

4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Балка это брус (элемент конструкции) с прямолинейной осью, работающий на изгиб. Плоский изгиб возникает в том случае, когда действующие внешние нагрузки (сосредоточенные силы P , моменты M , распределенные по длине балки нагрузки q) располагаются в одной главной центральной плоскости инерции. Плоский изгиб испытывают, например, железнодорожные, трамвайные и подкрановые рельсы, элементы машиностроительных, строительных и многих других конструкций.

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

В поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Положительные направления Q_y и M_x для левой и правой частей балки показаны на рис. 4.1. Для определения Q_y и M_x используют метод сечений: балку на рассматриваемом участке мысленно рассекают на левую и правую части; действие отброшенной части на оставшуюся заменяют положительными по направлению Q_y и M_x (рис. 4.1); затем составляют уравнения равновесия ($\sum Y = 0$, $\sum M_C = 0$) для рассматриваемой части балки и определяют законы изменения поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x на участке. Задаваясь абсциссами для ряда сечений балки, вычисляют значения Q_y и M_x и строят эпюры. В некоторых случаях нагружения балки поперечная сила в сечении равна нулю. Такой изгиб называется чистым. Если в сечении балки возникает поперечная сила, то это поперечный изгиб.

При изгибе балки одни слои растягиваются, а другие – сжимаются. Поскольку деформации слоев изменяются по высоте сечения балки непрерывно, то существует слой, линейные деформации и, следовательно, нормальные напряжения в котором равны нулю. Такой слой называется нейтральным. Пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки образует нейтральную линию.

При поперечном изгибе в сечении балки возникают нормальные и касательные напряжения, определяемые по формулам

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad \tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{J_x b_y}, \quad (4.1)$$

где Q_y , M_x – поперечная сила и изгибающий момент в сечении; J_x – осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси x ; b_y , y –

ширина и ордината слоя, в котором определяются напряжения; $S_x^{\text{отс}}$ – статический момент относительно оси x части площади сечения, отсекаемой рассматриваемым слоем.

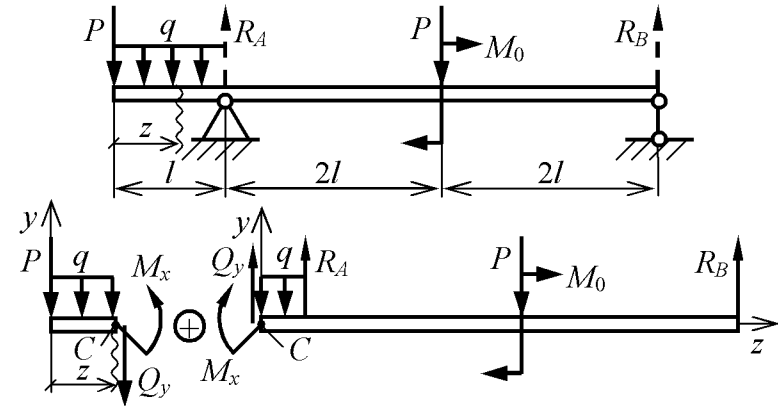


Рис. 4.1. К определению внутренних силовых факторов в сечении балки

Материал балки при изгибе работает в условиях плоского напряженного состояния. Величины и направления главных напряжений в произвольном сечении балки вычисляются по формулам

$$\sigma_{1/3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}. \quad (4.2)$$

С учетом формулы (4.2) эквивалентные напряжения можно представить для балки из пластичного материала: по третьей и четвертой теориям прочности

$$\sigma_{\text{экв3}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{\text{экв4}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (4.3)$$

для балки из хрупкого материала – по второй и пятой теориям

$$\sigma_{\text{экв2}} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{\text{экв5}} = \frac{1-\kappa}{2} \sigma + \frac{1+\kappa}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (4.4)$$

где μ – коэффициент поперечной деформации; $\kappa = \sigma_{\text{вр}} / \sigma_{\text{вс}}$ – коэффициент неравнопрочности хрупкого материала при растяжении и сжатии; $\sigma_{\text{вр}}$, $\sigma_{\text{вс}}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии хрупкого материала. Наибольшие нормальные напряжения в рассматриваемом сечении балки возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (4.5)$$

где W_x – осевой момент сопротивления сечения балки. Наибольшие касательные напряжения в рассматриваемом сечении балки вычисляются по формуле Д.И. Журавского

$$\tau_{\max} = \left| \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b_y} \right|_{\max} . \quad (4.6)$$

Под действием внешних нагрузок балка прогибается, а ее поперечные сечения поворачиваются. Прогиб $y = f(z)$ и угол поворота $\Theta = dy/dz = f'(z)$ являются функциями абсциссы z (рис. 4.1). Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$EJ_x y'' = M_x . \quad (4.7)$$

Интегрируя (4.7), получаем уравнение углов поворота сечений

$$EJ_x \Theta_z = EJ_x y' = \int_z M_x dz + C , \quad (4.8)$$

а интегрируя повторно находим уравнение прогибов

$$EJ_x y_z = \int_z dz \int_z M_x dz + Cz + D . \quad (4.9)$$

Постоянные интегрирования C и D определяются из граничных условий (условий закрепления балки). Покажем физический смысл постоянных C и D . При $z = 0$ (начало координат) из (4.8) следует $C = EJ_x \Theta_0$, а из (4.9) получаем $D = EJ_x y_0$. Другими словами, постоянные C и D представляют собой величины, пропорциональные углу поворота сечения Θ_0 и прогибу y_0 в начале координат.

