

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение высшего и профессионального  
образования  
Нижегородский государственный технический университет

Кафедра «Техника радиосвязи и телевидения»

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Программа курса, задания к контрольным работам  
и методические указания к решению задач  
для студентов заочного факультета специальности 200700  
заочной формы обучения

Нижний Новгород  
2005

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978.
2. Никольский В.В., Никольская Н.Т. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989.
3. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия - Телеком, 2003.
4. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1973.
5. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. – М.: Высшая школа, 1980.
6. Фальковский О.И. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1978.
7. Гольдштейн и Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. – М.: Советское радио, 1971.
8. Говорков В.А., Купальян С.Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1963.
9. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1975.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986.
11. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. – М.: Наука, 1968.
12. Пчелин Б.К. Векторный анализ для инженеров электриков и радистов. – М.: Энергия, 1968.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Физматгиз, 1962.

## Содержание

Введение.....	3
Программа курса .....	4
Лабораторные работы по курсу.....	7
Задания к контрольным работам .....	7
Методические указания к решению задач.....	19
Список рекомендуемой литературы.....	28

Составитель Ю. С. Белозеров

УДК 621.37(075)

Электродинамика и распространение радиоволн: Программа курса, задания к контрольным работам и метод. указания к решению задач для студентов заочного факультета специальности 200700 заочной формы обучения / НГТУ; Сост.: Ю.С. Белозеров - Н. Новгород. 2005. 28 с.

Научный редактор проф. В.А. Калмык  
Редактор Э.Б. Абросимова

Подписано в печать 03.03.2005. Формат 60 x 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага газетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 300 экз. Заказ 383.

Нижегородский государственный технический университет.  
Типография НГТУ. 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный  
технический университет, 2005

## Введение

Курс «Электродинамика и распространение радиоволн» изучается студентами заочного факультета в шестом и седьмом семестрах.

Данное методическое пособие содержит следующие разделы:

- Программа теоретической части курса.
- Список лабораторных работ.
- Задания к контрольным работам.
- Методические указания к решению задач.
- Список рекомендуемой литературы.

1. Программа курса состоит из Введения и пяти тем. Введение и первые три темы изучаются студентами в шестом семестре, четвертая и пятая – в седьмом.

К каждой теме дана литература с указанием страниц по первым двум учебникам рекомендованного списка литературы.

Для успешного изучения курса «Электродинамика и распространение радиоволн» необходимо повторить основные определения и законы электричества и магнетизма, изучаемые в курсе физики.

При проработке материала изучаемого курса основное внимание должно уделяться физической стороне рассматриваемых явлений. Однако достаточно полное и глубокое усвоение основ электродинамики невозможно без привлечения математического аппарата. Поэтому необходимо уяснить смысл проводимых математических выкладок и знать важнейшие соотношения, на которых базируется теория электромагнитного поля (уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и граничные условия).

Математической базой для курса «Электродинамика и распространение радиоволн» являются следующие разделы математики: векторная алгебра, векторный анализ, дифференциальные уравнения в частных производных и цилиндрические функции. Кроме того, нужно уметь вычислять объемные и поверхностные интегралы в двух криволинейных системах координат: цилиндрической и сферической (см. литературу по математике с [10] по [13]).

2. В шестом семестре студенты выполняют две лабораторные работы, а в седьмом – четыре (см. Список лабораторных работ).

3. Каждый студент выполняет две контрольные работы. Контрольная работа 1 выполняется в шестом семестре, работа 2 – в седьмом. В некоторых задачах требуется дать ответы не на все вопросы, а только на часть из них. Номера этих вопросов определяется из таблиц вариантов по последней цифре шифра.

Зачетные контрольные работы предъявляются преподавателю перед началом экзамена.

Решение задач по материалу курса совершенно необходимо для овладения физическими и математическими закономерностями электромагнитного поля. На экзамене студенту в обязательном порядке будет предложено решить задачу, аналогичную одной из задач контрольных работ. Поэтому при подго-

товке к экзамену рекомендуется решать задачи не только своего варианта, но и задачи других вариантов.

При выполнении контрольных работ студент должен придерживаться следующих правил:

3.1. Сначала выбирается и обосновывается метод решения, получаются формулы, необходимые для расчета. Буквенные обозначения, входящие в формулы, должны сопровождаться письменными разъяснениями.

3.2. Затем, в полученные формулы подставляются численные значения заданных величин, приводятся результаты промежуточных вычислений и конечный результат. Численный результат должен иметь размерность соответствующую Международной системе единиц СИ.

3.3. Решение каждой задачи должно сопровождаться рисунками, поясняющими условия задачи и форму силовых линий электромагнитного поля, а если по условию задачи требуется, - то и графиками.

3.4. При оформлении контрольной работы необходимо указывать шифр, текст условия задачи, числовые данные соответствующего варианта и список используемой литературы.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради.

4. Для тех задач, при решении которых, как правило, встречаются затруднения, приведены примеры решения таких задач в разделе «Методические указания к решению задач».

5. Из списка литературы, рекомендованного кафедрой, в программе и в заданиях к контрольным работам приведены страницы только по первым двум учебникам ([1] и [2]). Студенты могут использовать и другие учебники. Соответствующие разделы можно легко определить по содержанию тем, имеющихся в программе курса.

## Программа курса

### Введение

Понятие термина «поле». Электромагнитное поле, его материальность. Краткая история развития электродинамики как науки.

Литература: [1], с. 9 – 12,  
[2], с. 7 – 10.

### Тема 1. Основные понятия и уравнения теории электромагнитного поля

Заряды, токи, векторы электромагнитного поля. Физический смысл векторов напряженности электрического поля и магнитной индукции. Дифференциальная и интегральная формы уравнений Максвелла. Обобщенный закон электромагнитной индукции. Ток и магнитное поле. Система уравнений Максвелла.

Виды сред. Электропроводность. Проводники и диэлектрики.

Поля на границах раздела сред. Нормальные и касательные компоненты векторов поля. Граничные условия.

Энергия электрического поля. Уравнение баланса энергии. Вектор Пойнтинга. Его физический смысл. Поток вектора Пойнтинга и баланс энергии.

Принцип суперпозиции.

Литература: [1], с. 13, 54, 58;

[2], с. 11, 54, 58 – 60.

### Тема 2. Статические и стационарные поля

Основные уравнения электростатики. Электростатический потенциал. Уравнения Пуассона и Лапласа. Разность потенциалов. Использование теоремы Гаусса для расчета электрических полей.

Проводники в электростатическом поле. Граничные задачи электростатики. Электрическая емкость.

Стационарное магнитное поле. Магнитостатика. Применение первого уравнения Максвелла в интегральной форме.

Принцип аналогии токов и электростатических полей.

Литература: [1], с. 60 – 78, 84 – 89, 93 – 94, 103 – 105;

[2], с. 62 – 64, 67 – 81, 88 – 94, 107 – 109.

### Тема 3. Плоские однородные волны

Электромагнитное поле гармоническое во времени. Система уравнений Максвелла и уравнения второго порядка. Уравнения электродинамики в комплексной форме. Метод комплексных амплитуд. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Однородное и неоднородное уравнения Гельмгольца.

Волновой процесс. Плоская однородная волна. Фронт волны. Гармонические волны. Виды волн. Затухающие волны. Единицы измерения затухания. Плоские неоднородные волны. Волны сферические, цилиндрические.

