

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Кузбасский государственный технический  
университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра прикладной механики

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР**

Методические указания к практическому занятию по дисциплине  
«Механика» для студентов направления 280700.62 «Техносферная  
безопасность», специальности 130101.65 «Прикладная геология» и  
по дисциплине «Прикладная механика» для студентов направления  
241000.62 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической  
технологии, нефтехимии и биотехнологии»

Составитель В. Ю. Садовец

Утверждены на заседании кафедры  
Протокол № 8 от 27.02.2014  
Рекомендованы к печати  
учебно-методической комиссией  
специальности 130101.65  
Протокол № 5 от 17.03.2014  
Электронная копия находится  
в библиотеке КузГТУ

Кемерово 2014

## ЦЕЛЬ РАБОТЫ

*Цель работы:* научиться определять реакции связей твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил.

Для достижения поставленной цели необходимо:

1. Ознакомиться с краткими сведениями из теории.
2. Ознакомиться с примером решения типовой задачи.
3. Решить задачу 1 и задачу 2 по варианту, выданному преподавателем.
4. Оформить отчет по практической работе и сдать его преподавателю.

## КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Связью называется тело, которое ограничивает свободу перемещения другого тела в пространстве.

Если силы, приложенные к телу, будут стремиться сдвинуть его по тому или иному направлению, то тело будет воздействовать на связь *с силой давления на связь*. Согласно аксиомам статики, связь с такой же силой будет действовать на тело, но в противоположную сторону. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется *реакцией связи*.

## Уравнения равновесия плоской системы сил

Плоской называется система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.

Произвольную плоскую систему сил можно привести в заданный центр  $O$ . При этом в общем случае система сведется к главному вектору  $\bar{R}$  и главному моменту  $\bar{M}$ . Главный вектор определяется как геометрическая сумма приводимых сил. Его значение  $R$  можно определить либо графически (сложением векторов) либо аналитически (через проекции сил на оси). Для плоской системы сил

$$R_x = \sum X_i, R_y = \sum Y_i \text{ и } M = \sum M_i. \quad (1)$$

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и её главный момент относительно любого центра были равны нулю

$$\bar{R} = 0 \text{ и } \bar{M} = 0. \quad (2)$$

Аналитические условия равновесия плоской системы сил могут быть представлены в трех различных формах.

*Основная форма условий равновесия.* Из условия 2 следует уравнение равновесия твердого тела под действием произвольной системы сил

$$\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0 \text{ и } \sum M_i = 0. \quad (3)$$

*Вторая форма условия равновесия.* Сумма моментов всех сил произвольной плоской системы относительно любых двух центров  $A$  и  $B$  а также сумма проекций этих сил на ось  $x$ , не перпендикулярную отрезку прямой  $AB$ , были равны нулю

$$\sum X_i = 0, \sum M_{Ai} = 0 \text{ и } \sum M_{Bi} = 0 \quad (4)$$

*Третья форма условий равновесия.* Сумма моментов всех сил произвольной плоской системы относительно любых трех центров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащих на одной прямой, были равны нулю

$$\sum M_{Ai} = 0, \sum M_{Bi} = 0 \text{ и } \sum M_{Ci} = 0. \quad (5)$$

В случае когда все действующие на тело силы параллельны друг другу и лежат в одной плоскости, можно направить ось  $x$  перпендикулярно силам, а ось  $y$  параллельно им. Тогда условие равновесия (3) примет вид

$$\sum X_i = 0 \text{ и } \sum Y_i = 0. \quad (6)$$

Другая форма условий равновесия для параллельных сил, получающаяся из равенств (4), имеет вид

$$\sum M_{Ai} = 0 \text{ и } \sum M_{Bi} = 0. \quad (7)$$

При этом точки  $A$  и  $B$  не должны лежать на прямой, параллельной силам.

## Основные типы опорных закреплений

В технике встречаются три основных типа опорных закреплений.

1. *Подвижная шарнирная опора* (рис. 1, опора **A**). Реакция  $\bar{R}_A$  такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.