Если балка имеет n участков, то при определении углов поворота и прогибов приходится составлять n дифференциальных уравнений типа (4.7) и вычислять $2n$ постоянных C_i и D_i ($i = 1, \dots, n$), что громоздко. Равенства постоянных интегрирования на участках балки ($C_1 = C_2 = \dots C_n = C = EJ_x \Theta_0$; $D_1 = D_2 = \dots D_n = D = EJ_x y_0$) можно добиться при определенных правилах составления и интегрирования дифференциальных уравнений типа (4.7) (рис. 4.2):

1. Начало координат располагается в крайнем левом сечении балки. При этом в дальнейшем рассматривается левая часть балки.
2. Выражения для M_x , Θ_z и y_z предшествующих участков должны полностью сохраняться и для последующих участков. Если распределенная нагрузка q_k обрывается (рис. 4.2), то ее необходимо продлить до конца балки и добавить такую же нагрузку q_{k+1} , но противоположную по направлению.
3. Выражения для M_x , Θ_z и y_z должны содержать множители $(z - a_i)$, $(z - b_j)$ и $(z - c_k)$, где a_i , b_j , c_k – расстояние от начала координат до соответствующих нагрузок M_i , P_j , q_k . При этом сосредоточенный момент M_i в выражении для M_x умножается на $(z - a_i)^0$.

4. Интегрирование составленного таким образом дифференциального уравнения изогнутой оси балки ведется без раскрытия скобок в множителях на $(z - a_i)^0$, $(z - b_j)^1$ и $(z - c_k)^2$.

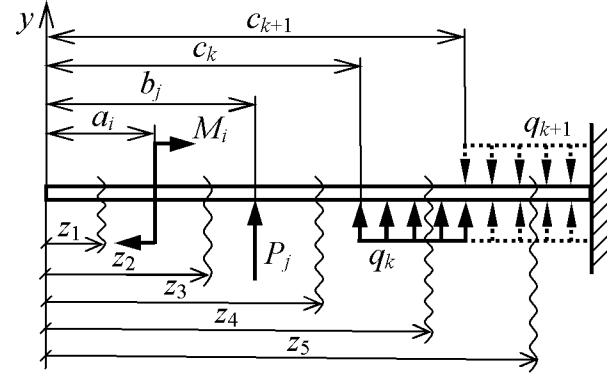


Рис. 4.2. К методике уравнивания постоянных интегрирования

В результате интегрирования получаем универсальные уравнения для углов поворота сечений и прогибов балки (рис. 4.2)

$$\Theta_z = \Theta_0 \pm \sum \frac{M_i (z - a_i)^1}{1! EJ_x} \pm \sum \frac{P_j (z - b_j)^2}{2! EJ_x} \pm \sum \frac{q_k (z - c_k)^3}{3! EJ_x}; \quad (4.10)$$

$$y_z = y_0 + \Theta_0 z \pm \sum \frac{M_i (z - a_i)^2}{2! EJ_x} \pm \sum \frac{P_j (z - b_j)^3}{3! EJ_x} \pm \sum \frac{q_k (z - c_k)^4}{4! EJ_x}. \quad (4.11)$$

Постоянные Θ_0 и y_0 , представляющие собой угол поворота сечения и прогиб в начале координат, вычисляются из условий закрепления балки. Показанные на рис. 4.2 направления внешних нагрузок соответствуют положительным знакам слагаемых в выражениях (4.10), (4.11) и наоборот. Слагаемые для Θ_z и y_z в формулах (4.10) и (4.11) записываются по мере расположения от начала координат соответствующих нагрузок.

Анализируя с учетом (4.7) – (4.9) уравнения равновесия $\sum Y = 0$, $\sum M_C = 0$ для элемента dz балки (рис. 4.3), можно установить следующие дифференциальные зависимости между q_y , Q_y , M_x , Θ_z и y_z :

$$\frac{dQ_y}{dz} = |\pm q_y|; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y; \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = |\pm q_y|;$$

$$\frac{d\Theta_z}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad \frac{d^2\Theta_z}{dz^2} = \frac{Q_y}{EJ_x}; \quad \frac{d^3\Theta_z}{dz^3} = \frac{|\pm q_y|}{EJ_x}; \quad (4.12)$$

$$\frac{dy}{dz} = \Theta_z; \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{Q_y}{EJ_x}; \quad \frac{d^4y}{dz^4} = \frac{|\pm q_y|}{EJ_x}.$$

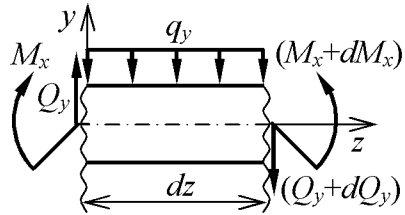


Рис. 4.3. К определению дифференциальных зависимостей между q_y , Q_y , M_x , Θ_z и y_z

С учетом указанных дифференциальных зависимостей можно сформулировать следующие правила контроля эпюр Q_y , M_x , Θ_z и y_z :

- если в сечении балки приложена сосредоточенная сила P или сосредоточенный момент M , то соответственно на эпюрах Q_y и M_x должны быть соответствующие скачки, а на эпюрах M_x и Θ_z — изломы;

- в сечениях, где $q_y = 0$, $Q_y = 0$, $M_x = 0$ и $\Theta_z = 0$, на эпюрах соответственно Q_y , M_x , Θ_z и y_z наблюдаются экстремумы (максимумы или минимумы);
- если эпюры Q_y , M_x , Θ_z больше нуля, то соответственно эпюры M_x , Θ_z , y_z в правой системе координат возрастают и наоборот;
- кривизна эпюр определяется знаками вторых производных: если Q_y или M_x меньше нуля, то соответственно эпюры Θ_z или y_z будут выпуклыми кривыми и наоборот.

Для обеспечения надежной работы балки необходимо выполнение трех условий прочности. Основным является, как правило, условие прочности по нормальным напряжениям

$$\max \sigma_{\max} = \left| \frac{M_{x\max}}{W_x} \right| \leq [\sigma], \quad (4.13)$$

которое записывается для опасного сечения, где действует $M_{x\max}$, и для наиболее удаленных от нейтральной линии точек.