Волны в идеальном диэлектрике. Волны в поглощающих средах. Поляризация и наложение волн.

Распространение электромагнитных сигналов. Групповая скорость волнового процесса.

Волна при наличии плоской границы раздела сред. Падение волны на границу раздела сред. Законы Снеллиуса. Формула Френеля. Отражение от идеального проводника. Полное отражение от границы диэлектриков.

Поверхностный эффект.

Литература: [1], с. 108 – 115, 125 – 142, 148 – 164, 176 – 177;

[2], с. 113 – 115, 116 – 123, 135 – 168.

**Тема 4. Направляющие системы и резонаторы**

Общая теория направляемых волн. Свободные поля в продольно однородных системах. Представление поперечных компонент поля через продольные. Классификация волн.

Особенности распространения волн в системах с однородной средой. Критические частоты и критическая длина волны. Дисперсия быстрых волн.

Прямоугольный волновод.  $E$  – волны,  $H$  – волны. Токи в стенках волновода.

Круглый волновод.  $E$  – волны,  $H$  – волны. Низшие волны круглого волновода.

Общая теория  $TEM$ – волн в многосвязных системах. Коаксиальная линия.

Объемные резонаторы. Направляющая система и объемный резонатор. Собственная частота резонатора. Прямоугольный резонатор. Цилиндрический резонатор. Коаксиальный резонатор. Объемные резонаторы, близкие к квазистационарным.

Возбуждение волноводов и резонаторов. Общие соображения.

Литература: [1], с. 205 – 273, 284 – 310, 325 – 328, 332 – 341, 359 – 360; [2], с. 198 – 209, 223 – 263, 289 – 292, 294 – 302, 302 – 316.

**Тема 5. Излучение, дифракция и распространение радиоволн**

Сторонний ток и поле излучения. Элементарный электрический излучатель. Поля в ближней и дальней зонах элементарного излучателя. Нормированная характеристика направленности излучателя – диаграмма направленности.

Принцип перестановочной двойственности и элементарный магнитный излучатель.

Дифракция. Явление дифракции и электродинамические задачи. Метод Гюйгенса – Кирхгофа. Дифракция на отверстии.

Распространение радиоволн. Радиоволны в свободном пространстве. Радиоволны в природных условиях. Диапазон радиоволн.

Влияние поверхности земли на распространение радиоволн. Геометрическая оптика при анализе распространения радиоволн.

Земные радиоволны. Элементарная модель радиолинии. Учет сферичности земли.

Влияние тропосферы. Общие свойства тропосферы. Рассеяние и поглощение радиоволн в тропосфере. Рефракция радиоволн в тропосфере.

Радиоволны в ионосфере. Общие свойства ионосферы. Отражение радиоволн от ионосферы.

Диапазонные особенности распространения радиоволн. Сверхдлинные и длинные волны. Средние волны. Короткие волны. Ультракороткие волны. Космическая радиоволна.

Литература: [1], с. 197, 202 – 214, 228 – 240, 412 – 420, 426 – 463; [2], с. 324 – 335, 343 – 353, 467 – 505.

В шестом семестре студенты выполняют две лабораторные работы.

1. Измерение распределения напряженности электрического поля в волноводе.

2. Излучение электромагнитных волн.

В седьмом семестре выполняются четыре лабораторные работы.

1. Расчет и моделирование полей в однородном круглом волноводе.

2. Изучение дисперсионных свойств прямоугольного волновода.

3. Объемные резонаторы.

4. Гребенчатая замедляющая система.

**Задания к контрольным работам**

Контрольная работа 1

Задача 1

1.1. Вычислить скалярное произведение двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , угол между которыми равен  $\alpha$  (см. табл. 1.).

Таблица 1

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \vec{A} $	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$ \vec{B} $	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
$\alpha^\circ$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

Литература: [1], с. 511, [2], с. 11, 12.

1.2. Найти векторное произведение двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , угол между которыми равен  $\alpha$ . Вектор  $\vec{A} = \vec{e}_i |\vec{A}|$  направлен по одной из осей прямоугольной системы координат, а вектор  $\vec{B}$  лежит в одной из координатных поверхностей этой системы ( $xoz$ ,  $yoz$ ,  $yoх$ ).

Варианты заданий приведены в табл. 2.

Таблица 2

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \vec{A} $	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$ \vec{B} $	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
$\alpha^\circ$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
$\vec{e}_i$	$\vec{x}_0$	$\vec{y}_0$	$\vec{z}_0$	$-\vec{x}_0$	$-\vec{y}_0$	$-\vec{z}_0$	$\vec{x}_0$	$\vec{y}_0$	$\vec{z}_0$	$-\vec{x}_0$
координатная поверхность	$xoz$	$yoз$	$yoх$	$xoz$	$xoz$	$yoz$	$xoy$	$xoz$	$xoy$	$yoz$

Литература: [1], с. 511, [2], с. 11, 12.

Задача 2.

2.1. Вдоль бесконечного прямого цилиндра радиуса  $a$  протекает ток проводимости. Напряженность магнитного поля, создаваемая этим током внутри цилиндра:

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi H_0 f(r),$$

где  $\vec{e}_\phi$  - единичный вектор в цилиндрической системе координат, а  $r$  - переменная в этой системе,  $H_0$  - постоянная величина,  $f(r)$  - функция распределения поля вдоль радиальной оси координат.

Определить распределение плотности тока проводимости вдоль радиуса этого цилиндра.

Варианты заданий приведены в табл. 3.

Таблица 3

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$r^{-5}$	$r^{-4}$	$r^{-3}$	$r^{-2}$	$\frac{e^{r/a}}{r}$	$r$	$r^2$	$r^3$	$r^4$	$r^5$

2.2. В бесконечно длинном прямом цилиндре протекает ток проводимости, создающий поле вектора магнитной индукции:

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi B_0 f(r),$$

где  $\vec{e}_\phi$  - единичный вектор в цилиндрической системе координат,

$B_0$  - постоянная величина,

$f(r)$  - функция распределения поля вдоль радиальной оси координат,

$r$  - расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения.

Определить  $\text{div} \vec{B}$  внутри цилиндра.

Варианты заданий приведены в табл. 4.

Таблица 4

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$r^{-5}$	$r^{-4}$	$r^{-3}$	$r^{-2}$	$r^{-2}$	$r$	$r^2$	$r^3$	$r^4$	$r^5$

2.3. В шарике радиуса  $a$  вектор электрической индукции:

$$\vec{D} = \vec{r}_0 D_0 f(r),$$

где  $\vec{r}_0$  - единичный вектор в сферической системе координат,

$D_0$  - некоторая постоянная величина,

$f(r)$  - функция распределения поля вдоль радиуса шарика,

$r$  - расстояние от центра шарика до точки наблюдения.

Определить функцию распределения плотности объемного заряда внутри шарика.

Варианты заданий приведены в табл. 5.

Таблица 5

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$r^{-5}$	$r^{-4}$	$r^{-3}$	$r^{-2}$	$r^{-2}$	$r$	$r^2$	$r^3$	$r^4$	$r^5$

Литература: [1], с. 13 - 24, 512 - 513;

[2], с. 22 - 27, 58 - 64.

