

Материалы к выполнению контрольных работ по курсу "Методы оптимальных решений"

1. Решение оптимационных моделей в среде EXCEL

Постановка многих экономических задач предусматривает нахождение наилучшего или оптимального решения. Результаты расчетов и анализа оптимизационных задач служат основанием для принятия решений по эффективному управлению объектами экономики. В оптимационной модели выделяю критерий качества и ограничения. Если критерий качества и ограничения удается выразить в математической форме, то наша исходная экономическая задача сводится к задаче математического программирования. Критерий качества в этом случае представляет собой целевую функцию, а ограничения – математические выражения на ресурсные и сбытовые ограничения. Наибольшее применение для управления экономическими объектами находят модели линейного программирования. В модели линейного программирования целевая функция и ограничения линейны по всем переменным задачи.

Решение оптимизационной задачи проходит следующие этапы:

1. Словесная (вербальная) формулировка проблемы;
2. Формализация задачи и выбор переменных;
3. Составление математической модели (целевой функции и системы ограничений), формулирующей проблему в переменных задачи;
4. Выбор программного обеспечения и компьютерная реализация модели;
5. Анализ решений, их экономическая интерпретация и возможное уточнение модели;
6. Выработка управляющих воздействий.

Поскольку оптимизационные задачи часто встречаются в самых различных областях, один из пакетов для их решения включен в электронную таблицу EXCEL в качестве надстройки “Поиск решения”. Обычно экономист начинает работать с оптимизационной задачей в этой среде, а затем, если возможности надстройки оказываются недостаточными, переходит к профессиональным оптимизационным пакетам.

Пример 1. Модель планирования производства

a. Верbalная формулировка задачи.

Небольшая пекарня работает 5 дней в неделю и производит ржаной и пшеничный хлеб. Производство 100 единиц ржаного хлеба требует 1 чел/час рабочего времени и 30 кг ржаной муки первого сорта, а на производство 100 ед. пшеничного хлеба идет 1 чел/час рабочего времени и 20 кг пшеничной муки высшего сорта. Прибыль от продажи одного изделия первого типа составляет 2 руб., а от продажи изделия второго типа – 3 руб. Каким должен быть ежедневный выпуск каждого из изделий, если в распоряжении владельца пекарни 2 работника, работающих по 8 часов в день и еженедельно на склад поступает до 1,5т ржаной и 1 т пшеничной муки.

b. Формализация задачи и выбор переменных.

Обычно задача представляется в табличных форматах, что облегчает ее экономическую трактовку и математическую формализацию.

В нашем случае, можно сосредоточить условия задачи, например, в таблице норм расходов ресурсов, приведя условия задачи к однородному виду:

Ресурс	Расход ресурса на единицу выпуска		Ежедневный объем ресурса
	1. Хлеб ржаной	2. Хлеб пшеничный	
1. Рабочее время, час/шт.	0,01	0,01	16
2. Мука ржаная, кг/шт.	0,3	-	300
3. Мука пшеничная, кг/шт.	-	0,2	200
Прибыль, руб/ед.	2	3	

Введем переменные:

x_1 – ежедневный выпуск ржаного хлеба, шт.

x_2 – ежедневный выпуск пшеничного хлеба, шт.

c. Составление математической модели.

Целевая функция:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\text{ресурс 1, рабочее время: } 0,01x_1 + 0,01x_2 \leq 16;$$

$$\text{ресурс 2, мука ржаная: } 0,3x_1 \leq 300;$$

$$\text{ресурс 3, мука пшеничная: } 0,2x_2 \leq 200;$$

Поскольку произвести можно только неотрицательное количество продукции, необходимо добавить еще два условия:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0; \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, полная модель задачи будет:

$$\begin{aligned}Z = 2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\0,01x_1 + 0,01x_2 &\leq 16; \\0,3x_1 &\leq 300; \\0,2x_2 &\leq 200; \\x_1 &\geq 0; \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Запишем модель в матричной форме:

$$cx \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b;$$

$$x \geq 0$$

где $c = (2 \quad 3)$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,01 \\ 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 16 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$

d. Компьютерная реализация

Воспользуемся для реализации задачи электронной таблицей EXCEL.

Для освоения материала мы подготовим 3, несколько отличающихся шаблона, решающих одну и ту же задачу.

Дело в том, что для удобства экономической интерпретации конкретной задачи и последующей ее модификации можно не только в разных ячейках листа разместить компоненты модели, но и связать их различными функциями, например, встроенными функциями матричной алгебры или обычными арифметическими операторами. Все зависит от автора и того, как будет применяться модель.

◆ Вариант 1.

Создадим наш шаблон как аналог таблицы, приведенной в пункте 1.2.