В некоторых случаях (для балок из прокатных профилей, сравнительно коротких балок) определяющим может быть условие прочности по касательным напряжениям

$$\max \tau_{\max} = \left| \frac{Q_{y\max}}{J_x} \frac{S_x^{\text{отс}}}{b_y} \right|_{\max} \leq [\tau], \quad (4.14)$$

которое используется для предполагаемого опасного сечения, где действует $Q_{y\max}$, и для точек, где отношение $S_x^{\text{отс}}/b_y$ достигает максимума. В ча-

стности, для симметричных сечений $(S_x^{\text{отс}}/b_y)_{\text{max}}$ наблюдается на нейтральной линии, а для треугольного сечения – в слое, расположенном на половине высоты.

В ряде случаев (балки из прокатных или тонкостенных профилей и др.) необходима проверка прочности балок по эквивалентным напряжениям

$$\max \sigma_{\text{экви}} = \dots \leq [\sigma], \quad (4.15)$$

где $\max \sigma_{\text{экви}}$ – максимальные эквивалентные напряжения, определяемые по рекомендуемой теории прочности. Для балок из пластичных материалов рекомендуются третья и четвертая теории прочности

$$\max \sigma_{\text{экви3}} = \sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 4\tau_{\text{оп}}^2}, \quad \max \sigma_{\text{экви4}} = \sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 3\tau_{\text{оп}}^2}, \quad (4.16)$$

а для балок из хрупких материалов используются вторая и пятая теории

$$\begin{aligned} \max \sigma_{\text{экви2}} &= \frac{1-\mu}{2} \sigma_{\text{оп}} + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 4\tau_{\text{оп}}^2}, \\ \max \sigma_{\text{экви5}} &= \frac{1-\kappa}{2} \sigma_{\text{оп}} + \frac{1+\kappa}{2} \sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 4\tau_{\text{оп}}^2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\sigma_{\text{оп}}$, $\tau_{\text{оп}}$ – нормальные и касательные напряжения в опасных точках опасного сечения, где действуют достаточно большие значения $M_{\text{хоп}}$ и $Q_{\text{уоп}}$. Если опасное сечение однозначно определить невозможно, то намечают несколько предполагаемых опасных сечений и по результатам прочностных расчетов делают окончательный выбор.

Допускаемые нормальные напряжения вычисляются следующим образом: для пластичных материалов $[\sigma] = \sigma_{\text{T}}/n_{\text{T}}$; хрупких – $[\sigma] = \sigma_{\text{вр}}/n_{\text{в}}$ или $[\sigma] = \sigma_{\text{вр}}/\gamma_0$, где γ_0 – коэффициент надежности. Допускаемые касательные напряжения находятся аналогично: $[\tau] = \tau_{\text{T}}/n_{\text{T}}$; $[\tau] = \tau_{\text{в}}/n_{\text{в}}$ или $[\tau] = \tau_{\text{в}}/\gamma_0$. Если пределы текучести и прочности при кручении пластичного и хрупкого материалов неизвестны, то можно использовать приближенные зависимости: $\tau_{\text{T}} = (0,5 \dots 0,6)\sigma_{\text{T}}$; $\tau_{\text{в}} = (0,7 \dots 0,8)\sigma_{\text{вр}}$.

В ряде случаев балки должны быть не только прочными, но достаточно жесткими. Для этого должно выполняться условие жесткости

$$y_{\text{max}} = \left| k_y \frac{Pl^3}{EJ_x} \right|_{\text{max}} \leq [y], \quad (4.18)$$

где k_y – коэффициент, определяемый из эпюры прогибов; l – длина участка (балки); $[y]$ – допускаемый прогиб, зависящий от требований к жесткости балки. В ряде случаев рекомендуется $[y] = (0,001 \div 0,002)L$, где L – длина балки. При проверке выполнения условий прочности и жесткости максимальные рабочие напряжения или прогибы могут быть существенно мень-

ше соответствующих допускаемых величин, но не должны превышать более чем на 5 % допускаемых значений $[\sigma]$, $[\tau]$ и $[\nu]$.

При расчетах на прочность и жесткость характерны три постановки задач. Первая: известны внешние нагрузки, продольные размеры и форма сечения балки, материал ($[\sigma]$, $[\tau]$). В этом случае из условий прочности и жесткости определяются допускаемые размеры сечения балки и окончательно принимаются большие значения. Вторая: известны поперечные и продольные размеры балки, материал ($[\sigma]$, $[\tau]$). При таком варианте из условий прочности и жесткости вычисляются допускаемые нагрузки и окончательно принимаются их меньшие значения. Третья: из конструкторских и технологических разработок известны внешние нагрузки, поперечные и продольные размеры балки, материал ($[\sigma]$, $[\tau]$). При такой постановке задачи проверяется выполнение условий прочности и жесткости, а затем дается заключение о работоспособности балки.

4.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ»

Задано: схема нагружения и материал (σ_t ; $E=2 \cdot 10^5$ МПа) балки, коэффициент запаса прочности, величины внешних нагрузок, допускаемый прогиб балки $[\nu]=0,002L$, где L – длина балки. Исходные данные для расчетов взять из таблиц 4.1 и 4.2 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ).

Требуется для балки выполнить следующее.

1. Построить эпюры поперечных сил (в долях P), изгибающих моментов (в долях Pl), углов поворота (в долях Pl^2/EJ_x) и прогибов (в долях Pl^3/EJ_x).
2. Определить из условий прочности номера двутаврового, швеллерного и других распространенных сечений балок, выбрать наиболее экономичное.
3. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости балки.