Задача 3

3.1. В бесконечно длинном прямом цилиндре радиуса  $a$  протекает ток проводимости, создающий напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi H_0 f(r),$$

где  $\vec{e}_\phi$  - единичный вектор в цилиндрической системе координат,

$H_0$  - постоянная величина,

$f(r)$  - функция распределения поля вдоль радиальной оси координат,

$r$  - расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения.

Определить ток проводимости, протекающий через поперечное сечение цилиндра

Варианты заданий приведены в табл. 6.

Таблица 6

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$r^{-5}$	$r^{-4}$	$r^{-3}$	$r^{-2}$	$r^{-2}$	$r$	$r^2$	$r^3$	$r^4$	$r^5$

3.2. В шарике радиуса  $a$  создано электрическое поле, вектор электрической индукции которого:

$$\vec{D} = \vec{r}_0 D_0 f(r),$$

где  $\vec{r}_0$  - единичный вектор в сферической системе координат,

$D_0$  - постоянная величина,

$f(r)$  - функция распределения поля вдоль радиальной оси координат,

$r$  - расстояние от центра шарика до его произвольной точки.

Определить полный заряд, находящийся внутри шарика.

Варианты заданий приведены в табл. 7.

Таблица 7

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$r^{-5}$	$r^{-4}$	$r^{-3}$	$r^{-2}$	$r$	$r^{-1}$	$r^{-2}$	$r^{-3}$	$r^{-4}$	$r^{-5}$

Литература: [1], с. 18, 24;

[2], с. 25, 27, 62, 64.

Задача 4

В сфере с радиусом  $a$  электрический потенциал:

$$\phi = \phi_0 f(r),$$

где  $\phi_0$  - постоянная величина,

$f(r)$  – функция распределения потенциала вдоль радиальной оси координат,

$r$  – расстояние от центра сферы до произвольной точки наблюдения внутри ее.

Определить напряженность электрического поля и плотность объемного заряда в любой точке сферы (за исключением точки  $r = 0$ ).

Варианты заданий приведены в табл. 8.

Таблица 8

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$e^{br}/r$	$e^{br}/r^2$	$e^{br}/r^3$	$e^{br}$	$re^{br}$	$\ln r$	$r \ln r$	$r^2 \ln r$	$\ln r/r$	$\ln r/r^2$

В таблице  $b$  – постоянная величина;  $r$  – расстояние от центра сферы до произвольной точки внутри ее.

## Задача 5

В бесконечном прямом цилиндре радиусом  $a = 0,25$  м размещен объемный заряд плотностью

$$\rho = \rho_0 f(r),$$

где  $\rho_0$  – постоянная величина.

$f(r)$  – функция распределения заряда вдоль радиальной оси координат.

На оси цилиндра имеется линейный заряд  $\rho_{\text{лин}}$ , а на его поверхности – поверхностный заряд  $\rho_{\text{пов}}$ . Внутри цилиндра диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , а снаружи  $\epsilon_2$ .

Определить разность потенциалов между точками  $M$  и  $N$ . Точка  $M$  находится на расстоянии  $c$ , а точка  $N$  на расстоянии  $b$  от его оси.

Варианты заданий приведены в табл. 9.

Таблица 9

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rho_0 f(r)$ , Кл/л <sup>3</sup>	$6r$	$5r^2$	$4r^3$	$3r^4$	$2/r$	$6/r$	$5r^4$	$4r^3$	$3r^2$	$2r$
$\rho_{\text{пов}}$ , Кл/м	0,1	0	0,2	0	0,3	0	0,4	0	0,5	0
$\rho_{\text{лин}}$ , Кл/м	0	0,5	0	0,4	0	0,3	0	0,2	0	0,1
$b_2$ , м	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
$c$ , м	0,24	0,23	0,22	0,21	0,2	0,19	0,18	0,17	0,16	0,15
$\epsilon_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\epsilon_2$	10	9	8	7	1	2	3	4	5	6

Литература: [1], с. 24, 61 – 68;

[2], с. 27 – 35, 62 – 71.

Из этой задачи в контрольную работу выходит только один пункт из десяти, имеющихся здесь. Номер этого пункта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки студента.

0. Металлический шарик радиуса  $a = 0,05$  м, окруженный слоем диэлектрика радиуса  $\epsilon = 0,1$  м, находится в ограниченном пространстве с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1 = 1$ . Относительная диэлектрическая проницаемость окружающего слоя диэлектрика  $\epsilon_2 = 2,2$ .

Определить напряженность электрического поля на поверхности металлического шарика, если он имеет потенциал  $U = 50$  В.

1. Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,2$ , имеет радиус внутренней обкладки  $a = 0,05$  м, внешний –  $\epsilon = 0,2$  м.

Определить напряженность электрического поля на поверхности внутренней и внешней обкладок, если разность потенциалов между ними  $U = 100$  В.

2. Коаксиальный кабель заполнен двухслойным диэлектриком. Радиус центральной жилы кабеля  $a = 0,01$  м, внутренней поверхности экрана –  $\epsilon = 0,03$  м, граница раздела двух диэлектриков  $c = 0,02$  м. Диэлектрик, прилегающий к центральной жиле, имеет относительную проницаемость  $\epsilon_1 = 1,1$ , а диэлектрик, прилегающий к экрану, –  $\epsilon_2 = 2,2$ .

Определить напряженность электрического поля на поверхности центральной жилы и экрана, если разность потенциалов между ними равна  $U = 50$  В.

3. Сферический конденсатор заполнен двухслойным диэлектриком. Радиус внутренней обкладки  $a = 0,005$  м, радиус внутренней поверхности наружной обкладки  $\epsilon = 0,2$  м, радиус границы диэлектриков  $c = 0,015$  м. Относительная проницаемость диэлектрика, прилегающего к внутренней обкладке  $\epsilon_1 = 1,5$ , а к внешней –  $\epsilon_2 = 3$ .

Определить напряженность электрического поля на внутренней поверхности обкладок, если разность потенциалов между ними  $U = 100$  В.

4. Определить емкость сферического конденсатора, данные которого приведены в п. 3, и проводимость его изоляции, если удельная проводимость первого слоя  $\sigma_1 = 3,5 \cdot 10^{-3}$  См/м, а второго –  $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  См/м.

5. Определить емкость металлического шарика, окруженного слоем диэлектрика, данные которого приведены в п. 0.

6. Определить погонную емкость коаксиального кабеля (емкость отрезка кабеля длиной 1 м) с двухслойным диэлектриком, данные которого приведены в п. 2, и погонную проводимость (проводимость между экраном и центральной жилой отрезка кабеля длиной 1 м) его изоляции, если удельная проводимость первого слоя  $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  См/м, второго –  $\sigma_2 = 4 \cdot 10^{-4}$  См/м.

7. Два металлических шарика находятся в неограниченном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=2,5$  и удельной проводимостью  $\sigma=5 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$ . Расстояние между центрами шариков  $d=0,2$  м, радиус одного шарика  $a=0,01$  м, радиус второго -  $a=0,02$  м.

Рассчитать емкость и проводимость изоляции между этими шариками.

8. Определить емкость и проводимость изоляции между металлическим шариком радиуса  $a=0,02$  м и неограниченной металлической плоскостью, если центр шарика находится на высоте  $h=0,3$  м над этой плоскостью. Среда, в которой находится шарик, имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon=2,2$  и удельную проводимость  $\sigma=4 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$ .