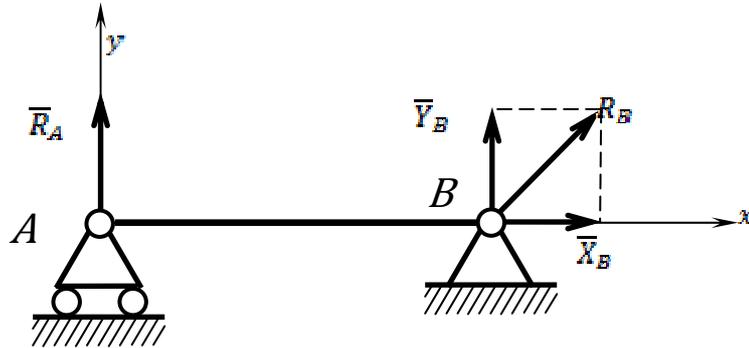


Рис. 1

2. *Неподвижная шарнирная опора* (рис. 1, опора **B**). Реакция  $\bar{R}_B$  опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач эту реакцию необходимо изображать её составляющими  $\bar{X}_B$  и  $\bar{Y}_B$ , направленными по координатным осям.
3. *Неподвижно защемляющая опора* (или жесткая заделка; рис. 2). В этом случае в поперечном сечении балки со стороны заделанного конца действует система сил (реакций) состоящая из силы  $\bar{R}_A$  и момента  $m_A$ . Реакцию  $\bar{R}_A$  (на рисунке не показана), приложенную в точке **A**, представляют её составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ .

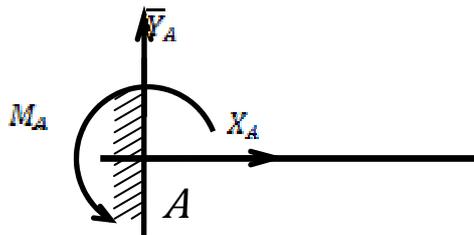
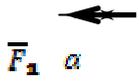


Рис. 2

### ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Дано: Рама (рис. 3) имеет в точке  $A$  неподвижную шарнирную опору, а в точке  $B$  – подвижную шарнирную опору, расположенную под углом  $\beta = 30^\circ$  к горизонтали. На балку действует пара сил с моментом  $M = 50 \text{ кНм}$  и две силы  $F_1, F_2$ , значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице 1.

Таблица 1

Сила				
№ условия	$F_1 = 25 \text{ кН}$		$F_2 = 18 \text{ кН}$	
	точка прилож.	$\alpha^\circ$	точка прилож.	$\gamma^\circ$
1	$D$	60	$E$	75

Требуется: определить реакции в точках  $A$  и  $B$ , вызываемые действующими нагрузками. При окончательных подсчетах принять  $l = 0,5 \text{ м}$ .

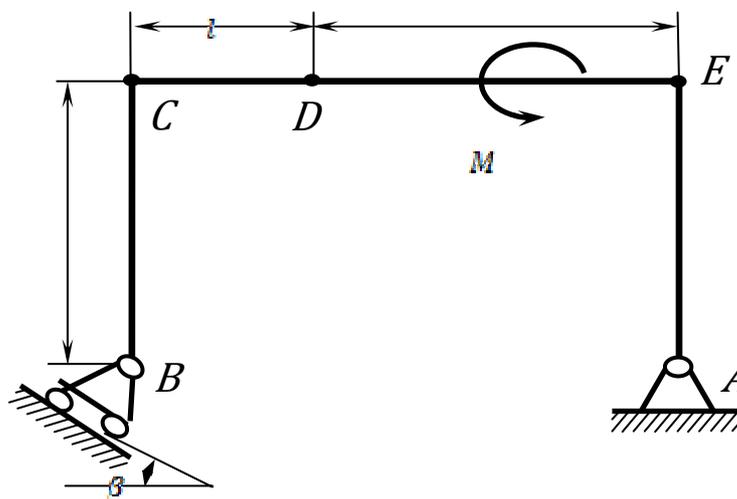


Рис. 3

Решение:

1. Рассмотрим равновесие рамы.

Проведем координатные оси  $xu$  и изобразим действующие на раму силы: силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , пару сил с моментом  $M$  и реакции связей  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$  (реакцию неподвижной шарнирной опоры  $A$  изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости, рис. 4).