Таблица 4.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ	2-я ЦНВ		3-я ЦНВ		4-я ЦНВ	
	№ схемы	Материал; σ_T	$P, q l$	n_T	$q, \text{кН/м}$	$M_0, q l^2$	$l, \text{м}$
1	1	сталь 20; 270 МПа	1	5,0	3	5,5	1,0
2	2	сталь 18кп; 235 МПа	2	4,6	6	5,0	1,1
3	3	сталь 30; 380 МПа	3	4,3	9	4,5	1,2
4	4	сталь ВСт3; 275 МПа	4	4,0	12	4,0	1,3
5	5	сталь 40; 500 МПа	5	3,6	15	3,5	1,4
6	6	сталь 09Г2С; 370 МПа	6	3,3	18	3,0	1,5
7	7	сталь 45; 600 МПа	7	3,0	21	2,5	1,6
8	8	сталь 15Г2; 440 МПа	8	2,6	24	2,0	1,7
9	9	сталь 50; 650 МПа	9	2,3	27	1,5	1,8
0	10	сталь 12Г2С; 590 МПа	10	2,0	30	1,0	2,0

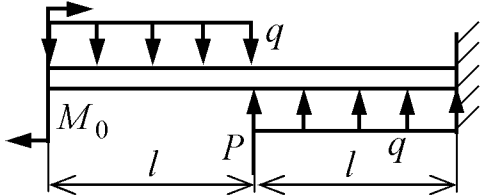
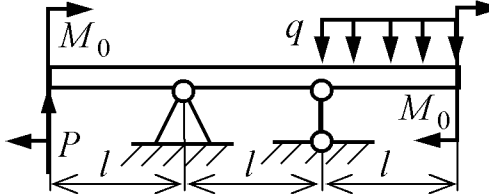
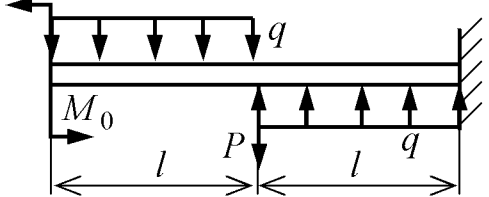
Таблица 4.2. Схемы нагружения балки

№ сх.	Схема нагружения балки
1	
2	

Таблица 4.2 (продолжение). Схемы нагружения балки

№ сх.	Схема нагружения балки
3	
4	
5	
6	
7	

Таблица 4.2 (окончание). Схемы нагружения балки

№ сх.	Схема нагружения балки
8	
9	
10	

4.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ»

Задано с учетом цифр номера варианта: схема нагружения балки (рис. 4.4); материал (сталь 45: $\sigma_T = 600$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа), коэффициент запаса прочности $n_T = 2$; величины внешних нагрузок: $q = 30$ кН/м, $P = 4ql$, $M_0 = 2ql^2$; длина $l = 1$ м; допускаемый прогиб $[y] = 0,002L = 0,002 \cdot 5 \text{ м} = 0,01 \text{ м}$.

Требуется выполнить следующее.

1. Построить эпюры поперечных сил (в долях P), изгибающих моментов (в долях Pl), углов поворота (в долях Pl^2/EJ_x) и прогибов (в долях Pl^3/EJ_x).
2. Определить из условий прочности номера двутаврового, швеллерного и других распространенных сечений балок, выбрать наиболее экономичное.
3. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости балки.

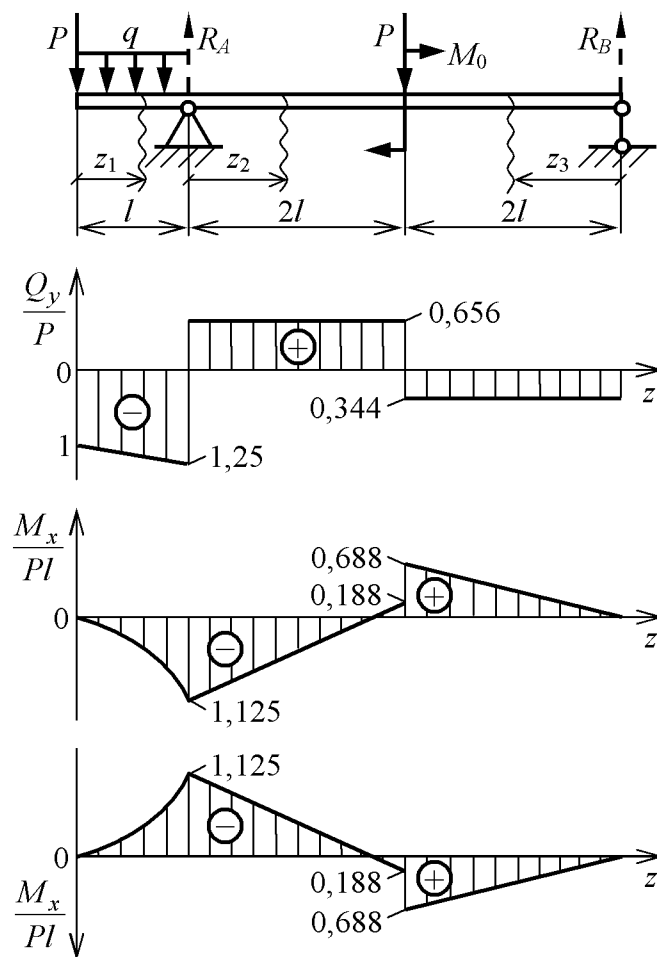


Рис. 4.4. Расчетная схема балки, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

РЕШЕНИЕ

1. Вычерчиваем индивидуальную расчетную схему балки (рис. 4.4) в соответствии с исходными данными, определяемыми по цифрам номера варианта.
2. Вычисляем опорные реакции (рис.4.4)

$$\sum M_A = Pl + ql \cdot 0,5l - P \cdot 2l - M_0 + R_B \cdot 4l = 0, \quad R_B = 0,344P;$$

$$\sum M_B = P \cdot 5l + ql \cdot 4,5l - R_A \cdot 4l - M_0 + P \cdot 2l = 0, \quad R_A = 1,906P.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = -P - ql + 1,906P - P + 0,344P \equiv 0.$$

