

Метод разделения переменных решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $\{(x, y) | x \in [0, a], y \in [0, b]\}$:

требуется решить уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad (1)$$

со следующими граничными условиями:

$$U(0, y) = \varphi_1(y), \quad U(a, y) = \varphi_2(y), \quad y \in [0, b], \quad (2.1)$$

$$U(x, 0) = \psi_1(x), \quad U(x, b) = \psi_2(x), \quad x \in [0, a]. \quad (2.2)$$

Представим решение задачи (1)–(2.1)–(2.2) в виде:

$$U(x, y) = U_1(x, y) + U_2(x, y), \quad (3)$$

где $U_1(x, y)$ является решением следующей задачи Дирихле:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad (4)$$

$$U_1(0, y) = 0, \quad U_1(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \quad (5.1)$$

$$U_1(x, 0) = \psi_1(x), \quad U_1(x, b) = \psi_2(x), \quad x \in [0, a], \quad (5.2)$$

а $U_2(x, y)$ находится как решение задачи:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad (6)$$

со следующими граничными условиями:

$$U_2(0, y) = \varphi_1(y), \quad U_2(a, y) = \varphi_2(y), \quad y \in [0, b], \quad (7.1)$$

$$U_2(x, 0) = 0, \quad U_2(x, b) = 0, \quad x \in [0, a]. \quad (7.2)$$

Рассмотрим сначала решение задачи (4)–(5.1)–(5.2): представим ее решение в виде:

$$U_1(x, y) = X_1(x)Y_1(y). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (4), получим:

$$X_1''Y_1 + X_1Y_1'' = 0, \Rightarrow \frac{X_1''}{X_1} = -\frac{Y_1''}{Y_1} = -\lambda_1 = \text{const.}$$

Таким образом, функции X_1 и Y_1 удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$X_1'' + \lambda_1 X_1 = 0, \quad Y_1'' - \lambda_1 Y_1 = 0. \quad (9)$$

Рассматривая граничные условия (5.1)–(5.2) заметим, что однородными из них являются только условия (5.1) — т.е. условия по переменной x . Следовательно, задача Штурма–Лиувилля будет ставиться именно для нахождения функций X_{1n} ($X_{1n} \neq 0!$) и значений λ_{1n} , и будет иметь вид:

$$X_1'' + \lambda_1 X_1 = 0, \quad X_1(0) = X_1(a) = 0, \quad (10)$$

ее собственные значения имеют вид:

$$\lambda_{1n} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$X_{1n}(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right). \quad (11)$$

Далее рассмотрим уравнение для нахождения $Y_{1n}(y)$:

$$Y_{1n}'' - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 Y_{1n} = 0, \quad (12)$$

его общее решение (из соображений удобства!) будем искать в виде:

$$Y_{1n}(y) = C_{1n}\chi_{1n}(y) + C_{2n}\chi_{2n}(y),$$

где C_{1n}, C_{2n} — произвольные постоянные, а функции $\chi_{1n}(y)$ и $\chi_{2n}(y)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (12), причем $\chi_{1n}(0) = 0$, $\chi_{2n}(b) = 0$. Такими являются, к примеру, функции: $\chi_{1n}(y) = \sinh\left(\frac{\pi n}{a}y\right)$ и $\chi_{2n}(y) = \sinh\left(\frac{\pi n}{a}(b-y)\right)$ — в дальнейшем и будем рассматривать именно эти функции.

Итак, общее решение (12) имеет вид:

$$Y_{1n}(y) = C_{1n} \sinh\left(\frac{\pi n}{a}y\right) + C_{2n} \sinh\left(\frac{\pi n}{a}(b-y)\right), \quad (13)$$

а следовательно, в соответствии с (8), (11), (13) и принципом суперпозиции, общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$U_1(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_{1n}(x)Y_{1n}(y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_{1n} \sinh \left(\frac{\pi n}{a} y \right) + C_{2n} \sinh \left(\frac{\pi n}{a} (b - y) \right) \right) \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right). \quad (14)$$

Для определения постоянных C_{1n} и C_{2n} , входящих в (14), воспользуемся граничными условиями (5.2).

Подставим (14) в первое из условий (5.2), получим:

$$U_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_{2n} \sinh \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \psi_1(x). \quad (15)$$

Разложим $\psi_1(x)$ в ряд Фурье по синусам, получим:

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_{1n} \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right), \quad (16)$$

где $\psi_{1n} = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right) dx$. Подставляя (16) в (15), будем иметь:

$$C_{2n} = \frac{\psi_{1n}}{\sinh \left(\frac{\pi n}{a} b \right)}.$$

Подставляя (14) во второе из условий (5.2), получим:

$$U_1(x, b) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(C_{1n} \sinh \left(\frac{\pi n}{a} b \right) \right) \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right) = \psi_2(x). \quad (17)$$

Разложим $\psi_2(x)$ в ряд Фурье по синусам, получим:

$$\psi_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_{2n} \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right), \quad (16)$$

где $\psi_{2n} = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin \left(\frac{\pi n}{a} x \right) dx$. Подставляя (16) в (15), будем иметь:

$$C_{1n} = \frac{\psi_{2n}}{\sinh \left(\frac{\pi n}{a} b \right)}.$$

Таким образом, значения постоянных C_{1n} и C_{2n} найдены. Следовательно, найдено решение краевой задачи (4)–(5.1)–(5.2).

Абсолютно аналогично находится решение задачи (6)–(7.1)–(7.2). В связи с этим выпишем только итоговые формулы:

$$U_2(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tilde{C}_{1n} \sinh \left(\frac{\pi n}{b} x \right) + \tilde{C}_{2n} \sinh \left(\frac{\pi n}{b} (a - x) \right) \right) \sin \left(\frac{\pi n}{b} y \right),$$

где

$$\tilde{C}_{1n} = \frac{\varphi_{2n}}{\sinh \left(\frac{\pi n}{b} a \right)}, \quad \tilde{C}_{2n} = \frac{\varphi_{1n}}{\sinh \left(\frac{\pi n}{b} a \right)},$$

$$\varphi_{1n} = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \left(\frac{\pi n}{b} y \right) dy, \quad \varphi_{2n} = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_2(y) \sin \left(\frac{\pi n}{b} y \right) dy,$$