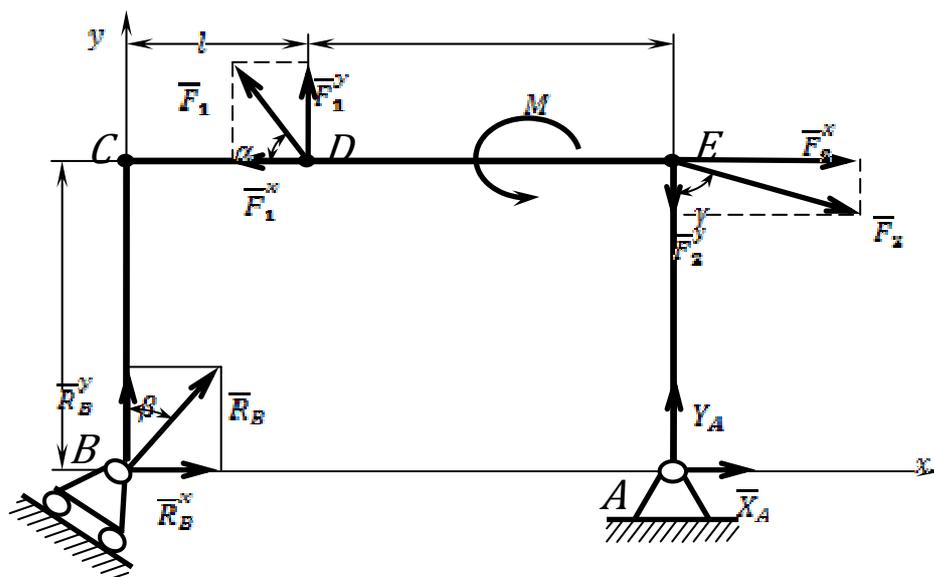


Рис. 4

2. Для полученной плоской системы сил, используя условия (3), составим три уравнения равновесия.

$$X_A + R_B \sin \beta - F_1 \cos \alpha + F_2 \sin \gamma = 0 \quad (8)$$

$$Y_A + R_B \cos \beta + F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \gamma = 0 \quad (9)$$

$$M - R_B (\cos \beta) \cdot 4l + F_1 (\cos \alpha) \cdot 2l - F_1 (\sin \alpha) \cdot 3l - F_2 (\sin \gamma) \cdot 2l = 0 \quad (10)$$

Правило знаков для уравнения суммы проекций на оси: проекция силы считается положительной, если её направление совпадает с выбранным направлением оси, на которую эта сила проецируется и отрицательной, если не совпадает.

При вычислении моментов сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  относительно точки  $A$ , воспользовались теоремой Вариньона. Для этого разложили силу  $\vec{F}_1$  на составляющие  $\vec{F}_1^x$ ,  $\vec{F}_1^y$  ( $F_1^x = F_1 \cos \alpha$ ,  $F_1^y = F_1 \sin \alpha$ ), а силу

$\vec{F}_2$  на составляющие  $\vec{F}_2^x$ ,  $\vec{F}_2^y$  ( $F_2^x = F_2 \cos \gamma$ ,  $F_2^y = F_2 \sin \gamma$ ) и учли, что  $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}^x) + M_A(\vec{F}^y)$ .

Правило знаков для уравнения моментов относительно точки: моменты и моменты сил стремящиеся повернуть систему относительно выбранной точки по ходу часовой стрелки считаются отрицательными, а против хода часовой стрелки положительными.

Подставив в составленные уравнения равновесия, числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

### 3. Определение величин реакций.

Сначала определим реакцию  $R_B$ , выразив её из уравнения (10)

$$R_B = \frac{F \cos \alpha \cdot 2l - F \sin \alpha \cdot 3l - T \sin \gamma \cdot 2l + M}{\cos \beta \cdot 4l} =$$

$$= 7,3 \text{ кН.}$$

Затем из уравнения определяем составляющую реакции  $X_A$

$$X_A = -R_B \sin \beta + F \cos \alpha - T \sin \gamma =$$

$$= -7,3 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,5 - 18 \cdot 0,9659 = -8,54 \text{ кН}$$

Знак минус перед значением найденной реакцией указывает, что она направлена противоположно показанной на рисунке.

Из уравнения определим составляющую реакции  $Y_A$

$$Y_A = -R_B \cos \beta - F \sin \alpha + T \cos \gamma =$$

$$= -7,3 \cdot 0,866 - 25 \cdot 0,866 + 18 \cdot 0,9659 = -10,59 \text{ кН.}$$

Знак минус перед значением найденной реакцией указывает, что она направлена противоположно показанной на рисунке.