3. Выбираем абсциссы z_1, z_2, z_3 на участках и методом сечений определяем законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов.

$$\text{Первый участок: } \sum Y = -P - qz_1 - Q_{y1} = 0, \quad Q_{y1} = -P - qz_1;$$

$$\sum M_{C1} = Pz_1 + qz_1 \cdot 0,5z_1 + M_{x1} = 0, \quad M_{x1} = -Pz_1 - 0,5qz_1^2 - \text{выпуклая квадратная парабола.}$$

При $z_1 = 0 \quad Q_{y1} = -P, \quad M_{x1} = 0;$
 при $z_1 = 0,5l \quad Q_{y1} = -1,125P, \quad M_{x1} = -0,531Pl;$
 при $z_1 = l \quad Q_{y1} = -1,25P, \quad M_{x1} = -1,125Pl.$

$$\text{Второй участок: } \sum Y = -P - ql + 1,906P - Q_{y2} = 0, \quad Q_{y2} = 0,656P;$$

$$\sum M_{C2} = P(l + z_2) + ql(0,5l + z_2) - 1,906Pz_2 + M_{x2} = 0,$$

$$M_{x2} = -1,125Pl + 0,656Pz_2.$$

При $z_2 = 0 \quad M_{x2} = -1,125Pl;$
 при $z_2 = 2l \quad M_{x2} = 0,188Pl.$

Третий участок:

$$\sum Y = Q_{y3} + R_B = 0, \quad Q_{y3} = -0,344P;$$

$$\sum M_{C3} = -M_{x3} + 0,344Pz_3 = 0,$$

$$M_{x3} = 0,344Pz_3.$$

При $z_3 = 0 \quad M_{x3} = 0;$ при $z_3 = 2l \quad M_{x3} = 0,688Pl.$

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_x (рис. 4.4). В литературе строительного профиля ось M_x направляется вниз (рис. 4.4).

4. Вычисляем допускаемые нормальное и касательное напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{600}{2} = 300 \text{ МПа}, \quad [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T} = \frac{0,5\sigma_T}{n_T} = \frac{0,5 \cdot 600}{2} = 150 \text{ МПа}.$$

5. Наибольшие нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных точках опасного сечения на левой опоре, где $M_{x\max} = |-1,125Pl|$. Из условия прочности по нормальным напряжениям

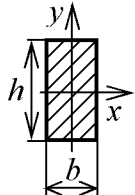
$$\max \sigma_{\max} = \frac{|M_{x\max}|}{W_x} = \frac{|-1,125Pl|}{W_x} \leq [\sigma]$$

находим расчетный осевой момент сопротивления сечения балки

$$W_x = \frac{1,125Pl}{[\sigma]} = \frac{1,125 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1}{300 \cdot 10^6} = 450 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 450 \text{ см}^3.$$

6. Определяем размеры наиболее распространенных сечений балок.

6.1. Прямоугольник: задаемся для определенности $h = 2b$;

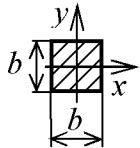


$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 450 \text{ см}^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 450}{2}} = 8,80 \text{ см};$$

$$h = 2 \cdot 8,80 = 17,6 \text{ см}; F_1 = 155 \text{ см}^2.$$

6.2. Квадрат:

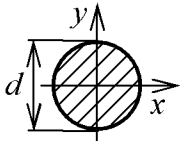


$$W_x = \frac{b^3}{6} = 450 \text{ см}^3;$$

$$b = \sqrt[3]{6 \cdot W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 450} = 13,9 \text{ см};$$

$$F_2 = 193 \text{ см}^2.$$

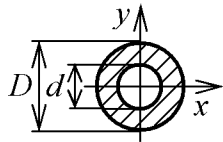
6.3. Круг:



$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 450 \text{ см}^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 450}{3,14}} = 16,6 \text{ см}; F_3 = 216 \text{ см}^2.$$

6.4. Кольцо:

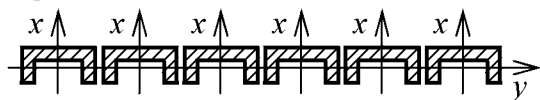


задаемся для определенности $D = 2d$;

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,5; W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = 450 \text{ см}^3;$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi(1 - \alpha^4)}} = 17,0 \text{ см}; d = 8,5 \text{ см}; F_4 = 170 \text{ см}^2.$$

6.5. Швеллер: выбираем, например, профиль № 40; по табл. П.4 для швеллера № 40 находим



$$W_y = 73,4 \text{ см}^3;$$

$$F_{ш} = 61,5 \text{ см}^2.$$

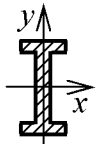
Следовательно, необходимое число швеллеров № 40 $n_{ш} = 450/73,4 \approx 6$;

$$F_5 = 6 \cdot 61,5 = 369 \text{ см}^2.$$

6.6. Двутавр: по табл. П.5 находим наиболее подходящий двутавр № 30,

имеющий следующие геометрические характеристики

$$W_{xt} = 472 \text{ см}^3; F_6 = 46,5 \text{ см}^2.$$



7. Оцениваем материалоемкость балок с подобранными сечениями, принимая площадь наименьшего (двутаврового) сечения за 100 %:

$$(F_1/F_6):(F_2/F_6):(F_3/F_6):(F_4/F_6):(F_5/F_6):(F_6/F_6)= \\ =333:415:465:366:794:100(\%).$$

Дальнейшие расчеты выполняются для балки двутаврового (наиболее экономичного) сечения. Вычисляем максимальное рабочее напряжение

$$\max \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{хт}}} = \frac{1,125 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1}{472 \cdot 10^{-6}} = 286 \cdot 10^6 \text{ Па} = 286 \text{ МПа},$$