9. Определить погонную емкость и проводимость изоляции линии передачи, образованной проводом радиуса  $a=0,01$  м, находящимся над неограниченной металлической плоскостью, если расстояние между осью провода и плоскостью  $h=0,15$  м, среда, окружающая провод, имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon=2$  и удельную проводимость  $\sigma=2 \cdot 10^{-3} \text{ См/м}$ .

Литература: [1], с. 39–45, 60–78, 103–105, 513;  
[2], с. 43–49, 63, 64, 67–81, 107–109.

#### Задача 7

1. В прямом бесконечном цилиндре радиуса  $a$  векторный потенциал стационарного магнитного поля

$$\vec{A} = \vec{e}_0 A_0 f(r),$$

где  $\vec{e}_0$  - единичный вектор в цилиндрической системе координат,

$A_0$  - постоянная величина,

$f(r)$  - функция распределения потенциала вдоль радиальной оси координат.

Определить распределение напряженности магнитного поля внутри и снаружи цилиндра. Варианты заданий приведены в табл. 10.

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$r$	$r^2$	$r^3$	$r^4$	$e^{-ra}$	$r$	$r^2$	$r^3$	$r^4$	$e^{-ra}$

2. В бесконечном прямом цилиндре радиуса  $a=0,1$  м течет ток проводимости: по оси цилиндра - линейный ток  $J$ , по поверхности - поверхностный ток плотности  $j_{\text{пов}}$ , и по всему поверхностному сечению - объемный ток плотности:

$$\vec{j} = \vec{e}_0 j_0 f(r),$$

где  $\vec{e}_0$  - единичный вектор в цилиндрической системе координат.

$j_0$  - постоянная величина,

$f(r)$  - функция распределения плотности тока вдоль радиальной оси координат.

Определить направленность магнитного поля внутри и снаружи цилиндра. При решении задачи током смещения пренебречь. Варианты заданий в табл. 11.

Таблица 11

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(r)$	$1/r$	1	$r$	$r^2$	$r^{-ra}$	$1/r$	1	$r$	$r^2$	$r^{-ra}$
$J, A$	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
$j_{\text{пов}}, A/1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
$j_0, A/1^2$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	3,5	3	2,5	2

Литература: [1], с. 84–95;  
[2], с. 88–94;

#### Задача 8

Из этой задачи в контрольную работу входит только один пункт из десяти, имеющихся в ней. Номер этого пункта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.

0. Два параллельных цилиндрических проводника радиуса  $a=0,001$  м находятся в неограниченной среде с относительной магнитной проницаемостью  $\mu=1$ . Расстояние между осями проводника  $d=0,05$  м. Определить погонную индуктивность этой двухпроводной линии.

1. Две параллельные металлические ленты шириной  $a=0,1$  м находятся на расстоянии  $b=0,01$  м друг от друга (рис. 2). Определить погонную индуктивность этой ленточной линии, если среда, в которой она находится, имеет относительную магнитную проницаемость  $\mu=2$ .

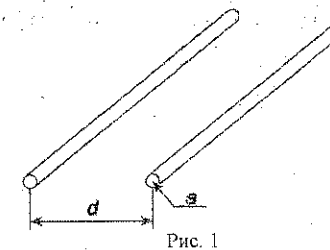


Рис. 1

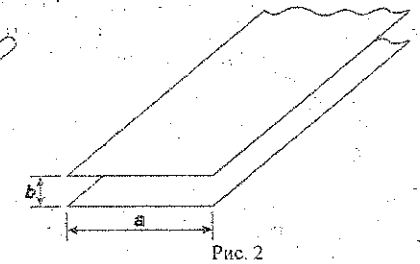


Рис. 2

2. Коаксиальный кабель с радиусом центрального проводника  $a=0,003$  м и радиусом экрана  $b=0,02$  м имеет двухслойное наполнение. Слой, прилегающий к центральному проводнику, имеет радиус  $c=0,01$  м и относительную магнитную проницаемость  $\mu=2$ . Второй слой, прилегающий к экрану, имеет  $\mu=1$ . Рассчитать погонную индуктивность кабеля.



3. Провод радиуса  $a = 0,005$  м расположен параллельно металлической неограниченной плоскости. Расстояние между осью провода и плоскостью  $h = 0,1$  м. Рассчитать погонную индуктивность этой линии, если среда, в которой она находится, имеет относительную магнитную проницаемость  $\mu = 1$ .

4. Квадратная рамка из тонкого проводника лежит в одной плоскости с прямым бесконечным тонким проводником. Сторона рамки, с размером  $a = 0,1$  м параллельна проводнику, находится на расстоянии  $d = 0,2$  м от его оси. Определить взаимную индуктивность системы, если окружающая среда имеет относительную магнитную проницаемость  $\mu = 2$ .

5. Рассчитать взаимную индуктивность системы, состоящей из двухпроводной линии (см. п. 0 данной задачи) и квадратной рамки со стороной  $b = 0,01$  м; лежащей в плоскости, в которой расположена двухпроводная линия; две противоположные стороны рамки параллельны сторонам линии, а ее центр делит расстояние между проводами пополам (рис. 3).

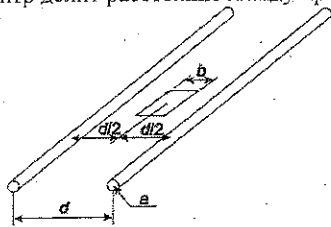


Рис. 3

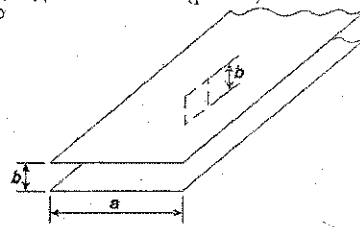


Рис. 4

6. Рассчитать взаимную индуктивность системы (см. п. 5 данной задачи) при условии, что центр рамки находится на расстоянии  $d$  от середины отрезка между проводами.

7. В ленточной линии (см. п. 1) расположена квадратная рамка со стороной  $b = 0,01$  м. Плоскость рамки перпендикулярна плоскости поперечного сечения линии и плоскости лент, образующих линию (см. рис. 4). Найти взаимную индуктивность системы.

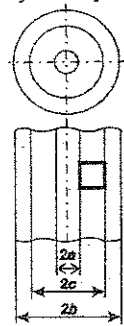


Рис. 5

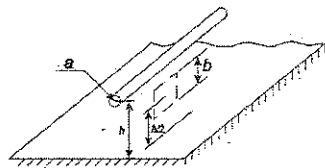


Рис. 6

8. В слое, прилетающем к центральному проводнику коаксиального кабеля (см. п. 2), располагается квадратная рамка со стороной, имеющей размер  $c = a$ . Плоскость рамки находится в диаметральной плоскости кабеля (рис. 5). Определить взаимную индуктивность системы.

9. В однородной линии передачи (см. п. 3) имеется квадратная рамка со стороной  $b = 0,05$  м. Плоскость рамки находится в плоскости, проходящей через ось провода, перпендикулярно металлической поверхности, входящей в состав этой линии. Две противоположные стороны рамки параллельны оси провода, а ее центр делит расстояние  $h$  пополам (рис. 6). Найти взаимную индуктивность системы.

Литература: [1], с. 84–95;

[2], с. 78, 79, 91–105.

