Контрольная работа для студентов направления «ИКТ и СС», обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий

Шифры: N - предпоследняя цифра "1" ; M - последняя цифра "2"   во всех заданиях.

Перечень задач для самостоятельного решения

1. В некоторой области пространства имеется электростатическое поле, потенциал которого зависит от координат x и z по следующему закону: $\varphi(x,y,z) = Nx^2 - \dfrac{M}{y^2} + \dfrac{(N+M)}{z^4}$. Найти закон изменения плотности стороннего заряда в этом поле, считая, что проницаемость среды равна ε. В задаче: N — предпоследняя цифра Вашего шифра; M — последняя цифра Вашего шифра.

2. Рассматривается однородная гармоническая волна с волновым вектором $\vec{k} = k\vec{\alpha}_0$; вектором $\vec{E} = E\vec{\beta}_0$ с амплитудой при $t = 0, \vec{r} = 0$ равной E_0.

— нарисовать ориентацию векторов $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ относительно осей декартовой системы координат при $t = 0, \vec{r} = 0$;

— записать выражения для комплексных амплитуд $\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}$ и мгновенных значений $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$;

— построить структуру поля волны, то есть семейство векторных линий $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в поперечной (относительно $\vec{k}$) и продольной (совпадающей с $\vec{k}$ и $\vec{H}$) плоскостях в момент времени $t = 0$.

Если последняя цифра Вашего шифра 0,1,2,3, то $\vec{\alpha}_0 = \vec{x}_0$; $\vec{\beta}_0 = \vec{y}_0$.

Если последняя цифра Вашего шифра 4,5,6,7, то $\vec{\alpha}_0 = \vec{y}_0$; $\vec{\beta}_0 = \vec{z}_0$.

Если последняя цифра Вашего шифра 8,9, то $\vec{\alpha}_0 = \vec{z}_0$; $\vec{\beta}_0 = \vec{x}_0$.

3. Плоская волна с амплитудой напряжённости электрического поля в начале координат $E_0 = 10 \cdot M$ мВ/м распространяется вдоль оси OX в среде с параметрами $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = N \cdot 10^{-5}$ См/м. Частота волны $f = (N+M)$ МГц. Найти амплитуду вектора напряжённости магнитного поля и мгновенное значение модуля вектора Пойнтинга на расстоянии $z = 2$ км от начала координат.

В задаче: N — предпоследняя цифра Вашего шифра; M — последняя цифра Вашего шифра. При решение задачи требуется получение численных значений.

Образцы решения задач

Задача №1

В некоторой области пространства имеется электростатическое поле, потенциал которого зависит от координат x и y по следующему закону: $\varphi(x,y) = 3x^3 - 4y^3$. Найти закон изменения плотности стороннего заряда в этом поле, считая, что проницаемость среды равна ε.

<u>РЕШЕНИЕ:</u>

Плотность стороннего заряда определяется из неоднородного уравнения Пуассона для электростатического потенциала:

$$\nabla^2\varphi(x,y) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

которое в декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Найдём производные:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 18x, \qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = -24y.$$

Подставляя выражения для производных в уравнение Пуассона, находим:

$$-\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon_a} = 18x - 24y,$$

окончательно получаем:

$$\rho(x,y) = 6\varepsilon_a(4y - 3x).$$

Задача №2

Рассматривается однородная гармоническая волна с волновым вектором $\vec{k} = -k\vec{z}_0$; вектором $\vec{E} = E\vec{x}_0$ с амплитудой при $t = 0$, $\vec{r} = 0$ равной E_0.

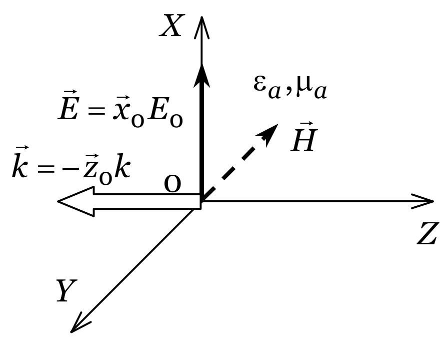
— нарисовать ориентацию векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{k}$ относительно осей декартовой системы координат при $t = 0$, $\vec{r} = 0$;

— записать выражения для комплексных амплитуд $\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}$ и мгновенных значений $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$;

— построить структуру поля волны, то есть семейство векторных линий $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в поперечной (относительно $\vec{k}$) и продольной (совпадающей с $\vec{k}$ и $\vec{H}$) плоскостях в момент времени $t = 0$.

