

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА

Пусть поставлена задача о решении уравнения Лапласа в круге с центром в начале координат, ограниченном окружностью радиуса a :

$$\Delta U(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < a^2,$$

если на окружности значения искомой функции задаются посредством функции $f(x, y)$:

$$U(x, y) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Поскольку граница области, для которой поставлена задача, является окружностью, то имеет смысл перейти к полярным координатам. Уравнение Лапласа в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1)$$

а граничное условие примет следующий вид:

$$U(a, \varphi) = f(\varphi). \quad (2)$$

Для решения задачи (1)–(2) воспользуемся методом разделения переменных. Представим решение в виде:

$$U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (3)$$

подставляя (3) в (1), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для R и Φ :

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad \Phi'' + \lambda \Phi = 0,$$

где λ — постоянная разделения, которую потребуется определить.

Задачу Штурма–Лиувилля для нахождения собственных функций, необходимых для определения постоянных, входящих в решение, будем ставить по переменной φ , поскольку граничное условие по r (2) является неоднородным. Для получения граничного условия для определения Φ учтем условие однозначности решения в рассматриваемой области:

$$U(r, \varphi + 2\pi) = U(r, \varphi), \quad (4)$$

подставляя (3) в (4), получим:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (5)$$

Таким образом, задача Штурма–Лиувилля примет следующий вид:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (6)$$

Несложно показать, что значения $\lambda < 0$ в спектр не входят, а значение $\lambda = 0$ входит в спектр, вся остальная часть которого соответствует случаю $\lambda > 0$ и собственные значения имеют вид:

$$\lambda_k = k^2, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\Phi_k(\varphi) = C_{1k} \cos(k\varphi) + C_{2k} \sin(k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Функции $R_k(r)$ определяются из уравнения:

$$r^2 R_k'' + r R_k' - k^2 R_k = 0. \quad (7)$$

В случае $k = 0$ уравнение (7) имеет следующий вид:

$$r^2 R_0'' + r R_0' = 0 \iff r R_0'' + R_0' = 0,$$

для получения его решения введем следующую замену:

$$V(r) = R_0'(r),$$

при которой решаемое уравнение примет следующий вид:

$$rV' + V = 0.$$

Последнее уравнения является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя их, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dr}{r},$$

интегрируя которое, получим:

$$\ln(V) = -\ln(r) + C \iff \ln(V) = \ln\left(\frac{C_1}{r}\right),$$

где $C_1 = \exp(C)$.

Таким образом, имеем:

$$V(r) = \frac{C_1}{r} \implies R'_0(r) = \frac{C_1}{r},$$

следовательно:

$$R_0(r) = C_1 \ln(r) + C_2. \quad (8)$$

Поскольку рассматривается внутренняя задача для круга с центром в начале координат, то необходимо потребовать $C_1 = 0$ (иначе при $r = 0$ решение будет неограниченным).

В случае $k > 0$ уравнение (7) является уравнением Эйлера, которое заменой $r = \exp(t)$ сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. После решения последнего и возвращения к исходным переменным, решение (7) принимает вид:

$$R_k(r) = C_{1k}r^k + C_{2k}r^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Так как рассматривается внутренняя задача, то для ограниченности решения необходимо положить $C_{2k} = 0$. Таким образом, общее решение уравнения (1) принимает следующий вид:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)). \quad (10)$$

Для определения постоянных A_k и B_k подставим (10) в (2):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) = f(\varphi), \quad (11)$$

разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos(k\varphi) + \beta_k \sin(k\varphi)), \quad (12)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos(k\tau) d\tau, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin(k\tau) d\tau.$$

Подставляя (12) в (11), получим следующие выражения для постоянных:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_k = \frac{\alpha_k}{a^k} \quad \text{при } k > 0, \quad B_k = \frac{\beta_k}{a^k}.$$

В случае, если рассматривается **внешняя** задача (т.е. (1) выписывается при $r > a$, условие (2) неизменно), весь подход к решению аналогичен, **кроме следующих моментов**:

1) В выражении (9) зануляется константа C_{1k} — из условия ограниченности решения на бесконечности.

2) Общее решение, в отличие от (10), имеет вид:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} r^{-k} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)),$$

а постоянные определяются с использованием (12) и удовлетворяют соотношениям:

$$A_k = \alpha_k a^k, \quad B_k = \beta_k a^k.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Постановка задачи. В круговом секторе $\{(r, \varphi) | 0 \leq r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{6}\}$ найти распределение потенциала электростатического поля при условии, что в нем отсутствуют электрические заряды, на сторонах $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$ потенциал равен нулю, а на стороне $r = 1$ потенциал задан как функция от φ : $\sin(12\varphi)$.

Решение: Итак, поставлена следующая задача — решить уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0,$$

с граничными условиями:

$$U(r, 0) = U(r, \frac{\pi}{6}) = 0, \quad U(1, \varphi) = \sin(12\varphi).$$

Решение этой задачи осуществим с помощью метода разделения переменных — представляя решение в виде

$$U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

получим два обыкновенных дифференциальных уравнения для нахождения $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad \Phi'' + \lambda \Phi = 0.$$

Поскольку однородное граничное условие поставлено по переменной φ , то задачу Штурма–Лиувилля будем ставить для функции Φ :

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Нетривиальные решения этой задачи существуют лишь при $\lambda > 0$. Соответствующие значения λ равны:

$$\lambda_k = 36k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

а собственные функции имеют вид:

$$\Phi_k(\varphi) = \sin(6k\varphi).$$

Уравнение для R при таких значениях λ_k имеет такие решения:

$$R_k(r) = C_{1k}r^{6k} + C_{2k}r^{-6k},$$

сразу полагаем: $C_{2k} = 0$ — поскольку в противном случае граничные условия при $r = 0$ не будут удовлетворены.

Таким образом, общее решение уравнения Лапласа примет вид:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_{1k}r^{6k} \sin(6k\varphi).$$

Постоянные C_{1k} определим посредством подстановки $U(r, \varphi)$ в граничное условие, которое уже разложено в ряд Фурье. Таким образом, получим:

$$C_{11} = 0, \quad C_{12} = 1, \quad C_{1k} = 0, \quad k \geq 3,$$

решение задачи Дирихле имеет вид:

$$U(r, \varphi) = r^{12} \sin(12\varphi).$$