которое меньше допускаемого напряжения на

$$\Delta = \frac{\max \sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{286 - 300}{300} \cdot 100\% = -4,67 \ \%.$$

8. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках нейтральной линии опасного сечения балки на левой опоре, где

$$|Q_{y\max}| = 1,25P = 1,25 \cdot 4ql. \text{ Предварительно из табл. П.5 для двутавра № 30}$$

находим: $J_x = 7080 \text{ см}^4$; $S_{x\max}^{\text{отс}} = 268 \text{ см}^3$; $d = 0,65 \text{ см}$. Проверяем прочность балки двутаврового сечения по касательным напряжениям

$$\max \tau_{\max} = \left| \frac{Q_{y\max} S_{x\max}^{\text{отс}}}{J_x d} \right| = \left| \frac{-1,25 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} \right| = 87,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ = 87,4 \text{ МПа} < [\tau] = 150 \text{ МПа}.$$

9. Анализируя эпюры Q_y и M_x , находим предполагаемое опасное сечение по эквивалентным напряжениям, зависящим как от нормальных, так и касательных напряжений. Как правило, опасное сечение то, где возникает наибольший изгибающий момент $M_{x\max}$ и значительная (не обязательно максимальная) поперечная сила $Q_{y\text{оп}}$. В рассматриваемом примере опасное (по эквивалентным напряжениям) сечение расположено на левой опоре балки, где $M_{\text{хоп}} = -1,125Pl$ и $Q_{y\text{оп}} = -1,25P$.

10. Двутавровое сечение № 30 условно представляем (рис. 4.5) в виде трех прямоугольников: двух полков размерами $b \times t$ и стенки размерами $(h - 2t) \times d$. С учетом таблицы П.5 для двутавра № 30 находим: $b = 13,5 \text{ см}$; $t = 1,02 \text{ см}$; $h = 30 \text{ см}$; $d = 0,65 \text{ см}$.

11. Определяем нормальные напряжения в характерных точках опасного сечения (рис. 4.5), используя формулу

$$\sigma_i = \frac{|M_{\text{хоп}}|}{J_x} y_i,$$

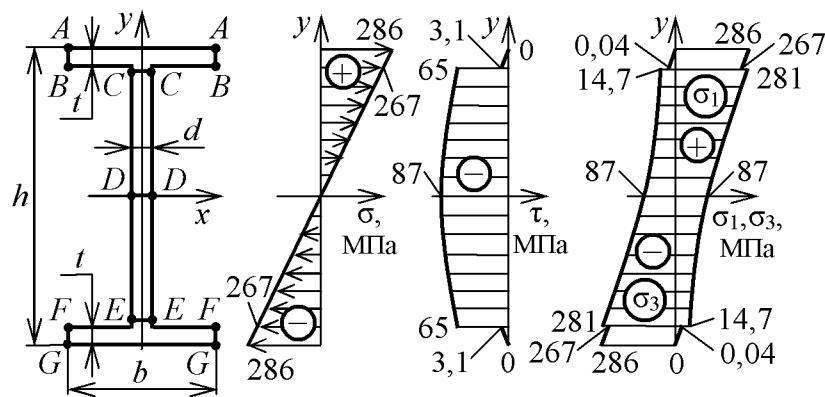


Рис. 4.5. Эпюры нормальных, касательных и главных напряжений в опасном сечении двутавровой балки

где y_i – ордината рассматриваемых точек сечения. Для слоев $A - A$ и $G - G$ $y_i = \pm 15$ см, слоев $B - B$, $C - C$ и $E - E$, $F - F$ $y_i = \pm 0,5(h - 2t) = \pm 13,98$ см. С учетом этого получаем: $\sigma_A = 286$ МПа; $\sigma_B = \sigma_C = 267$ МПа; $\sigma_D = 0$; $\sigma_E = \sigma_F = -267$ МПа; $\sigma_G = -286$ МПа. По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (рис. 4.5).

12. Используя формулу Д.И. Журавского

$$\tau_i = \frac{Q_{\text{уп}} S_{xi}^{\text{отс}}}{J_x b_i},$$

определяем касательные напряжения в указанных выше точках. При этом $Q_{\text{уп}} = -1,25P$; $J_x = 7080$ см⁴. Предварительно находим статические моменты отсеченных площадей: для точек A и G $S_x^{\text{отс}} \equiv 0$; для точек B , C , E и F $S_x^{\text{отс}} = b \cdot t \cdot 0,5(h - t) = 13,5 \cdot 1,02 \cdot 0,5(30 - 1,02) = 199$ см³; для точки D из табл.

П.5 для двутавра № 30 получаем $S_{x\text{max}}^{\text{отс}} = 268$ см³. С учетом этого вычисляем: $\tau_A = 0$; $\tau_B = \tau_F = -3,1$ МПа; $\tau_C = \tau_E = -65$ МПа; $\tau_D = -87$ МПа. Строим эпюру касательных напряжений (рис. 4.5).

13. Определяем величины и направления главных напряжений по формулам

$$\sigma_{1/3} = \frac{\sigma_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_i^2 + 4\tau_i^2}, \quad \text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_i}{\sigma_i}.$$

В результате вычислений получаем для: слоя $A - A$ $\sigma_1 = 286$ МПа, $\sigma_3 = 0$, $\alpha_0 = 0$; слоя $B - B$ $\sigma_1 = 267$ МПа, $\sigma_3 = -0,04$ МПа, $\alpha_0 = 0,665^\circ$; слоя $C - C$ $\sigma_1 =$

281 МПа, $\sigma_3 = -14,7$ МПа, $\alpha_0 = 13^\circ$; слоя $D - D$ $\sigma_1 = 87$ МПа, $\sigma_3 = -87$ МПа, $\alpha_0 = 45^\circ$; слоя $E - E$ $\sigma_1 = 14,7$ МПа, $\sigma_3 = -281$ МПа, $\alpha_0 = -13^\circ$; слоя $F - F$ $\sigma_1 = 0,04$ МПа, $\sigma_3 = -267$ МПа, $\alpha_0 = -0,665^\circ$; слоя $G - G$ $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -286$ МПа, $\alpha_0 = 0$. Строим антисимметричные эпюры главных напряжений σ_1 , σ_3 (рис. 4.5).