### Задача 9

Из этой задачи в контрольную работу входят два пункта из десяти, имеющих в ней. Номера этих пунктов определяются по табл. вариантов 12.

Плоская однородная волна распространяется в неограниченной однородной среде с относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Направление распространения совпадает положительным направлением оси  $z$  декартовой системы координат. Амплитудное значение напряженности электрического поля в начале координат равно  $E_0$ , частота колебаний  $f$ .

Требуется определить:

1. Сдвиг по фазе между векторами электрического и магнитного полей.
2. Модуль и фазу волнового сопротивления среды.
3. Среднее значение плотности потока мощности в точке с координатой  $z$ .
4. Координату, которой соответствует среднее за период значение плотности потока мощности, в  $p$  раз меньше, чем в начале координат.
5. Фазовый коэффициент.
6. Фазовую скорость.
7. Длину волны.
8. Затухание волны в точке с координатой  $z$ , выраженное в децибелах.
9. Напряженность магнитного поля в точке с координатой  $z$ .
10. Затухание волны в точке с координатой  $z$ , выраженное в неперлах.

Таблица 12

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
№ пункта задачи	1,3	2,4	3,6	7,9	6,8	1,8	6,9	2,3	4,5	7,10
$z, \text{ м}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,4 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	0,1	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$
$A_0, \text{ В/м}$	$10^3$	$10^2$	10	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$f, \text{ МГц}$	$10^2$	$3 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$	$7 \cdot 10^2$	$10^3$	$3 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	$10^2$	$10^2$	10
Среда	Серебро	Медь	Алюминий	Олово	Свинец	Вода морская	Вода пресная	Стекло натриевое	Полистирол	Кварц плавленый
$\rho$	$10^6$	$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^2$	10	5	4	3	2

Литература: [1], с. 33, 36, 125 – 140;  
[2], с. 42, 123 – 124, 135 – 146.

## Контрольная работа 2

## Задача 10

Из этой задачи в контрольную работу входят 8 пунктов из 17, имеющих в ней. Номера этих пунктов определяются по табл. вариантов 13. Номера, отмеченные звездочкой, выполняются для круглого волновода, а без звездочки – для прямоугольного.

Мощность, передаваемая основной волной прямоугольного (круглого) волновода на частоте  $f = n f_{\text{кр}}$  ( $f_{\text{кр}}$  – критическая частота основного типа волны), равна  $P$ . В прямоугольном волноводе отношение размеров широкой и узкой стенок равно 2,3. Проводимость материала стенок волновода  $\sigma$ , а относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$ .

Требуется определить:

1. Частотные границы одноволнового режима работы (при котором распространяется только основной тип волны).
2. Наибольшее амплитудное значение поперечной и продольной составляющих вектора плотности поверхностного тока проводимости в стенках волновода.
3. Глубину проникновения поля в стенки волновода.
4. Фазовую скорость.
5. Групповую скорость.
6. Направление и максимальное значение поперечной составляющей вектора напряженности магнитного поля в центре поперечного сечения волновода.
7. Направление и максимальное значение поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля в центре поперечного сечения волновода.

8. Длину волны в волноводе.

9. Коэффициент затухания.

Рассчитать и построить для круглого волновода в абсолютных единицах при  $\alpha = 45^\circ$  графики зависимостей от переменной  $r$  для следующих компонент электромагнитного поля:

10.  $E_r$ ; 11.  $H_z$ ; 12.  $E_\alpha$ ; 13.  $H_r$ ; 14.  $H_\alpha$ .

Графики должны охватывать не менее 10 расчетных точек, начиная с  $r = 0$ . Обязательно привести в контрольной работе таблицу расчетов, содержащую результаты промежуточных арифметических действий.

1. Изобразить форму силовых линий электрического и магнитного полей основного типа волны в поперечном и продольном сечениях волновода. На этом же рисунке показать возможный вариант расположения устройства, обеспечивающего возбуждение данного типа волны. Из рисунка должно быть ясно, каким образом к возбuditелю подводится энергия.

Выполняется 7 пунктов задания в соответствии с табл. вариантов 13. Номера, отмеченные звездочкой, выполняются для круглого волновода, а без звездочки – для прямоугольного.

Таблица 13

№ вар.	0	1	2	3	4
№ вопросов задачи	1, 2*, 3, 4*	1*, 2, 5*, 7,	1, 2*, 5*, 7,	1*, 2, 3*, 4,	1, 2*, 5, 6*, 9,
	6, 10*, 15	9*, 11*, 15	9*, 11*, 15	7*, 13*, 15	13*, 15*
$f, \text{ ГГц}$	3	4	5	6	7
$n$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$P, \text{ Вт}$	30	40	50	60	70
$\sigma, \text{ См/м}$	$6,2 \cdot 10^7$	$5,7 \cdot 10^7$	$4,5 \cdot 10^7$	$3,6 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^7$
Тип возбуждающего устройства	Штырь	Петля	Щель	Штырь	Петля
№ вар.	5	6	7	8	9
№ вопросов задачи	1*, 2, 3*, 4,	1, 2*, 7, 8*,	1*, 2, 3*, 6,	1, 2*, 5, 7*, 9,	1*, 2, 6*, 8,
	6*, 10*, 15	9, 14*, 15*	8*, 11*, 15	12*, 15*	9*, 13*, 15
$f, \text{ ГГц}$	8	9	10	11	12
$n$	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3
$P, \text{ Вт}$	80	90	100	110	120
$\sigma, \text{ См/м}$	$6,2 \cdot 10^7$	$5,7 \cdot 10^7$	$4,5 \cdot 10^7$	$3,6 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^7$
Тип возбуждающего устройства	Щель	Штырь	Петля	Щель	Штырь

Литература: [1], с. 265 – 299, 359 – 360, 369;  
[2], с. 198 – 256.

## Задача 11

Полый цилиндрический резонатор имеет радиус  $a$  и длину  $L$ . Резонатор сделан из материала с относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  и удельной проводимостью  $\sigma$ .

Требуется найти:

1. Резонансную (собственную) частоту  $f_0$  заданного типа колебания.
2. Собственную добротность резонатора для этого типа колебания.
3. Ширину резонансной кривой  $\Delta f$  (на уровне 0,707 нагруженного резонатора с указанным колебанием при условии, что внешняя добротность резонатора в  $n$  раз меньше собственной). При этом нужно учесть, что связь между нагруженной добротностью резонатора и шириной резонансной кривой определяется соотношением

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Изобразить структуру электромагнитного поля.

Изобразить эскиз устройства связи для возбуждения заданного типа колебания и его расположение относительно силовых линий электромагнитного поля.

Тип колебания в резонаторе и параметры резонатора определяются из табл. 14.

Таблица 14

№ вар.	0	1	2	3	4
$a$ , м	0,07	0,06	0,07	0,11	0,1
$L$ , м	0,06	0,05	0,1	0,09	0,13
$\sigma$ , См/м	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$
$n$	2	2,5	3	3,5	4
Тип колебания	$E_{010}$	$H_{011}$	$H_{111}$	$H_{012}$	$H_{112}$
Тип устройства связи	Штырь	Петля	Щель	Штырь	Петля
№ вар.	5	6	7	8	9
$a$ , м	0,14	0,12	0,08	0,13	0,15
$L$ , м	0,11	0,13	0,1	0,14	0,17
$\sigma$ , См/м	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$	$0,2 \cdot 10^7$
$n$	4,5	5	5,5	6	6,5
Тип колебания	$H_{013}$	$E_{010}$	$H_{013}$	$H_{014}$	$H_{114}$
Тип устройства связи	Щель	Штырь	Петля	Щель	Щель

Литература: [1], с. 325 – 339, 359 – 360, 369;  
[2], с. 289 – 311.