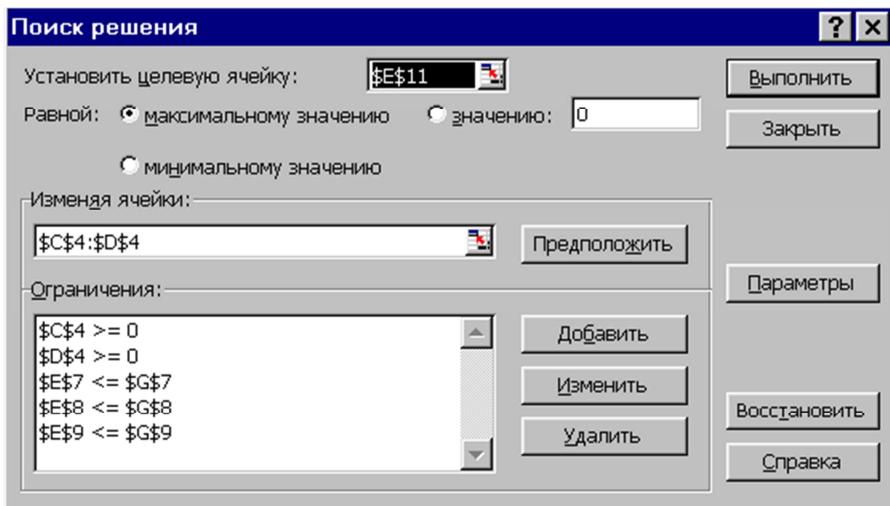
Разместим переменные задачи в разных столбцах. Суммарные расходы ресурсов и прибыль запишем с помощью функции СУММПРОИЗВ:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ежедневный выпуск хлебобулочных изделий						
2			Ржаной хлеб	Пшеничный хлеб			
3			X_1	X_2			
4	выпуск	X	0	0			
5							
6					Расход	Запас	
7	Технологические коэффициенты	a_{1j}	0,01	0,01	0	\leq	16
8		a_{2j}	0,3	0	0	\leq	300
9		a_{3j}	0	0,2	0	\leq	200
10							
11	Прибыль	C	2	3	0	max	
12							

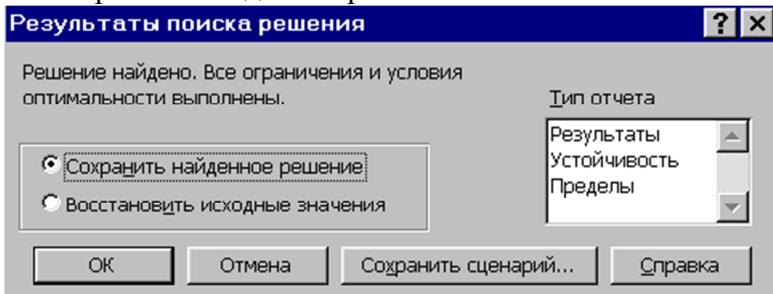
В ячейки столбца Е нашего шаблона занесены следующие формулы:

	E
1	
2	
3	
4	
5	
6	Расход
7	=СУММПРОИЗВ(C7:D7;C\$4:D\$4)
8	=СУММПРОИЗВ(C8:D8;C\$4:D\$4)
9	=СУММПРОИЗВ(C9:D9;C\$4:D\$4)
10	
11	=СУММПРОИЗВ(C11:D11;C\$4:D\$4)

В остальные ячейки шаблона занесена цифровая и текстовая информация.
Для решения задачи перейдем через пункт меню “Сервис” к надстройке
“Поиск решения” и заполним форму «Поиск решения», как на следующем рисунке:



- Поскольку целевая функция в нашем шаблоне рассчитывается в ячейке E11, В поле ввода «установить целевую ячейку» занесено \$E\$11.
 - Т.к. решается задача на максимум, зафиксирована кнопка «максимальному значению»
 - Ограничения, зафиксированные в окне « Ограничения: », заносятся при нажатии клавиши « Добавить », размещенной справа от окна. При необходимости, выделенное ограничение может быть изменено или удалено после нажатия соответствующей клавиши.
- Задача решается после нажатия клавиши « Выполнить » в правом верхнем углу рассматриваемой формы.
- После нахождения решения высвечивается форма «Результаты поиска решения», где следует при необходимости зафиксировать кнопку « Сохранить найденное решение » и нажать клавишу « OK »:



Найденное решение будет записано в ячейки «C4:D4» и исходный лист примет вид:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ежедневный выпуск хлебобулочных изделий						
2			Ржаной хлеб	Пшеничный хлеб			
3			x_1	x_2			
4	выпуск	X	600	1000			
5							
6					Расход	Запас	
7	Технологические коэффициенты	a_{1j}	0,01	0,01	16	\leq	16
8		a_{2j}	0,3	0	180	\leq	300
9		a_{3j}	0	0,2	200	\leq	200
10							
11	Прибыль	C	2	3	4200	max	
12							

