1 Домашнее задание по дискретной математике

1. Даны множества $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,1,3,4,5\}$, $C = \{0,2,5,6\}$, $D = \{0,1\}$. Найти

   (a) $(A \cup B) \setminus C$

   (b) $(A \cap B) \setminus (C \setminus A)$

   (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

   (d) $(A \times D) \cap (D \times B)$

   (e) $A \times (B \setminus (A \cup C))$

2. Изобразить на координатной плоскости множества

   (a) $A \setminus (B \cap C)$

   (b) $(A \triangle B) \triangle C$

   (c) $A \setminus (B \setminus C)$,

   если
   $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 25\}$,
   $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 4\}$,
   $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| \leq 4\}$.

3. Проверить истинность тождеств. Если тождество истинно, доказать его, если нет, привести контрпример.

   (a) $(X \cup Y) \setminus Y = X$

   (b) $(X \triangle Y) \setminus Y = X$

   (c) $X \times Y = Y \times X$

   (d) $(X \times Y) \cap (U \times V) = (X \cap U) \times (Y \cap V)$

   (e) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$

4. Используя основные тождества алгебры множеств, доказать тождество

   (a) $X \setminus (Y \setminus X) = X$

   (b) $X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z$

5. Даны множества
   $X = \{0,1,2\}$,
   $Y = \{1,2,3\}$,
   $Z = \{a,b,c\}$
   и соответствия
   $R = \{(0,1),(0,2),(1,3)\}$ из множества X в множество Y и
   $P = \{(1,a),(2,a),(3,b),(2,c)\}$ из множества Y в множество Z.

   Найти соответствия

   (a) $R \circ P$

(b) $P^{-1} \circ \overline{P}$

(c) $(R^{-1} \circ R) \cap (P \circ P^{-1})$

6. Верно ли, что для всех множеств X, Y, $A, B \subseteq X$, и соответствия $R \subseteq X \times Y$ справедливы равенства или включения (если да, доказать, если нет привести контрпример)

   (a) $R(A \setminus B) = R(A) \setminus R(B)$

   (b) $A \subseteq R^{-1}(R(A))$

   (c) $R(\overline{A}) \subseteq \overline{R(A)}$

   (d) $\overline{R}\left(\overline{A}\right) = R(A)$

7. Являются ли следующая функция инъективной, сюръективной, биективной?

   (a) $f\colon \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$, $f(x) = |x-2| + |x-1|$

   (b) $f\colon \{0,1,\ldots 100\} \to \{0,1,\ldots 50\}$, $f(x) = [\frac{x}{2}]$

   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|1-4x|}$

   (d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-2y, y+4x, 2x+7y)$

8. Исследовать свойства бинарного отношения R на множестве X (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, антисимметричность, полнота, связность, транзитивность). Является ли отношение R отношением строгого (нестрогого) частичного (линейного) порядка, отношением эквивалентности? Ответ обосновать

   (a) $X = \{0,1,2,3\}$, $R = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2)\}$

   (b) $X = \{1,2,\ldots\}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow$ y делится на x, т.е. $(\exists k \in \mathbb{Z})\, y = kx$

   (c) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $(x,y)\, R\, (u,v) \Leftrightarrow xv = yu$

   (d) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(x,y)\, R\, (u,v) \Leftrightarrow (x \le u) \vee (y \le v)$

   (Символом $\mathbb{Z}$ обозначается множество целых чисел.)