### Задача 12

Электромагнитная волна частоты  $f$  падает на слой ионосферы, с концентрацией электронов  $N_e$  и находящийся на высоте  $h$ .

Требуется:

1. Определить минимальный угол падения, при котором амплитуда отраженной волны будет равна амплитуде падающей.
2. Проверить, возможно ли реализовать величину полученного угла с учетом сферичности Земли.

Указание. При решении данной задачи пренебречь потерями в ионосфере. Радиус земли  $R \approx 6370$  км.

Концентрация электронов, высота слоя и частота определяются по табл. вариантов 15.

Таблица 15

№ вар.	0	1	2	3	4
$N_e$ , Эл/см <sup>3</sup>	$5 \cdot 10^3$	$0,5 \cdot 10^4$	$10^4$	$0,2 \cdot 10^5$	$10^5$
$f$ , МГц	1	2	3	4	5
$h$ , км	60	80	90	100	110
№ вар.	5	6	7	8	9
$N_e$ , Эл/см <sup>3</sup>	$2 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$10^6$	$2 \cdot 10^6$
$f$ , МГц	6	7	8	9	10
$h$ , км	120	200	300	350	400

Литература: [1], с. 440 – 451;  
[2], с. 490 – 495.

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Прежде чем приступить к решению задач, включенных в контрольную работу, необходимо изучить соответствующие темы курса «Электродинамика и распространение радиоволн».

Теоретический материал, необходимый для решения каждой конкретной задачи, имеется в литературе, приведенной в конце условия задачи.

#### Указания к задаче 5

В данной задаче ключевым вопросом является нахождение вектора электрической индукции  $\vec{D}$ . Определив этот вектор, можно найти ответ на остальные вопросы.

Значение  $\vec{D}$  находится с помощью третьего уравнения Максвелла в интегральной форме – теоремы Гаусса. Пример использования этой теоремы приведен в указаниях к задаче 6.

#### Указания к задаче 6

В пп. 0,1,2,3 этой задачи задан или потенциал электрического поля, или разность потенциалов между двумя телами. Требуется определить напряженность поля около поверхности этих тел. Методику решения таких задач покажем на следующем примере.

Металлический шарик радиуса  $a$  находится в неограниченном пространстве с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Шарик имеет электрический заряд и его потенциал равен  $u$ . Силовые линии магнитного поля будут начинаться на его поверхности и уходить в бесконечность. На рис. 7 они изображены сплошными линиями. Поскольку плотность поверхностного заряда на шарике в любой точке одинакова, то силовое поле будет

иметь точечную симметрию. Известно, что эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям. Следовательно, в данном случае они будут иметь форму сфер (на рис. 7 они изображены пунктиром).

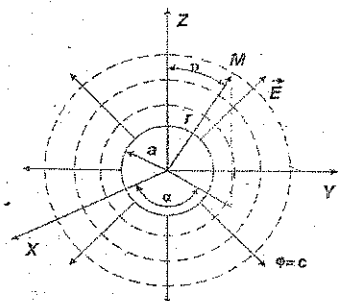


Рис. 7

Поскольку эквивалентные поверхности поля шарика имеют форму сфер и уравнение поверхности шарика имеет простой вид в сферической системе координат ( $r = a$ ), то уравнение Лапласа (1) в данном случае тоже нужно записать в этой системе:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Из рис. 7 видно, что при  $r = \text{const}$  точка  $M$  будет при изменении угла  $\alpha$  и  $\theta$  перемещаться по эквипотенциальной поверхности и производные  $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}$  и  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$  будут равны нулю. Уравнение Лапласа принимает простой вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0.$$

Решается это уравнение следующим образом. Левая часть уравнения является произведением  $\frac{1}{r^2}$  и производной по  $r$ . Поскольку  $\frac{1}{r^2}$  нулю не равняется, то

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0.$$

Производная от функции, заключенной в скобках, равна нулю, поэтому величина, стоящая в скобках, будет постоянной:

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = c_1.$$

Отсюда

$$d\phi = \frac{c_1}{r^2} dr.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим

$$\phi = -\frac{c_1}{r} + c_2.$$

В условии задачи дан потенциал шарика и отсутствует объемный заряд. Поэтому эту задачу проще решать с помощью уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

при условии, что на поверхности шарика ( $r=a$ )  $\phi=u$ , а в бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ )  $\phi=0$ . Решив уравнение (1), можно определить потенциал  $\phi$  во всем пространстве, а затем - напряженность поля:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi. \quad (2)$$

$$\phi = -\frac{c_1}{r} + c_2. \quad (3)$$

Значения постоянных интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  найдем из граничного условия и поведения потенциала на бесконечности. Используем сначала последнее условие. В данной задаче все заряды сосредоточены в конечной области пространства, поэтому потенциал бесконечности можно принять равным нулю:

$$\phi = 0 \quad r \rightarrow \infty.$$

Тогда из выражения (3) получаем  $c_2 = 0$ .

Граничное условие на поверхности шарика для потенциала имеет вид

$$\phi = u \quad r = a.$$

Используем это условие для определения  $c_1$  из выражения (3):

$$u = -c_1/a,$$

$$c_1 = -au.$$

Подставляем это значение  $c_1$  в (3) и получим окончательное выражение для потенциала при  $r \geq a$ :

$$\phi = au/r. \quad (4)$$

Теперь в этой части пространства с помощью формулы (2) найдем напряженность электрического поля  $\vec{E}$ . Поскольку выражение для потенциала записано в сферической системе координат, то и  $\text{grad } \phi$  нужно записать в этой же системе:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi = -\left( \vec{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\alpha}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right).$$

Подставим сюда выражение для  $\phi$  из (4) и, учитывая, что  $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$ ,

получим

$$\vec{E} = \vec{e}_r au/r^2$$

Значение напряженности поля на поверхности шарика получим, подставив в это выражение  $r = a$ .

Итак,

$$\vec{E} = \vec{e}_r u/a.$$

В условиях некоторых задач задан двухслойный диэлектрик. В этом случае уравнение Лапласа нужно решать отдельно для каждой среды, а затем использовать граничные условия не только на поверхности проводника, но и на границе диэлектриков. При этом, кроме граничного условия для потенциала, придется использовать граничное условие для вектора электрической индукции.

В п.п. 3 - 9 шестой задачи требуется рассчитать емкость и проводимость различных устройств. Рассмотрим методику решения таких задач на примере расчета погонной емкости и проводимости двухпроводной линии (рис. 1).

Радиус проводов этой линии  $a = 0,005$  м, расстояние между ними  $d = 0,1$  м. Линия находится в среде с относительной диэлектрической проницаемостью

$\epsilon = 2$  и удельной проводимостью  $\sigma = 10^{-3}$  См/м. Требуется определить погонную емкость и проводимость этой линии.