◆ *Вариант 2.*

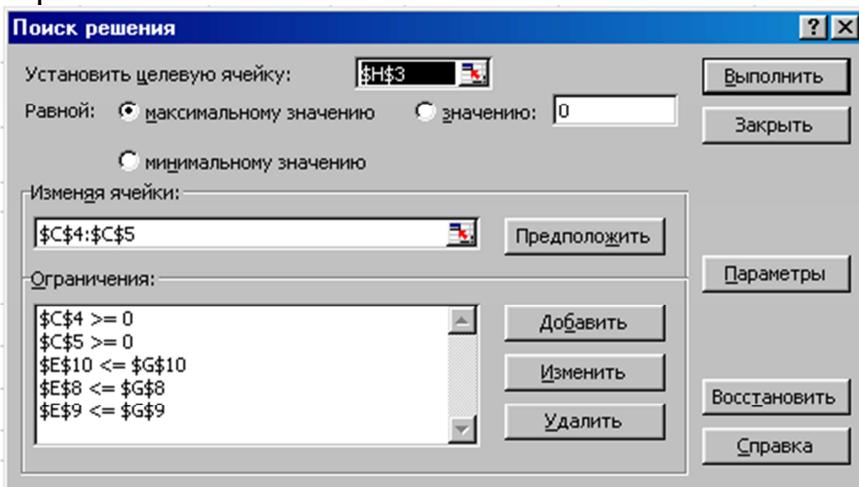
Разместим переменные задачи в разных строках и воспользуемся для вычислений операциями матричной алгебры, например, так как на это представлено на следующем рисунке:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Вариант 2								
2									
3		Решение						Прибыль	
4	Ржаной хлеб	x_1	0	c1	2			0	
5	пшеничный хлеб	x_2	0	c2	3				
6									
7				Расход	Запас				
8	Матрица прямых затрат	A	0,01	0,01	0		16		
9			0,3	0	0		300		
10			0	0,2	0		200		
11									

В ячейку Н3 запишем формулу перемножения вектора c на вектор x , а в ячейки Е8:Е10 – формулу перемножения матрицы затрат на объем выпуска – вектор x , как это показано на следующей иллюстрации:

E8	f: =МУМНОЖ(C8:D10;C4:C5)			
D	E	F	G	H
1				
2				
3				Прибыль =МУМНОЖ(ТРАНСП(C4:C5);F4:F5)
4	c1	2		
5	c2	3		
6				
7	Расход		Запас	
8	0,01	=МУМНОЖ(C8:D10;C4:C5)	16	
9	0	=МУМНОЖ(C8:D10;C4:C5)	300	
10	0,2	=МУМНОЖ(C8:D10;C4:C5)	200	
11				

Занесем в поля ввода окна “Поиск решения” адрес ячейки целевой функции и ограничения:



После нажатия клавиши “Выполнить” получим решение, совпадающее с первым вариантом реализации модели:

A	B	C	D	E	F	G	H
Вариант 2							
1							
2							
3		Решение				Прибыль	
4	Ржаной хлеб	x1	600	c1	2		4200
5	пшеничный хлеб	x2	1000	c2	3		
6							
7				Расход	Запас		
8	Матрица прямых затрат	A	0,01	0,01	16	16	
9			0,3	0	180	300	
10			0	0,2	200	200	

Основное преимущество такой формы реализации модели заключается в том, что все ячейки, содержащие формулы, рассматриваются как единый объект, и

не могут быть изменены отдельно. Кроме того, при изменении, например, количества выпускаемых продуктов или ограничений, модель в матричной записи остается той же самой.

◆ *Вариант 3.*

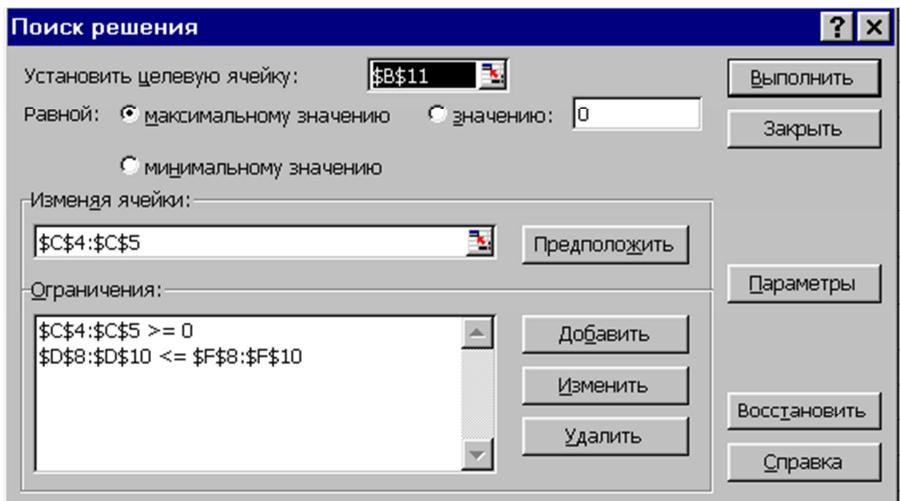
Разместим переменные задачи в разных строках, а вычисления сумм произведений выполним с помощью обычных арифметических операций:

B11	$=C4*F4+C5*F5$								
A	B	C	D	E	F	G	H	I	
3	Начальное решение		Оптимальное решение						
4	X1	0	0	c1	2				
5	X2	0	0	c2	3				
6									
7			Расход		Запасы				
8	Ресурс1	0,01	0,01	0	16	Рабочая сила			
9	Ресурс2	0,3	0	0	300	Ржаная мука			
10	Ресурс3	0	0,2	0	200	Пшеничная мука			
11	Прибыль:	0							