РЕШЕНИЕ:

1. Векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ должны образовывать правую тройку, поэтому:



2. Определяем комплексные амплитуды векторов:

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{E_0}{Z_x}\vec{y}_0 e^{i\,(\omega t + kz)},$$

$$\dot{\vec{E}} = E_0 \vec{x}_0 e^{i\,(\omega t + kz)},$$

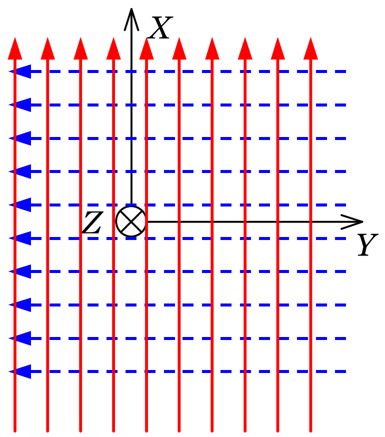
где $Z_x = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ — характеристическое сопротивление среды.

Определяем мгновенные значения векторов:

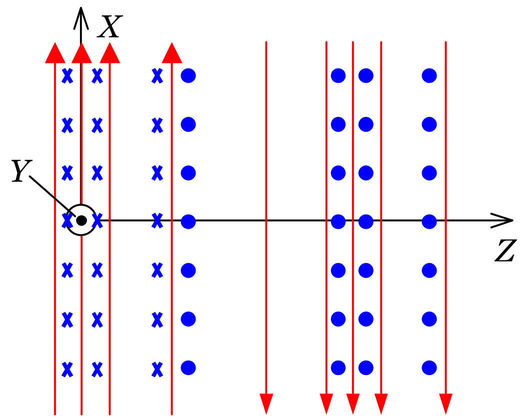
$$\vec{H}(z,t) = \mathrm{Re}\,\dot{\vec{H}} = -\frac{E_0}{Z_x}\vec{y}_0 \cos\left(\omega t + kz\right),$$

$$\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}\,\dot{\vec{E}} = E_0 \vec{x}_0 \cos\left(\omega t + kz\right).$$

3. Построим структуру поля волны в поперечной плоскости $X0Y$:



Построим структуру поля волны в продольной плоскости $X0Z$:



На рисунках введены следующие обозначения:

Линии вектора $\vec{E}$

Линии вектора $\vec{H}$

Задача №3

Плоская волна с амплитудой напряжённости электрического поля в начале координат $E_0 = 10$ мВ/м распространяется вдоль оси OZ в среде с параметрами $\varepsilon = \mu = 1, \sigma = 10^{-5}$ См/м. Частота волны $f = 1$ МГц. Найти амплитуду вектора напряжённости магнитного поля и мгновенное значение вектора Пойнтинга на расстоянии $z = 1$ км от начала координат.

<u>РЕШЕНИЕ:</u>

Запишем выражение для вектора $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z) \quad .$$

Вычисляем $\text{tg}\Delta$:

$$\text{tg}\Delta = \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon\varepsilon_0}.$$

Вычисляем параметры волны:

$$k' = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon\left(\sqrt{1+\text{tg}^2\Delta}+1\right)},$$

$$k'' = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon\left(\sqrt{1+\text{tg}^2\Delta}-1\right)}.$$

Определяем напряжённость магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{E}_0}{|\ Z_x\ |} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z - \varphi_Z),$$

где

$$|\dot{Z}_x| \approx Z_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = 120\pi,$$

$$\varphi_Z = -\frac{\Delta}{2}.$$

Находим амплитуду вектора $\vec{H}$ на расстоянии z:

$$H = \frac{E_0}{|\ Z_x\ |} e^{-k''z}.$$

Найдём мгновенное значение вектора Умова-Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*\right] = \vec{z}_0 \frac{E_0^2}{2\ |Z_x|} e^{-2k''z} \cos\varphi_Z.$$

Основные формулы

Электростатическое поле

1. Уравнения для электростатического потенциала.

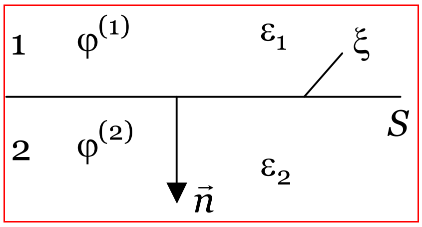
а) в областях, где плотность объёмного заряда $\rho \neq 0$:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \quad , \qquad \varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon \quad ;$$

б) в областях, где плотность объёмного заряда $\rho = 0$:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad .$$

2. Граничные условия для потенциала.



$$\varphi^{(1)}\Big|_S = \varphi^{(2)}\Big|_S , \qquad \varepsilon_{a2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n}\Bigg|_S - \varepsilon_{a1} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n}\Bigg|_S = \xi \quad ,$$

где n — нормальная координата.