Рассмотрим следующий путь решения задачи. Предположим, что на проводах имеются заряды противоположного знака, и на одном метре длины провода величина заряда равна  $q_1$ . По известному заряду найдем напряженность электрического поля между проводниками, а затем разность потенциалов между ними  $u$ . После этого погонная емкость может быть определена по формуле

$$c_1 = q_1/u. \quad (5)$$

Величину электрической индуктивности  $\bar{D}$  можно найти из третьего уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_S \bar{D} d\bar{s} = Q, \quad (6)$$

а затем из уравнения среды

$$\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$$

найти вектор  $\bar{E}$ . Напомним, что  $\epsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость. Она связана с электрической постоянной  $\epsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9}$  Ф/м и относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  следующим образом:  $\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0$ .

Уравнение (6) имеет простое решение только в том случае, когда искомая функция  $\bar{D}$  на любом элементе  $d\bar{s}$ , выбранной поверхности интегрирования  $S$ , имеет одинаковый модуль и угол между  $\bar{D}$  и  $d\bar{s}$ , т.е.  $\bar{D}$  не является функцией  $d\bar{s}$ . В этом случае  $\bar{D}$  можно вынести за знак интеграла и решение получается простым.

Итак, решение уравнения (6) зависит от правильного выбора поверхности интегрирования  $S$ . Для того чтобы найти эту поверхность, нужно проанализировать структуру электрического поля заданной задачи.

На рис.8 изображена структура силовых линий двухпроводной линии в поперечном сечении. Из рисунка видно, что найти такую замкнутую поверхность, на которой величина  $\bar{D}$  не зависит от  $d\bar{s}$  и при этом имела бы простую геометрическую форму, нельзя. Для решения поставленной задачи придется воспользоваться принципом суперпозиции. Сначала определим поле  $\bar{D}$ , создаваемое одним цилиндром с положительным зарядом. Форма силовых линий этого цилиндра показана на рис.9. Из рисунка видно, что поле имеет осевую симметрию. В качестве поверхности интегрирования выберем цилиндр соосный с проводом длиной  $h$  и радиуса  $r^+$ . Тогда интеграл по замкнутой поверхности  $S$  в уравнении (6) разделится на три интеграла: один - по боковой поверхности цилиндра  $S_{бок}$ , и два интеграла - по основаниям цилиндра  $S_{осн}$ :

$$2 \int_{S_{осн}} \bar{D} d\bar{s} + \int_{S_{бок}} \bar{D} d\bar{s} = Q. \quad (7)$$

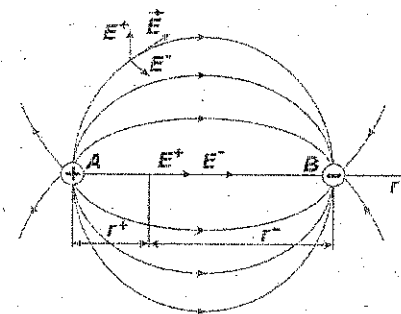


Рис. 8

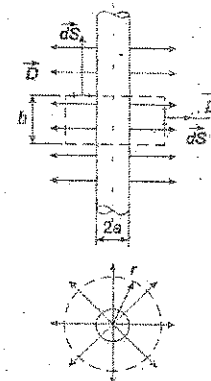


Рис. 9

Из рис. 9 видно, что на боковой поверхности вектор  $\bar{D} \parallel d\bar{s}$  и их скалярное произведение равно произведению модулей, а на основании  $\bar{D} \perp d\bar{s}$  и скалярное произведение равно нулю. Уравнение (7) принимает вид

$$\int_{S_{бок}} \bar{D} d\bar{s} = Q.$$

В любой точке боковой поверхности интегрирования модуль вектора  $\bar{D}$  имеет одинаковое значение (плотность силовых линий на  $S_{бок}$  постоянна). Поэтому величину  $D$  можно вынести за знак интеграла:

$$D \int_{S_{бок}} d\bar{s} = Q.$$

Отсюда

$$D 2\pi r^+ h = Q. \quad (8)$$

В правой части этого равенства  $Q$  - заряд, находящийся внутри выбранной поверхности интегрирования. Его можно определить по заданной линейной плотности заряда  $q$  и длине цилиндра  $h$ :  $Q = qh$ . Тогда из равенства (8) получим

$$D^+ = q/2\pi r^2 \quad \text{и} \quad E^- = q_1/2\pi \epsilon_a r^+. \quad (9)$$

В этом выражении индекс «+» у поля  $E$  напоминает о том, что это напряженность поля, создаваемая проводом с положительным зарядом в системе координат с переменной  $r^+$ .

Аналогично можно рассчитать поле провода с отрицательным зарядом

$$E^- = q_1/2\pi \epsilon_a r^-. \quad (10)$$

В другой системе координат с переменной  $r^-$ .

Согласно принципу суперпозиции, результирующее поле двухпроводной линии будет являться суммой полей двух отдельно взятых цилиндров с положительным и отрицательным зарядами. Это утверждение справедливо в

данном случае при условии  $d \gg a$ , так как при выполнении этого условия распределение заряда по поверхности цилиндров в двухпроводной линии будет мало отличаться от распределения зарядов по поверхности отдельно взятого цилиндра.

При желании получить вектор  $\vec{E}$  в произвольной точке М сложение полей нужно провести в векторной форме (см. рис. 8).

Для решения данной задачи делать этого не нужно. В самом деле, следующим шагом для определения емкости нужно найти разность потенциалов между цилиндрами (точками А и В на рис. 8).

Из теории электростатики известно, что разность потенциалов между двумя точками в электростатическом поле не зависит от пути интегрирования. Поэтому в качестве пути нужно выбрать наиболее простой — прямую АВ, на которой векторы  $E^+$  и  $E^-$  сонаправлены, и модуль результирующего поля будет равен сумме модулей этих векторов:

$$E = E^+ + E^- = q_1(1/r^+ + 1/r^-)/2\pi\epsilon_a.$$

В этом выражении переменные  $r^+$  и  $r^-$  принадлежат разным системам координат (радиус  $r^+$  начинается на оси с положительным зарядом, а  $r^-$  — с отрицательным).

Для дальнейших математических операций над полем  $E$  необходимо перейти к общей системе координат. Выберем начало этой системы на оси положительно заряженного цилиндра, и расстояние от этой оси обозначим буквой  $r$  (см. рис. 8). Тогда из рис. 8 видно, что

$$r^+ = r, \quad r^- = d - r.$$

В новой системе координат результирующее поле  $E$  на прямой АВ принимает вид

$$E = q_1 [1/r + 1/(d-r)] / 2\pi\epsilon_a.$$

Разность потенциалов между точками А и В может быть найдена по известной из электростатики формуле:

$$u = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

В данном случае элемент пути  $d\vec{l} = d\vec{r}$  и вектор  $\vec{E} \parallel d\vec{r}$ . Скалярное произведение векторов под знаком интеграла будет равно произведению модулей этих векторов:

$$u = - \int_{d-a}^a E dr = - \frac{q_1}{2\pi\epsilon_a} \int_{d-a}^a \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) dr = \frac{q_1}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Теперь, используя формулу (5), можем получить значение погонной емкости двухпроводной линии:

$$C_1 = \pi\epsilon_a / \ln[(d-a)/a].$$

Подставим в это выражение значение параметров линии из условия задачи:

$$C_1 = 2\pi/36\pi \cdot 10^{-9} \cdot \ln[(0,1 - 0,005)/0,005] = 0,189 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м.}$$

Расчет погонной проводимости линии  $G_1$  может быть сделан с помощью метода электростатической аналогии. Суть его в том, что электрическое поле постоянного тока аналогично полю электростатическому. Поэтому для получения расчетной формулы проводимости между двумя металлическими телами, находящимися в среде с некоторой удельной проводимостью  $\sigma$ , нужно в формуле для емкости между этими телами, находящимися в диэлектрике с абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a$ , заменить  $\epsilon_a$  на  $\sigma$ , и тогда значение  $C$  будет соответствовать проводимости  $G$ .