В ячейки D8:D10 занесены формулы суммы парных произведений, как показано на следующей иллюстрации:

D8	$=B8*C$4+C8*C5	
D	E	
3		
4		c1
5		c2
6		
7	Расход	
8	$=B8*C$4+C8*C5	
9	$=B9*C$4+C9*C5	
10	$=B10*C$4+C10*C5	

Окно “Поиск решения” заполним в соответствии со следующей иллюстрацией:



Обратите внимание на то, как на этот раз записаны ограничения задачи.
В том случае, когда ограничения подобны, EXCEL допускает запись ограничений не индивидуально, а диапазонами.
Решение задачи будет размещено в ячейках C4:C5:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3		Начальное решение	Оптимальное решение						
4	x1	0	600		c1	2			
5	x2	0	1000		c2	3			
6									
7			Расход		Запасы				
8	Ресурс1	0,01	0,01	16		16	Рабочее время		
9	Ресурс2	0,3	0	180		300	Ржаная мука		
10	Ресурс3	0	0,2	200		200	Пшеничная мука		
11	Прибыль:	4200							

Видим, что все три варианта реализации задачи в среде EXCEL приводят к однаковому плану выпуска продукции пекарни:

$$\begin{aligned}x_1 &= 600 \text{ (ед. ржаного хлеба);} \\x_2 &= 1000 \text{ (ед. пшеничного хлеба).}\end{aligned}$$

Такое решение обеспечит ежедневный доход 4200 руб.

Выбор того или иного шаблона EXCEL зависит главным образом от того, какие вычислительные эксперименты предполагается ставить с помощью модели. Для одних задач более удобна компьютерная реализация с применением матричных операций, для других – покоординатная запись без вызова встроенных функций.

Задание для самостоятельной работы

Маркетинговые исследования показали, что будут пользоваться спросом сухарики, на приготовление одной упаковки которых пойдет 200г ржаной и 50г пшеничной муки, а затраты труда – 1 мин рабочего времени.

Предполагаемая прибыль от реализации одной упаковки сухариков составляет

4 руб. Имеет ли смысл выпускать нашей пекарне новый вид продукции? Если да, то каким станет новый производственный план?

Реализовать новую задачу путем модификации любого из трех первоначальных вариантов модели.

Пример 2. Транспортная задача

2.1. Формулировка задачи

На аэродромы А1 и А2 развивающейся страны поступила гуманитарная помощь в объемах 80 и 50 тонн, соответственно. Их доставляют в 3 населенных пункта В1, В2 и В3 с потребностями в 40, 60 и 30 тонн, соответственно. Расстояния между аэродромами в км, приведены в таблице:

	В1	В2	В3
А1	40	120	190
А2	60	100	140

Как следует транспортировать товары для минимизации издержек на перевозки?

2.2 Формализуем условия задачи

Будем считать, что издержки на перевозки прямо пропорциональны расстоянию и объему перевозимого груза. В таком случае мы имеем линейную транспортную задачу. Проверим ее на закрытость (сбалансированность). Всего запасов на пунктах отправления будет: $80+50=130$ т, а потребности – $40+60+30=130$ т.

Задача закрытая, следовательно фиктивные переменные не вводятся.

Пусть x_{ij} – количество грузов, доставляемых из пункта i в пункт j .

2.3. Математическая модель

тогда целевая функция будет:

$$Z = 40x_{11} + 120x_{12} + 190x_{13} + 60x_{21} + 100x_{22} + 140x_{23} \rightarrow \min$$

Ограничения будут:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$$

$$x_{11} + x_{21} = 40$$

$$x_{12} + x_{22} = 60$$

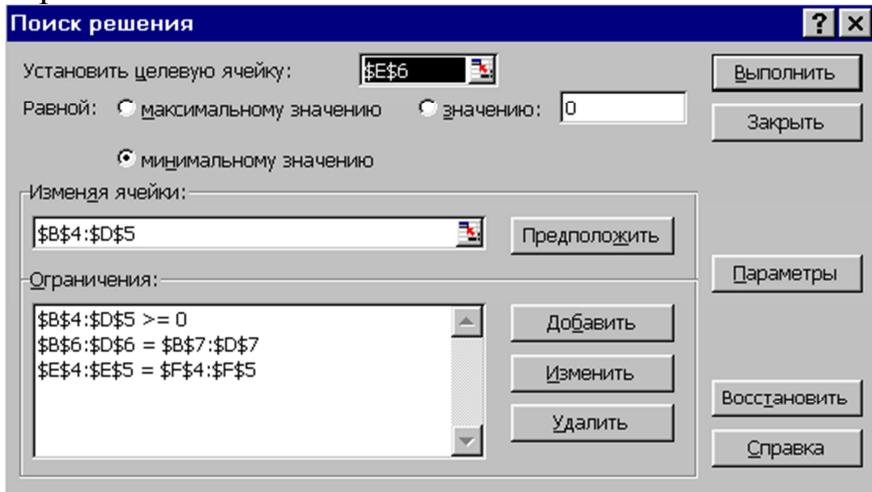
$$x_{13} + x_{23} = 30$$

2.4. Компьютерная реализация

Занесем условия задачи так, как показано на следующих рисунках:

	A	B	C	D	E	F
1	c	40	120	190		
2		60	100	140		
3		Перевозки			Запасы	
4	x				0	80
5					0	50
6		0	0	0	0	
7	Потребности	40	60	30		
8						

Где в ячейки **E4:E5** занесены суммы перевозок по строкам,
 В ячейки **B6:D6** – суммы перевозок по столбцам,
 а в ячейку **E6** – целевая функция (суммы произведений **c** на **x**).
 Вызовем надстройку “Поиск решения” и заполним поля целевой функции и ограничений:



После нажатия клавиши “Выполнить”, получим результат:

	A	B	C	D	E	F
1	c	40	120	190		
2		60	100	140		
3		Перевозки			Запасы	
4	x	40	40	0	80	80
5		0	20	30	50	50
6		40	60	30	12600	
7	Потребности	40	60	30		
8						

Т.о., наилучший план перевозок будет:
 из A1 в B1 40т; из A1 в B2 – 40т;
 из A2 в B2 – 20т; из A2 в B3 – 30т.
 При этом, издержки на перевозки составят 12600 условных единиц.

Экономический анализ оптимизационных моделей

Получение оптимального решения экономико-математической модели не означает, что именно это решение может быть рекомендовано для практической реализации в конкретной экономической ситуации. В частности, полученное решение может оказаться чувствительным к малым изменениям ресурсов или ситуации на рынке. В этой связи, необходимо всестороннее исследование полученных оптимальных решений на устойчивость и чувствительность. Под устойчивостью решения обычно понимается неизменность базиса, а под чувствительностью – отклик целевой функции на малые изменения параметра. Только после такого анализа, а при необходимости, и уточнения модели, можно выработать рекомендации по принятию решений.

Для модели линейного программирования методика анализа решений полностью разработана для случая вариации одного из параметров модели (коэффициента при целевой функции, матрицы ограничений, значение правой части ограничения). Она опирается на знание решений двойственной задачи и свойств матрицы ограничений. Стандартный анализ чувствительности и устойчивости решений включает исследование реакции модели на:

- изменения b_i (значения правых частей ограничений);
- изменения c_j (коэффициенты целевой функции).

Программы решения задач линейного программирования, и в частности надстройка 'Поиск решения' EXCEL обычно предусматривают вывод отчетов по стандартному анализу.

Исследование изменений a_{ij} (коэффициентов матрицы ограничений) обычно в стандартную методику не включают, хотя подобные расчеты трудностей не представляют. Кроме того, стандартная методика не отвечает также на вопрос что произойдет при одновременном изменении нескольких параметров. Ответить на него можно путем многократного решения оптимизационной задачи при варьировании требуемых коэффициентов. Таким образом, для полноценного экономического анализа свойств модели нам потребуется освоить технологию проведения вычислительных экспериментов. **Цель занятия** – освоение стандартной методики анализа устойчивости и чувствительности решений, ее применение для конкретной оптимизационной задачи и организация вычислительных экспериментов с моделью в среде EXCEL.

Методические указания к выполнению практикума.

1. Получение отчетов о решении оптимизационной задачи

Воспользуемся моделью планирования производства, подготовленной на предыдущих занятиях.

Целевая функция:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

ресурс 1, рабочее время: $0,01x_1 + 0,01x_2 \leq 16$;

ресурс 2, мука ржаная: $0,3x_1 \leq 300$;

ресурс 3, мука пшеничная $0,2x_2 \leq 200$;

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$.

Для определенности возьмем вариант реализации № 3:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3		Начальное решение	Оптимальное решение						
4	x1	0	600		c1	2			
5	x2	0	1000		c2	3			
6									
7			Расход		Запасы				
8	Ресурс1	0,01	0,01	16		16			Рабочее время
9	Ресурс2	0,3	0	180		300			Ржаная мука
10	Ресурс3	0	0,2	200		200			Пшеничная мука
11	Прибыль:		4200						

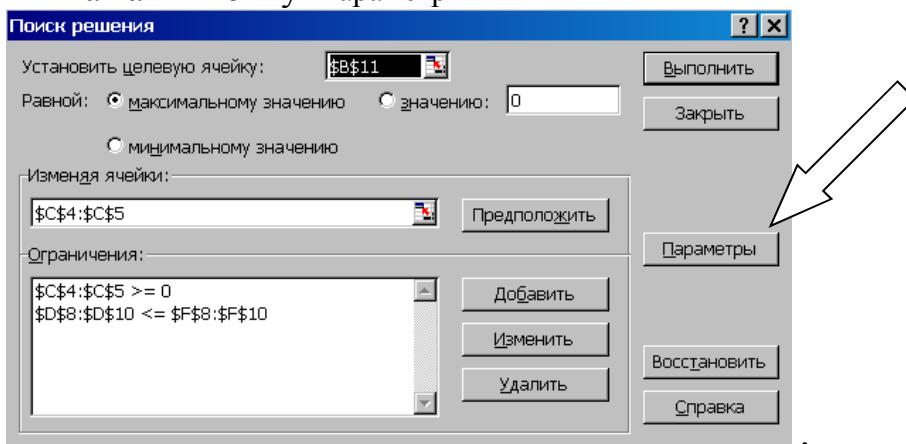
План выпуска продукции пекарни по этому варианту размещается в ячейках C4:C5 и составляет:

$$x_1 = 600 \text{ (ед. ржаного хлеба);}$$

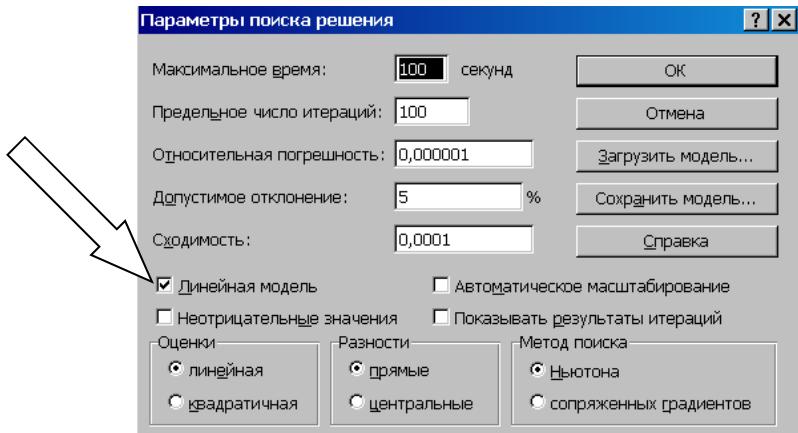
$$x_2 = 1000 \text{ (ед. пшеничного хлеба).}$$

Ежедневный доход – 4200 руб.

Надстройка "Поиск решения" предусматривает 2 набора отчетов – универсальный и специальный. Специальный набор отчетов будет сгенерирован, если оптимизатору дать явное указание, что модель линейная и решать ее надо симплекс методом. Для этого следует в диалоговом окне "Поиск решения" нажать кнопку 'Параметры'



и далее в окне "Параметры поиска решения" установить флајок 'Линейная модель'

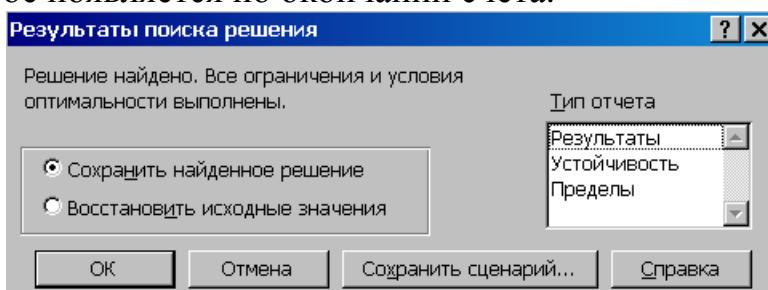


В том случае, если флајок 'Линейная модель' не установлен – будет сгенерирован универсальный набор отчетов, соответствующий произвольной модели выпуклого программирования. Универсальный набор отчетов для модели линейного программирования в целом менее информативен, он содержит только решение двойственной задачи, не содержит границ устойчивости и использует терминологию нелинейного программирования. В свою очередь, терминология специального набора отчетов строго соответствует только классической задаче планирования производства (ресурсы, теневые цены) и должна быть модифицирована для интерпретации, например, задачи о диете, транспортной задачи, или той же самой задачи планирования производства с ограничениями не только на ресурсы, но и на сбыт или комплектность продукции.

Каждый набор содержит 3 типа отчетов:

- Отчет Результаты;
- Отчет Устойчивость;
- Отчет Пределы.

Тип отчета отмечается в диалоговом окне "Результаты поиска решения", которое появляется по окончании счета.



Для каждого из отмеченных типов отчетов заводится новый лист Excel с соответствующим названием, куда и помещается результат.

Отчеты по результатам и пределам для обоих наборов идентичны. Различия только в отчетах по устойчивости. Отчет Устойчивость универсального набора содержит только решение двойственной задачи. Иными словами – только оценки чувствительности модели к малым изменениям правых частей ограничений. Отчет Устойчивость линейной модели помимо

решения двойственной задачи предоставляет предельные изменения целевой функции и ограничений.

Сгенерируем для нашей модели полный набор отчетов, соответствующий оптимизационной модели линейного программирования. Для этого следует установить в окне "Параметры поиска решения" флагок 'Линейная модель', в окне "Поиск решения" нажать кнопку 'Выполнить', а по окончании счета, в окне "Результаты поиска решения" отметить все три типа отчетов.