14. Используя графо-аналитический метод О. Мора, определяем величины и направления главных напряжений для характерных точек C , D и E с помощью круга напряжений (обратная задача), как показано на рис. 4.6.

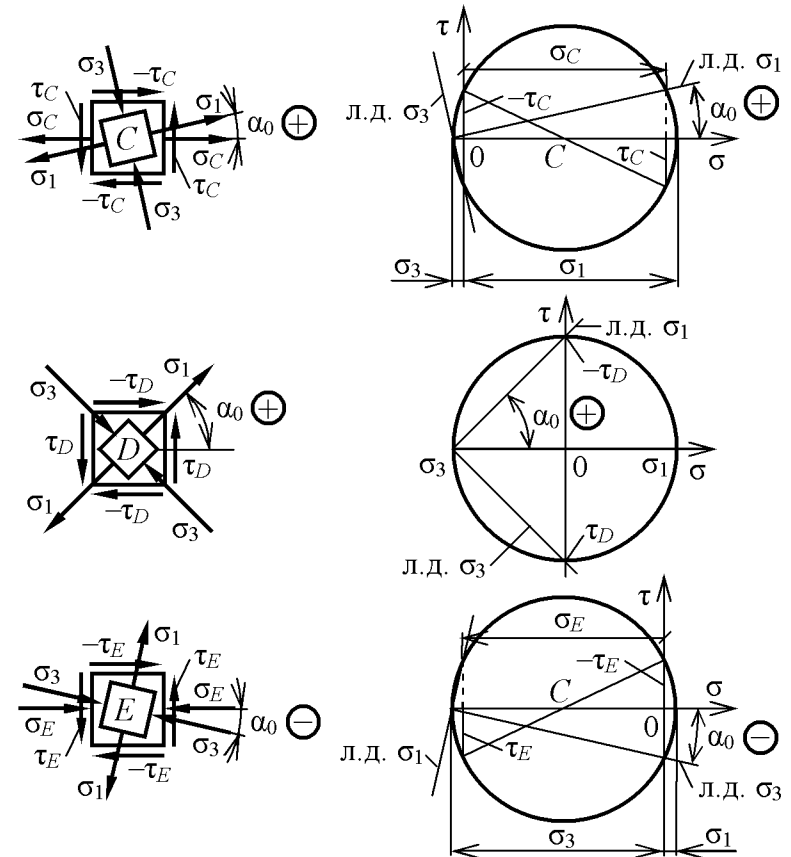


Рис. 4.6. Круги О. Мора для элементов C , D и E

Построение кругов О. Мора поясним на примере точки C (рис. 4.6): выбираем координатные оси $\sigma - \tau$; в масштабе откладываем напряжения σ_C , τ_C и

0, $-\tau_C$; соединяем полученные точки прямой и описываем окружность. Отрезки, отсекаемые окружностью на оси σ , представляют собой в масштабе главные напряжения $\sigma_1 = 281$ МПа и $\sigma_3 = -14,7$ МПа. Затем находим зеркальные проекции точек с координатами $(\sigma_C; \tau_C)$ и $(0, -\tau_C)$ на окружность; через точки с координатами $(\sigma_3; 0)$ и $(\sigma_C; -\tau_C)$ проводим линии действия (л.д.) главных напряжений σ_1 и σ_3 , которые определяют искомый угол $\alpha_0 = 13^\circ$. После этого показываем напряженное состояние балки, заданное на главных площадках напряжениями σ_1 и σ_3 (рис. 4.6, внутренний кубик). Видно, что круг напряжений совершенно аналогичен кругу инерции О. Мора.

15. Анализ эпюр σ и τ (рис. 4.5) показывает, что наибольшие эквивалентные напряжения возникают в слоях $C - C$ и $E - E$. Записываем условие прочности балки по эквивалентным напряжениям, используя третью теорию прочности

$$\max \sigma_{\text{экв3}} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2} = \sqrt{267^2 + 4(-65)^2} = 296 \text{ МПа} < [\sigma] = 300 \text{ МПа}.$$

Таким образом, прочность балки по нормальным, касательным и эквивалентным напряжениям обеспечена.

16. Проводим расчет двутавровой балки на жесткость. Для определения углов поворота и прогибов используем универсальные уравнения (4.10) и (4.11). В соответствии со сформулированными выше требованиями составляем расчетную схему балки для определения перемещений (рис. 4.7).

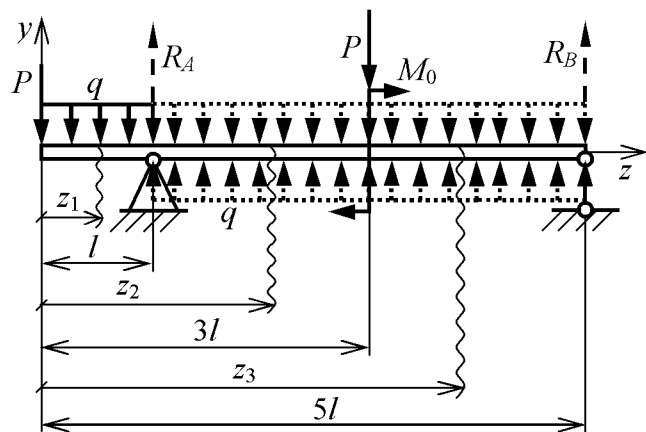


Рис. 4.7. Расчетная схема к составлению универсальных уравнений углов поворота сечений и прогибов балки