В данной задаче для получения погонной проводимости двухпроводной линии в выражении (11)  $\epsilon_a$  заменяем на  $\sigma$ , а  $C_1$  на  $G_1$ . После этого получим

$$G_1 = \pi\sigma / \ln[(d-a)/a].$$

Подставим в это выражение значение параметров линии:

$$G_1 = \pi \cdot 10^{-3} / \ln[(0,1 - 0,005)/0,005] = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ См/м.}$$

Указание к задаче 7

В этой задаче по заданному магнитному векторному потенциалу  $A$  внутри цилиндра радиуса  $a$  требуется определить напряженность магнитного поля во всем пространстве.

Сначала по формуле  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  ([1], стр. 88) находится вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  внутри цилиндра, а затем из уравнения среды

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \text{ - вектор } \vec{H}.$$

Для определения напряженности магнитного поля снаружи цилиндра нужно из уравнения Пуассона  $\nabla^2 A = -\mu_0 \vec{j}$  ([1] стр. 88) найти плотность объемного тока внутри цилиндра  $\vec{j}$ , а затем, используя первое уравнение Максвелла в интегральной форме, - вектор  $\vec{H}$  снаружи его.

Эту задачу можно решить другим путем. Сначала с помощью уравнения Пуассона найти ток внутри цилиндра, а затем, используя первое уравнение Максвелла, - напряженность магнитного поля во всем пространстве.

Указания к задаче 8

В пунктах 0-3 этой задачи требуется определить погонную индуктивность линии передачи. Рассмотрим методику решения таких задач на примере расчета погонной индуктивности коаксиального кабеля.

Радиус центрального провода кабеля  $a=0,001$  м, внутренний радиус экрана  $b=0,004$  м (рис. 10). Кабель заполнен средой с относительной магнитной проницаемостью  $\mu=1$ . Требуется определить погонную индуктивность кабеля  $L_1$ .

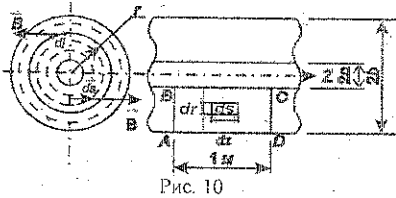


Рис. 10

Предлагается следующий путь решения этой задачи. Задаться величиной тока проводимости, протекающего по кабелю  $J$ , рассчитать вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , определить магнитный поток  $\Phi$  по формуле

$$\Phi = \int_S \vec{B} \, d\vec{s}, \quad (12)$$

создаваемый током в отрезке кабеля длиной  $1\text{ м}$ , а затем найти погонную индуктивность:

$$L_1 = \Phi/J. \quad (13)$$

Расчет напряженности магнитного поля по заданной величине тока можно произвести с помощью первого уравнения Максвелла в интегральной форме. Поскольку ток проводимости протекает в проводнике, то влиянием "тока смещения" на образование магнитного поля можно пренебречь, и уравнение Максвелла принимает следующий вид:

$$\oint \vec{H} \, d\vec{l} = J.$$

Неизвестная функция координат  $\vec{H}$  находится под знаком интеграла. Это уравнение может быть легко решено только в том случае, если можно будет найти такой контур интегрирования, при котором на любом элементе  $d\vec{l}$  модуль вектора  $\vec{H}$  будет одинаков, а вектор  $\vec{H}$  с вектором  $d\vec{l}$  - составлять один и тот же угол.

Для выбора контура интегрирования необходимо сначала проанализировать структуру магнитного поля задачи. В данном случае силовые линии поля  $\vec{H}$  (и поля  $\vec{B}$ ) будут концентрическими окружностями (на рис. 10 изображены пунктиром). В качестве контура интегрирования выберем окружность радиусом  $r$ . На этом контуре в любой точке вектор  $\vec{B}$   $\perp d\vec{l}$ , а модуль его один и тот же. Поскольку  $\vec{H} \perp \vec{B}$  (так как  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ), то скалярное произведение под интегралом  $\vec{H} d\vec{l} = H dl$ . Модуль вектора  $\vec{H}$  одинаков на любом элементе  $d\vec{l}$ , поэтому его можно вынести за знак интеграла:

$$H \oint d\vec{l} = J.$$

Отсюда

$$H 2\pi r = J.$$

В правой части равенства  $J$  — ток, протекающий через поверхность, опирающуюся на контур  $l$ . В данном случае это будет ток, который течет по центральной жиле.

Подставив это значение тока в последнее равенство, получим  $H = J/2\pi r$  и

$$B = \mu_0 J/2\pi r. \quad (14)$$

Теперь нужно найти магнитный поток, создаваемый током  $J$  в отрезке коаксиального кабеля длиной  $1\text{ м}$ . Поверхность, которую будет пронизывать этот поток в одном направлении, показана на рис. 10 (прямоугольник  $ABCD$ ). На этой поверхности  $d\vec{s} \perp \vec{B}$ , поэтому скалярное произведение  $\vec{B} \, d\vec{s} = B \, ds$  и магнитный поток

$$\Phi = \int_S B \, ds.$$

Элемент площадки в цилиндрической системе координат  $ds = dr dz$ . Значение  $B$  определяется формулой (14) и величина магнитного потока

$$\Phi = \int_0^l \int_a^b (\mu_0 J/2\pi \cdot r) dr dz = (\mu_0 J/2\pi) \ln(b/a).$$

Погонная индуктивность коаксиального кабеля может быть найдена с помощью равенства (13).

$$L_1 = (\mu_0/2\pi) \ln(b/a)$$

Подставим сюда параметры коаксиального кабеля, заданные в условии задачи. При этом учтем, что  $\mu_a = \mu_0 \mu$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ .

$$L_1 = (4\pi \cdot 10^{-7}/2\pi) \ln(0,04/0,01) = 0,227 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}.$$

При решении задач, изложенных в п.п. 0,1; нужно воспользоваться принципом суперпозиции, а в задаче п. 3. кроме того, еще и методом «зеркальных изображений». Методика решения задач с использованием принципа суперпозиции изложена в указаниях к задаче 6.

В задачах п.п. 4-9 требуется рассчитать взаимную индуктивность системы. Эти задачи решаются аналогично задачам по определению индуктивности. Разница состоит в том, что вычисляется не весь поток, создаваемый заданным током, а только его часть ( $\Phi$ ), пересекающая поверхность, ограниченную элементом, коэффициент взаимной индукции которого нужно определить. (В данных задачах это квадратная рамка). Затем по формуле  $M = \Phi/J$  определяется коэффициент взаимной индукции. В этой формуле  $J$  — ток, создающий магнитное поле в системе.