Для нашей модели получим следующие отчеты:

Отчет по результатам

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$B\$11	Прибыль: Начальное решение	0	4200

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
\$C\$4	x1 Оптимальное решение	0	600
\$C\$5	x2 Оптимальное решение	0	1000

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
\$D\$8	Ресурс1 Расход	16	\$D\$8<=\$F\$8	связанное	0
\$D\$9	Ресурс2 Расход	180	\$D\$9<=\$F\$9	не связан.	120
\$D\$10	Ресурс3 Расход	200	\$D\$10<=\$F\$10	связанное	0
\$C\$4	x1 Оптимальное решение	600	\$C\$4>=0	не связан.	600
\$C\$5	x2 Оптимальное решение	1000	\$C\$5>=0	не связан.	1000

Отчет по пределам

Целевое

Ячейка	Имя	значение
\$B\$11	Прибыль: Начальное решение	4200

Изменяемое	Нижний Целевое	Верхний Целевое			
Ячейка	значение	предел	результат	предел	результат
\$C\$4	600	0	3000	600,0000036	4200,000007
\$C\$5	1000	0	1200	999,9999972	4199,999992

Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$C\$4	x1 Оптимальное решение	600	0	2	1	2
\$C\$5	x2 Оптимальное решение	1000	0	3	1E+30	1

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$8	Ресурс1 Расход	16	200	16	4	6
\$D\$9	Ресурс2 Расход	180	0	300	1E+30	120
\$D\$10	Ресурс3 Расход	200	5	200	120	80

Отчет по результатам включает исходные и конечные (оптимальные) значения целевой функции и изменяемых ячеек, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях.

Отчет по пределам содержит конечные значения целевой и изменяемых ячеек, а также нижних и верхних границ. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка, в то время как значения остальных влияющих ячеек фиксированы и удовлетворяют наложенным ограничениям. Верхним пределом – наибольшее значение влияющей ячейки при фиксировании остальных.

Отчет по устойчивости содержит сведения о чувствительности решения (Нормируемая стоимость и Теневая цена) к изменениям значений влияющих ячеек, содержащих формулы ограничений, а также предельные изменения целевых коэффициентов и правых частей ограничений, определяющие границы устойчивости найденных решений.

Нормируемая стоимость показывает на сколько изменится целевая функция в случае принудительного включения единицы соответствующей продукции в оптимальный план выпуска.

Теневая цена показывает на сколько изменится целевая функция при увеличении соответствующего ресурса (правой части ограничения) на единицу. Следует заметить, что термины "Нормируемая стоимость" и "Теневая цена" имеют экономический смысл только для классической задачи планирования производства. Универсальные термины, применяемые математиками для этих целей в задаче математического программирования "Нормированное значение градиента" и "Множитель Лагранжа", не несут экономический смысл. В этой связи трактовка отчета по устойчивости должна быть своя для каждой конкретной экономической задачи.

Сгенерируем для сопоставления универсальный отчет по устойчивости. Для этого вызовем надстройку Поиск решения и в окне "**Параметры поиска решения**" погасим флажок 'Линейная модель'.

После решения задачи получим следующий отчет по устойчивости:

Отчет по устойчивости					
Изменяемые ячейки					
Ячейка	Имя	Результ.	Нормир.		
\$C\$4	x1 Оптимальное решение	600	0		
\$C\$5	x2 Оптимальное решение	1000	0		
Ограничения					
Ячейка	Имя	Результ.	Лагранжа		
\$D\$8	Ресурс1 Расход	16	200,0000045		
\$D\$9	Ресурс2 Расход	180	0		
\$D\$10	Ресурс3 Расход	200	4,999999925		

Как видим, отчет без учета линейности модели, содержит только двойственные оценки, а интервалы устойчивости не оцениваются.

2. Интерпретация отчетов о решении оптимизационной задачи

Система отчетов надстройки Поиск решения позволяет проверить правильность формализации модели и систематизировать оценки чувствительности и устойчивости решений. Отметим, что наиболее содержательным для экономической интерпретации является отчет по

устойчивости линейной модели. Он содержит полученные решения, двойственные оценки, а также интервалы устойчивости решений при изменении правых частей ограничений и коэффициентов при целевой функции.

Фактически, основываясь только на отчете по устойчивости надстройки Поиск решения, можно выполнить традиционный анализ чувствительности и устойчивости линейной модели к изменению параметров. Такой анализ заключается в получении и интерпретации двойственных оценок и указании интервалов устойчивости по каждому из параметров модели при условии вариаций только этого параметра. Параметрами модели являются правые части ограничений (b_i), коэффициенты целевой функции (c_j), и коэффициенты матрицы ограничений (a_{ij}). В традиционный анализ обычно не включается исследование изменений коэффициентов матрицы ограничений. Таким образом, задача заключается в исследовании влияния на оптимальное решение параметров b_1, b_2, \dots, b_m и параметров c_1, c_2, \dots, c_n .

Проведем анализ оптимального решения нашей задачи, используя полученные отчеты.

2.1. Изменения правых частей ограничений

Правые части ограничений в нашей задаче – это объемы ресурсов.