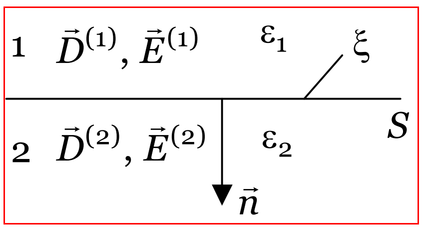
3. Напряжённость электростатического поля.

$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi.$

4. Материальное уравнение.

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}.$$

5. Граничные условия.



$$\vec{E}_\tau^{(1)}\Big|_S = \vec{E}_\tau^{(2)}\Big|_S , \quad D_n^{(2)}\Big|_S - D_n^{(1)}\Big|_S = \xi,$$

где τ — указывает на тангенциальные составляющие.

Стационарное магнитное поле

1. Уравнение Максвелла.

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = I\,,$$

где I — ток, ограниченный контуром L.

2. Материальное уравнение.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}\,,$$

где μ — относительная магнитная проницаемость среды.

3. Закон Био-Савара.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\vec{l}\,', (\vec{r} - \vec{r}\,')]}{|\,\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\ ,$$

где $d\vec{l}\,'$ — бесконечно малый элемент на проводнике; I — линейный ток, текущий по элементу $d\vec{l}\,'$; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, в которой определяется магнитное поле; $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор точки, в которой расположен источник магнитного поля.

4. Граничные условия.

$$B_{2n}\big|_S = B_{1n}\big|_S$$

(нормальные составляющие вектора $\vec{B}$ непрерывны на границе S)

$$H_{2\tau}\big|_S - H_{1\tau}\big|_S = \eta$$

(тангенциальные составляющие вектора $\vec{H}$ непрерывны на границе S только, когда нет поверхностных токов $\eta = 0$)

Магнитостатическое поле

1. Магнитостатический потенциал ψ.

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}\psi\,.$$

2. Уравнение Лапласа для магнитостатического потенциала.

$$\nabla^2 \psi = 0\ .$$

3. Граничные условия для магнитостатического потенциала.

$$\psi_1\big|_S = \psi_2\big|_S\,,\quad \left.\frac{\partial \psi_1}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial n}\right|_S\,,$$

где n — нормальная координата.

Монохроматические волны в однородной среде без потерь

1. Выражения для мгновенных значений векторов электромагнитного поля:

$$\vec{E}(\xi,t) = \vec{\eta}_0 E_0 \cos(\omega t \mp k\xi + \varphi),$$
$$\vec{H}(\xi,t) = \vec{\zeta}_0 \frac{E_0}{Z_x} \cos(\omega t \mp k\xi + \varphi),$$

где $Z_x = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ — характеристическое сопротивление среды; ξ — координата, вдоль которой происходит распространение волны; E_0, $H_0 = E_0 / Z_x$ — начальные амплитуды; φ — начальная фаза; $\vec{\eta}_0$ — единичный вектор, указывающий направление колебаний $\vec{E}$; $\vec{\zeta}_0$ — единичный вектор, указывающий направление колебаний $\vec{H}$. Верхние знаки соответствуют случаю, когда волна распространяется вдоль оси $o\xi$; нижние знаки — в противоположном направлении.

2. Выражения для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля:

$$\dot{\vec{E}}(\xi) = \vec{\eta}_0 \dot{E}_0 e^{\mp ik\xi},$$
$$\dot{\vec{H}}(\xi) = \vec{\zeta}_0 \frac{\dot{E}_0}{Z_x} e^{\mp ik\xi}.$$

3. Мгновенное значение вектора Умова-Пойнтинга:

$$\vec{S} = \vec{\xi}_0 \frac{E_0^2}{Z_x} \cos^2(\omega t \mp k\xi + \varphi).$$

4. Среднее значение вектора Умова-Пойнтинга:

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{\xi}_0 \frac{E_0^2}{2Z_x}.$$

5. Характеристическое сопротивление среды без потерь:

$$Z_x = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

6. Волновое число в среде без потерь:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{\upsilon_ф},$$

где $k_0 = 2\pi f / c$ — волновое число для вакуума; $\upsilon_ф = c / \sqrt{\varepsilon\mu} = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ — фазовая скорость; f — частота; $\omega = 2\pi f$.

7. Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

8. Фазовая скорость в среде без потерь:

$$\upsilon_ф = c / \sqrt{\varepsilon\mu} = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$$

Монохроматические волны в однородной среде с потерями

Основные формулы:

1. Выражения для мгновенных значений векторов электромагнитного поля:

$$\vec{E}(\xi,t)=\vec{\eta}_0 E_0\, e^{\mp k''\xi}\cos(\omega t\mp k'\xi+\varphi),$$

$$\vec{H}(\xi,t)=\vec{\zeta}_0 \frac{E_0}{|\dot{Z}_x|}e^{\mp k''\xi}\cos(\omega t\mp k'\xi+\varphi-\varphi_Z),$$

где $\dot{Z}_x=\sqrt{\mu_0\mu_\kappa/\varepsilon_0\varepsilon_\kappa}$ — комплексное характеристическое сопротивление среды; ξ — координата, вдоль которой происходит распространение волны; E_0, $H_0=E_0/|\dot{Z}_x|$ — начальные амплитуды; φ — начальная фаза; $\varphi_Z=(\Delta^m-\Delta)/2$; Δ — тангенс угла диэлектрических потерь; Δ^m — тангенс угла магнитных потерь; $\vec{\eta}_0$ — единичный вектор, указывающий направление колебаний $\vec{E}$; $\vec{\zeta}_0$ — единичный вектор, указывающий направление колебаний $\vec{H}$. Верхние знаки соответствуют случаю, когда волна распространяется вдоль оси $o\xi$; нижние знаки — в противоположном направлении.

2. Выражения для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля:

$$\dot{\vec{E}}(\xi)=\vec{\eta}_0\dot{E}_0\, e^{\mp k''\xi}e^{\mp ik'\xi},$$

$$\dot{\vec{H}}(\xi)=\vec{\zeta}_0\frac{\dot{E}_0}{\dot{Z}_x}e^{\mp k''\xi}e^{\mp ik'\xi}.$$

3. Среднее значение вектора Умова-Пойнтинга:

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\vec{\xi}_0\frac{E_0^2}{2|\dot{Z}_x|}e^{-2k''\xi}\cos\varphi_Z.$$

4. Комплексное характеристическое сопротивление среды с потерями:

$$\dot{Z}_x=\sqrt{\frac{\mu_\kappa\mu_0}{\varepsilon_\kappa\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{|\mu_\kappa|\,\mu_0}{|\varepsilon_\kappa|\,\varepsilon_0}}\,e^{i\varphi_Z}.$$

5. Комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_\kappa=\varepsilon'-i\varepsilon'',$$

где $\varepsilon'=\varepsilon$ — вещественная часть; $\varepsilon''=\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ — мнимая часть.

В результате:

$$\varepsilon_\kappa=\varepsilon_0\left(\varepsilon'-i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right).$$

6. Комплексная магнитная проницаемость

$$\mu_\kappa = \mu_0(\mu' - i\mu''),$$

где μ' — вещественная часть; μ'' — мнимая часть.

7. Тангенс угла диэлектрических потерь

$$\mathrm{tg}\Delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}.$$

8. Тангенс угла магнитных потерь.

$$\mathrm{tg}\Delta^m = \frac{\mu''}{\mu'}.$$

9. Волновое число в среде с потерями:

$$k_\kappa = \omega\sqrt{\varepsilon_\kappa\mu_\kappa} = k' - ik'',$$

где $k' = \omega/v_\text{ф}$ — коэффициент распространения; $v_\text{ф} = c/\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon_\kappa\mu_\kappa}$ — фазовая скорость; k'' — коэффициент затухания.

10. Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'}.$$

11. Фазовая скорость в среде с потерями:

$$v_\text{ф} = 1/\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon_\kappa\mu_\kappa}.$$

12. Классификация сред

А) Если $\mathrm{tg}\Delta > 10^2$, то среда — проводник.

$$k' = k'' = k_0\sqrt{\varepsilon''/2} = \sqrt{\omega\mu_a\sigma/2}.$$

Б) Если $10^{-2} < \mathrm{tg}\Delta < 10^2$, то среда — полупроводник.

$$k' = k_0\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon'\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\Delta}+1\right)},$$

$$k'' = k_0\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon'\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\Delta}-1\right)}.$$

В) Если $\mathrm{tg}\Delta < 10^{-2}$, то среда — диэлектрик.

$$k' = k_0\sqrt{\varepsilon'},\ k'' = \frac{1}{2}k_0\sqrt{\varepsilon'}\,\mathrm{tg}\Delta.$$

13. Выражения для амплитуд векторов электромагнитного поля:

$$E_m(\xi) = E_0 e^{\mp k''\xi}, \qquad H_m(\xi) = \frac{E_0}{|\dot{Z}_x|}e^{\mp k''\xi}.$$

Составил

Профессор	*д.ф.-м.н., доцент*		*Осипов О.В.*
должность	уч. степень, уч. звание	подпись	фамилия, имя, отчество

« __ » _________________ 2013 г.