, была бы не менее 0,9?

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли .

В нашем случае,  - вероятность того, что случайно выбранная цифра кратна трем ( из 10 существующих цифр только 0,3,6 и 9 делятся на 3 без остатка),  .

Пусть , тогда  - вероятность, того, что среди двух цифр цифры, кратной трем нет.

Тогда вероятность появления среди двух цифр цифры, кратной трём, равна 

Пусть , тогда  - вероятность, того, что среди 3 цифр цифры, кратной трем нет.

Тогда вероятность появления среди 3 цифр цифры, кратной трём, равна 

Пусть , тогда  - вероятность, того, что среди 4 цифр цифры, кратной трем нет.

Тогда вероятность появления среди 4 цифр цифры, кратной трём, равна 

Пусть , тогда  - вероятность, того, что среди 5 цифр цифры, кратной трем нет.

Тогда вероятность появления среди 5 цифр цифры, кратной трём, равна 

Таким образом, .

3. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить график функции распределения вероятностей случайной величины *X*. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение меньше половины максимального.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |   |   |   |   |   |   |
| x  | 18,4  | 28,4  | 28,8  | 29,4  | 30,2  |
| p  | 0,1  | 0,2  | 0,2  | 0,4  | 0,1  |

Решение.

Математическое ожидание





Дисперсия



Среднее квадратическое отклонение



Искомая вероятность



Найдем функцию распределения:

Пусть 

Пусть 

Пусть 

Пусть

 

Пусть

 

Пусть

 

Следовательно, график функции распределения случайной величины Х имеет вид

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | у |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0,9 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0,5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0,3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0,1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 18,4 | 28,4 | 28,8 | 29,4 | 30,2 |  |  |  |

4.Непрерывная случайная величина *Х* задана функцией распределения (задачи 1–14) или плотностью распределения вероятностей (задачи 15–25). Требуется: а) найти постоянную С; б) найти плотность распределения (1–14) или функцию распределения вероятностей (15–25); в) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, скошенность и эксцесс распределения; вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более, чем на одну четвёртую длины всего интервала возможных значений этой величины; г) построить графики функций распределения и плотности распределения вероятностей. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение меньше половины максимального.

$$f\left(x\right)= \left\{\begin{array}{c}0 при x\leq 3/4 и x> 1\\C (\frac{3}{x^{3}}-\frac{2}{x^{2}}) при 3/4<x\leq 1\end{array}\right.$$

Решение. а) Для нахождения параметра С воспользуемся свойством плотности распределения:.

В нашем случае, 

Следовательно, 

Поэтому 



Найдем функцию распределения случайной величины Х по формуле: .

Пусть , тогда 

Пусть , тогда 

Пусть , тогда 



Математическое ожидание





Дисперсия



Среднее квадратическое отклонение







Введем обозначение 



Асимметрия (скошенность)





Эксцесс



Искомые вероятности:





5. Закон распределения дискретной двухмерной случайной величины (*X*,*Y*) представлен таблицей. Определить одномерные законы распределения случайных величин *X* и *Y*. Найти условные плотности распределения вероятностей величин. Вычислить математические ожидания *mx* и *my*, дисперсии σ*x* и σ*y*, ковариационный момент *Kxy* и коэффициент корреляции *rxy*.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  yixi | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 | nx |
| 1 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,01 | 0,15 |
| 2 | 0,04 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,03 | 0,25 |
| 3 | 0,05 | 0,08 | 0,09 | 0,08 | 0,05 | 0,35 |
| 5 | 0,03 | 0,04 | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,25 |
| ny | 0,16 | 0,23 | 0,22 | 0,22 | 0,17 |  |

Решение.

Закон распределения случайной величины :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 |
|  | 0,15 | 0,25 | 0,35 | 0,25 |

Закон распределения случайной величины :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 |
|  | 0,16 | 0,23 | 0,22 | 0,22 | 0,17 |

Условные законы распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 |
|  |  1/4  |  1/4  |  5/16  |  3/16  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 |
|  |  4/23  |  7/23  |  8/23  |  4/23  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 |
|  |  3/22  |  3/11  |  9/22  |  2/11  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 |
|  |  3/22  |  5/22  |  4/11  |  3/11  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 5 |
|  |  1/17  |  3/17  |  5/17  |  8/17  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 |
|  |  4/15  |  4/15  |  1/5  |  1/5  |  1/15  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 |
|  |  4/25  |  7/25  |  6/25  |  1/5  |  3/25  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 |
|  |  1/7  |  8/35  |  9/35  |  8/35  |  1/7  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 8 | 9 | 11 | 12 |
|  |  3/25  |  4/25  |  4/25  |  6/25  |  8/25  |

Математическое ожидание случайной величины :





Дисперсия случайной величины :



Среднее квадратическое отклонение



Математическое ожидание случайной величины :





Дисперсия случайной величины :



Среднее квадратическое отклонение





Ковариационный момент:



Коэффициент корреляции:



6. Двухмерная случайная величина (*X*,*Y*) распределена равномерно в треугольнике, ограниченном прямыми *x* = 0, *y* = 0, *x* +*y* = *2*. Найти одномерные плотности распределения вероятностей и условные плотности распределения. Вычислить математические ожидания *mx* и *my*, дисперсии σ*x* и σ*y*, ковариационный момент *Kxy* и коэффициент корреляции *rxy*.

Решение. Плотность равномерного распределения имеет вид, где  треугольник, ограниченный прямыми *x* = 0, *y* = 0, *x* +*y* = *2.*

Найдем неизвестный параметр С из условия .



Таким образом, где  треугольник, ограниченный прямыми *x* = 0, *y* = 0, *x* +*y* = *2.*

Одномерные плотности распределения:

, если 

, если .

, если 

, если .

Условные плотности распределения:

 , если ,

, если .

, если ,

, если .

Математическое ожидание случайной величины :





Дисперсия случайной величины :



Математическое ожидание случайной величины :





Дисперсия случайной величины :



Ковариационный момент:



Коэффициент корреляции:



7**.** Дискретная величина *X* задана таблично:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi*  | –4  | –3  | –2  | –1  | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| *pi*  | 0,02  | 0,03  | 0,05  | 0,1  | 0,2  | 0,3  | **0,1**  | 0,1  | 0,05  | 0,05  |

Записать в виде таблицы закон распределения заданной функции. Найти математическое ожидание функции. Функцию выбрать по номеру варианта.

 *Y* = 30 – 2X2

Решение. Составим закон распределения случайной величины :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *уi*  | -20 | -2 | 12 | 22 | 28 | 30 |
| *pi*  | 0,05 | 0,07 | 0,13 | 0,15 | 0,4 | 0,2 |

Математическое ожидание случайной величины :