Ресурсами в нашей задаче являются рабочее время, ржаная и пшеничная мука. Ресурсы "Рабочее время" и "Пшеничная мука" являются дефицитными т.е. в оптимальном решении используются полностью. На это указывает Статус соответствующих ресурсов отчета по Результатам или ненулевые значения теневых цен (двойственных оценок) отчета по Устойчивости. Эти ресурсы следует наращивать, если возникает необходимость увеличить прибыль.

Ресурс "Ржаная мука" остается неизрасходованным. На это указывает несвязывающий статус ограничения из отчета по Результатам или нулевая Теневая цена отчета по Устойчивости. Ржаную муку можно частично продать, и это не повлияет на размер получаемой прибыли от реализации ржаного и пшеничного хлеба.

Относительно дефицитных ресурсов можно поставить вопрос о том, какой из них наиболее ценен, т.е. приносит наибольшую прибыль и вопрос о предельном наращении каждого из ресурсов.

Ответ на первый вопрос дает сопоставление величины теневых цен. Один дополнительный час рабочего времени принесет 200 единиц прибыли, а 1 кг дополнительно приобретенной пшеничной муки принесет 5 единиц прибыли согласно двойственным оценкам. Если теперь сопоставить час рабочего времени и килограмм муки, например, по их ценам на рынке, можно выбрать более ценный ресурс. Например, пусть 1 час рабочего времени стоит 20 руб., а килограмм муки – 10 руб. Тогда 20 руб., вложенных в оплату дополнительного рабочего времени принесут 200 руб. дополнительного дохода, а 20 руб., потраченных на приобретение муки принесут $(20/10)*5=10$ единиц. Иначе говоря, рабочее время – более ценный ресурс.

Если же 1 час рабочего времени стоит 500 руб., а 1 кг муки – 5 руб., то дополнительный час принесет 200 руб. дохода, а мука, купленная за те же 500

руб. принесет $(500/5)*5=500$ руб. Т.е. в этой ситуации более ценный ресурс – мука.

Ответ о предельном наращении ресурсов дает графа **Допустимое увеличение** отчета по Устойчивости. Именно на эту величину можно увеличивать объем соответствующего ресурса. В случае дальнейшего увеличения ресурса, роста прибыли не произойдет, поскольку этот ресурс теперь не будет дефицитным, его двойственная оценка станет нулевой и оптимальное решение перейдет в другую точку многогранника ограничений.

Так ресурс Рабочее время можно увеличить на 4 часа, т.е. довести до 20 часов, а ресурс Пшеничная мука – на 120кг, т.е. довести до 320 кг.

Можно также поставить вопрос о влиянии уменьшения дефицитного ресурса на принимаемый план производства. Ответ на него дает графа **Допустимое уменьшение** отчета по Устойчивости.

Уменьшение рабочего времени на 6 часов, т.е. с 16 до 10 часов не приводит к необходимости остановки оборудования или его переналадки на выпуск другой продукции. При таком сокращении рабочего времени оптимальное решение предусматривает выпуск как черного, так и белого хлеба. Двойственные оценки при этих изменениях остаются теми же самыми.

Предельное уменьшение пшеничной муки допустимо до уровня $200-80=120$ кг.

Относительно недефицитных ресурсов можно поставить только вопрос о том, на сколько именно можно уменьшить недефицитный ресурс. Увеличение такого ресурса не имеет смысла, т.к. не приводит к изменению значения целевой функции и двойственных оценок. Отчет об устойчивости показывает этот факт, фиксируя предельно большое увеличение ресурса Ржаная мука.

Ответ на вопрос о предельном уменьшении недефицитного ресурса также дает Отчет об устойчивости и, в частности его графа **Допустимое уменьшение**. Уменьшать ресурс Ржаная мука целесообразно только до уровня $300 - 120 = 180$ кг. Дальнейшее уменьшение приведет к тому, что этот ресурс станет дефицитным, т.е. изменятся и двойственные оценки всех ресурсов.

Систематизируем проведенный анализ ресурсов в следующей таблице:

Ресурс (ограничение)	Статус	Теневая цена (двойственная оценка)	Оптималь- ное значение	Наимень- шее значение	Наиболь- шее значение
Рабочее время	дефицитный (связывающ.)	200	16	10	20
Ржаная мука	недефицитный (несвязывающ.)	0	300	180	$+\infty$
Пшеничная мука	дефицитный (связывающ.)	5	200	120	320

2.2. Изменения коэффициентов целевой функции

Обратимся теперь к анализу реакции модели на изменения коэффициентов при целевой функции. Как и в предыдущем случае, традиционный анализ рассматривает изменение только одного из коэффициентов, а остальные фиксируются. Интервалы устойчивости, как и при вариации правых частей ограничений, определяются по неизменности двойственных оценок. При этом сами решения (значения x_j остаются неизменными).

Для нашей модели постановка задачи на устойчивость к изменению коэффициентов при целевой функции, может быть сформулирована так: каковы предельно допустимые колебания прибыли за единицу продукции не приводящие к изменению плана выпуска.

Ответ на этот вопрос дает первая таблица отчета по Устойчивости.

Прибыль за единицу ржаного хлеба должна находиться в пределах от 0 до 3, а за единицу белого хлеба – от 2 до $+\infty$.