При этом начало координат располагаем в крайнем левом сечении балки, а распределенную нагрузку q продляем до конца балки и добавляем такую

же, но противоположно направленную. Абсциссы участков балки изменяются в пределах: $0 \leq z_1 \leq l$; $l \leq z_2 \leq 3l$; $3l \leq z_3 \leq 5l$. Направления внешних нагрузок, соответствующие положительным знакам слагаемых уравнений (4.10) и (4.11), показаны на рис. 4.2. С учетом этого универсальные уравнения (4.10) и (4.11) конкретизируем следующим образом

$$\Theta_z = \Theta_0 - \frac{P(z-0)^2}{2!EJ_x} - \frac{q(z-0)^3}{3!EJ_x} + \frac{R_A(z-l)^2}{2!EJ_x} + \frac{q(z-l)^3}{3!EJ_x} +$$

$$\frac{M_0(z-3l)^1}{1!EJ_x} - \frac{P(z-3l)^2}{2!EJ_x},$$

$$y_z = y_0 + \Theta_0 z - \frac{P(z-0)^3}{3!EJ_x} - \frac{q(z-0)^4}{4!EJ_x} + \frac{R_A(z-l)^3}{3!EJ_x} + \frac{q(z-l)^4}{4!EJ_x} +$$

$$\frac{M_0(z-3l)^2}{2!EJ_x} - \frac{P(z-3l)^3}{3!EJ_x}.$$

17. На опорах прогибы равны нулю. Следовательно, граничные условия имеют вид: 1. $z_1 = l$ $y_1 = 0$; 2. $z_3 = 5l$ $y_3 = 0$. Подставляя граничные условия в уравнения прогибов для первого и третьего участков и совместно решая их, получаем начальные параметры: $\Theta_0 = +1,125Pl^2/EJ_x$; $y_0 = -0,948Pl^3/EJ_x$.

18. Разбивая балку на 10 частей и учитывая значения Θ_0 и y_0 , по конкретизированным уравнениям вычисляем углы поворота и прогибы балки. Результаты вычислений сводим в таблицу 4.3.

Таблица 4.3. Результаты расчетов

Перемеще- ния	Абсциссы сечения										
	0	0,5l	l	1,5l	2l	2,5l	3l	3,5l	4l	4,5l	5l
$\frac{\Theta_z}{Pl^2/EJ_x}$	1,125	0,995	0,583	0,103	-0,213	-0,366	-0,354	-0,0535	0,161	0,290	0,479
$\frac{y_z}{Pl^3/EJ_x}$	-0,948	-0,407	0	0,165	0,130	0,0215	-0,208	-0,307	-0,276	-0,159	0

Окончательно представляем балку (рис. 4.8) и строим эпюры Q_y , M_x , Θ_z и y_z с учетом расчетов и дифференциальных зависимостей между q_y , Q_y , M_x , Θ_z и y_z . Используя правила контроля эпюр, проверяем правильность проведенных расчетов.

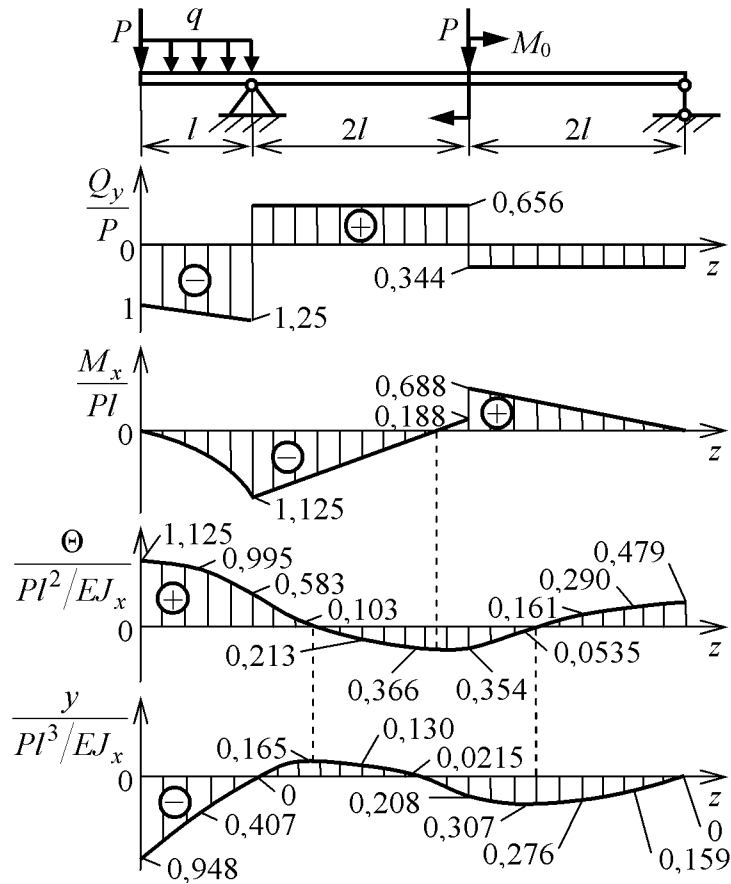


Рис. 4.8. Расчетная схема балки, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота и прогибов

19. Анализируя эпюру прогибов, находим опасное по жесткости сечение (в рассматриваемом примере – крайнее левое сечение). Проверяем выполнение условия жесткости балки

$$y_{\max} = \left| k_y \frac{Pl^3}{EJ_x} \right|_{\max} = \left| -0,948 \frac{Pl^3}{EJ_x} \right|_{\max} = \frac{0,948 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 0,00803 \text{ м} < [y] = 0,01 \text{ м}.$$

Видно, что условие жесткости балки выполняется. В противном случае из условия жесткости вычисляем расчетный момент инерции J_x и по табл. П.5 окончательно выбираем номер двутавра.