Таким образом, значения неизвестных реакций определены:  $X_A = 8,5 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 23,3 \text{ кН}$ ,  $R_B = 7,3 \text{ кН}$ .

## ЗАДАНИЕ

### Задача 1.

Жесткая рама (табл. 2) закреплена в точке  $A$  неподвижным шарниром, а в точке  $B$  подвижным шарниром. На балку действует

пара сил с моментом  $M = 50 \text{ кНм}$  и три силы  $F_1, F_2, F_3$ , значения, направления и точки, приложения которых указаны в таблице 3.

(например, в условии №1 на балку действуют сила  $F_2 = 17 \text{ кН}$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $D$ , сила  $F_3 = 15 \text{ кН}$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $E$ ) и сила  $F_1 = 20 \text{ кН}$  под углом  $45^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $H$ ).

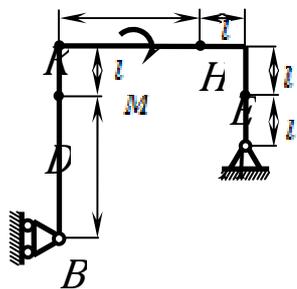
Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$ , вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять  $l = 0,5 \text{ м}$ .

Таблица 2

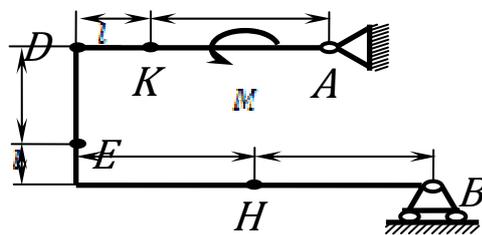
<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>

## Продолжение таблицы 2

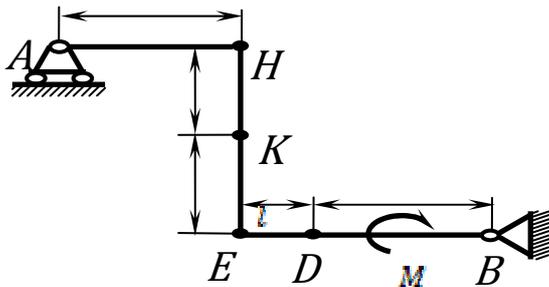
5



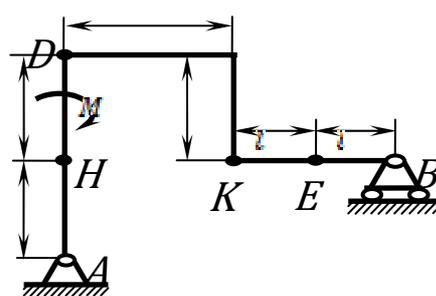
6



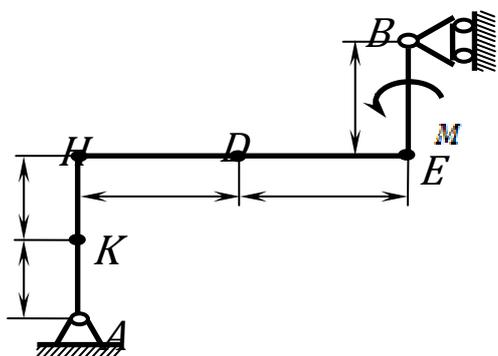
7



8



9



10

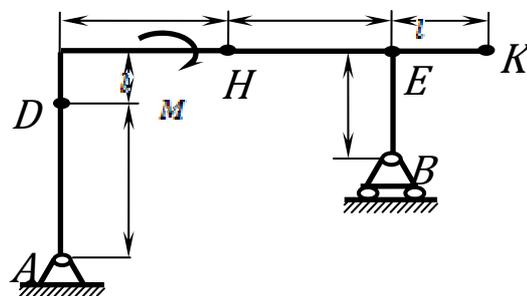


Таблица 3

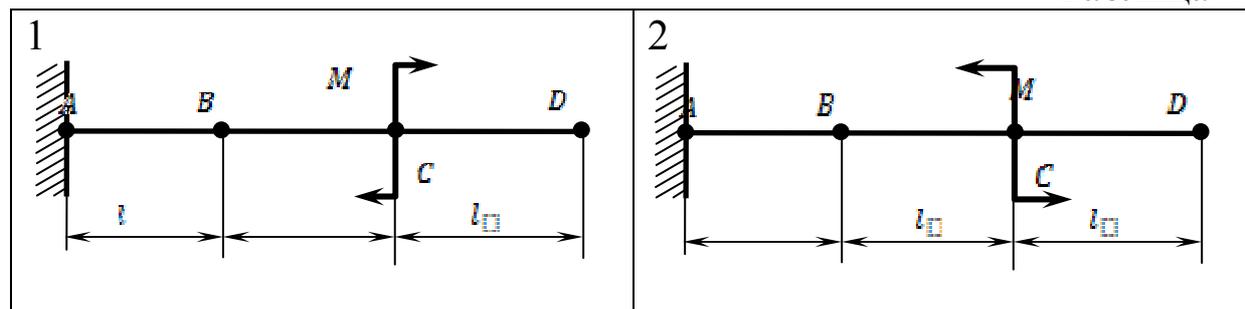
Сила	$\vec{F}_1$ $\alpha$		$\vec{F}_2$		$\alpha$ $\vec{F}_3$		$\vec{F}_4$	
	точка прилож.	$\alpha^\circ$	точка прилож.	$\alpha^\circ$	точка прилож.	$\alpha^\circ$	точка прилож.	$\alpha^\circ$
№ условия	$F_1 = 12$ кН		$F_2 = 17$ кН		$F_3 = 15$ кН		$F_4 = 20$ кН	
1	–	–	<i>D</i>	60	<i>E</i>	60	<i>H</i>	45
2	<i>K</i>	30	–	–	<i>H</i>	45	<i>D</i>	60
3	<i>D</i>	60	<i>H</i>	45	<i>K</i>	30	–	–
4	<i>D</i>	60	–	–	<i>H</i>	45	<i>E</i>	30
5	–	–	<i>K</i>	30	<i>E</i>	60	<i>D</i>	45
6	<i>H</i>	60	<i>E</i>	45	<i>D</i>	30	–	–
7	–	–	<i>E</i>	30	<i>H</i>	60	<i>K</i>	45
8	<i>D</i>	45	–	–	<i>E</i>	60	<i>K</i>	30
9	<i>E</i>	45	<i>H</i>	60	–	–	<i>D</i>	30
10	<i>H</i>	30	–	–	<i>D</i>	45	<i>K</i>	60

## Задача 2.

Балка (табл. 4) закреплена в точке *A* неподвижно защемляющейся опорой. На балку действует пара сил с моментом  $M = 100$  кНм и две силы  $F_1$ ,  $F_2$ , значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице 5.

Определить реакции связей в точке *A*, вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять  $l = 0,5$  м.

Таблица 4



## Продолжение таблицы 4

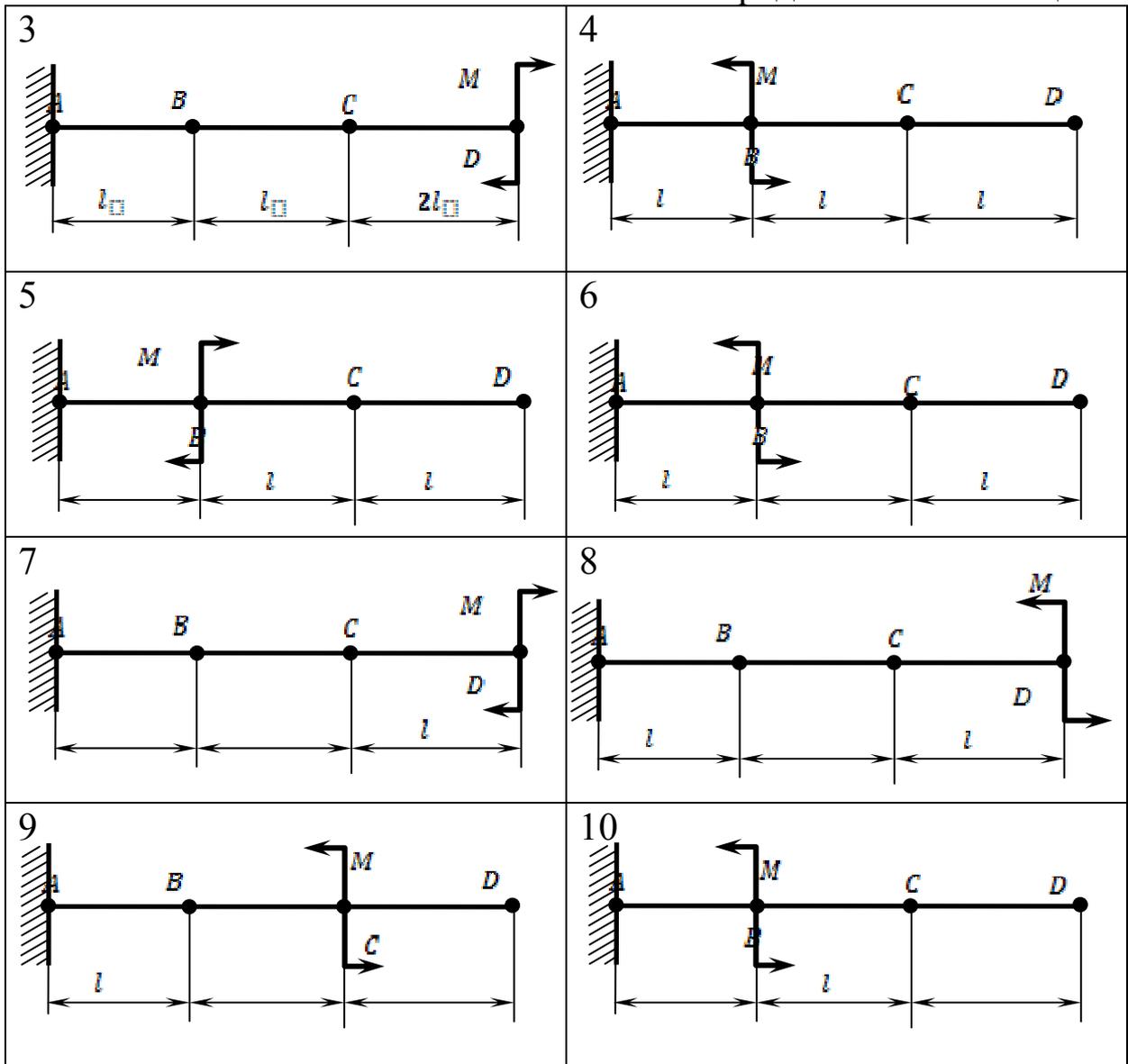


Таблица 5

Сила	$\vec{F}_1$ $\alpha$		$\vec{F}_2$		$\alpha$ $\vec{F}_3$		$\vec{F}_4$	
	$F_1 = 30$ кН		$F_2 = 45$ кН		$F_3 = 75$ кН		$F_4 = 65$ кН	
№ условия	точка прилож.	$\alpha^\circ$	точка прилож.	$\alpha^\circ$	точка прилож.	$\alpha^\circ$	точка прилож.	$\alpha^\circ$
1	–	–	<i>B</i>	60	<i>C</i>	60	–	–
2	<i>B</i>	30	–	–	–	–	<i>D</i>	60
3	–	–	<i>C</i>	45	<i>D</i>	30	–	–
4	<i>D</i>	60	–	–	–	–	<i>B</i>	30
5	–	–	<i>B</i>	30	<i>D</i>	60	–	–
6	<i>C</i>	60	–	–	<i>B</i>	30	–	–
7	–	–	<i>C</i>	30	–	–	<i>D</i>	45
8	<i>B</i>	45	–	–	<i>C</i>	60	–	–
9	–	–	<i>C</i>	60	–	–	<i>B</i>	30
10	<i>D</i>	30	–	–	–	–	<i>C</i>	60

## ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

Отчет по практическому занятию выполняется на отдельных листах формата А4.

В решении по каждой задаче должны быть приведены:

- заданная схема;
- схема нагружений с указанием сил, приложенных в заданных точках, моментов, реакций связей и осей  $x$  и  $y$ ;
- уравнения равновесия;
- порядок определения реакций связей.

Решение задач необходимо сопровождать пояснениями.

Составитель  
Садовец Владимир Юрьевич

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР**

Методические указания к практическому занятию по дисциплине «Механика» для студентов направления 280700.62 «Техносферная безопасность», специальности 130101.65 «Прикладная геология» и по дисциплине «Прикладная механика» для студентов направления 241000.62 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии»

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 03.06.2014. Формат 60×84/16.

Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Уч.-изд. л. 0,6.

Тираж 24 экз. Заказ

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28.

Издательский центр КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А.