

Метод подбора для решения краевых задач для уравнения Лапласа

Рассмотрим плоскую задачу об отыскании решения уравнения Лапласа. В пространстве R^2 рассматривается множество $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, где через Ω обозначена внутренность $\bar{\Omega}$, а через $\partial\Omega$ — ее граница.

В Ω требуется определить функцию $U(\mathbf{r})$, удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0, \quad (1)$$

по заданным граничным условиям на $\partial\Omega$.

Функция, удовлетворяющая (1), называется *гармонической* в области Ω .

Если на границе заданы значения самой функции U :

$$U|_{\partial\Omega} = \varphi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial\Omega,$$

то имеем дело с *задачей Дирихле*. Если же на $\partial\Omega$ заданы значения нормальной производной функции U :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial\Omega,$$

то имеем дело с *задачей Неймана*.

В дальнейшем будем рассматривать случаи только декартовых $\mathbf{r} = (x, y)$ и полярных координат $\mathbf{r} = (r, \varphi)$, в которых уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

и, соответственно:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Отметим два важных свойства гармонических функций:

1) Если функция U является гармонической в области $\Omega \subset R^2$, а Γ — любая **замкнутая** кривая, **целиком** лежащая в области Ω , то для U справедлива следующая формула:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

2) **Принцип максимума.** Если функция U является гармонической в области $\Omega \subset R^2$, то своего максимального и минимального значения она достигает на границе.

Метод подбора решений является простым и в то же время могучим методом решения краевых задач для уравнения Лапласа. В случае, если он работает, то он является весьма и весьма эффективным.

Основан он на общем для всех линейных задач **принципе суперпозиции**, согласно которому, если имеется n частных решений какой-либо линейной задачи (или уравнения), то их линейная комбинация тоже будет представлять собой решение задачи.

Для уравнения Лапласа в плоском случае известны следующие частные решения:

$$\varphi_1(x, y) = \text{const}, \varphi_2(x, y) = x, \varphi_3(x, y) = y, \varphi_4(x, y) = xy, \varphi_5(x, y) = x^2 - y^2,$$

в полярных координатах функции φ_i выписываются следующим образом:

$$\varphi_1(r, \varphi) = \text{const}, \quad \varphi_2(r, \varphi) = r \cos(\varphi), \quad \varphi_3(r, \varphi) = r \sin(\varphi),$$

$$\varphi_4(r, \varphi) = \frac{r^2}{2} \sin(2\varphi), \quad \varphi_5(r, \varphi) = \frac{r^2}{2} \cos(2\varphi).$$

Суть метода подбора состоит в следующем — согласно упомянутому выше принципу суперпозиции, решение краевой задачи можно представить в виде:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^5 C_i \varphi_i(x, y), \quad (2)$$

где C_i — неизвестные постоянные коэффициенты. Их значения будем определять из граничных условий. Рассмотрим этот процесс на примере задачи Дирихле (случай задачи Неймана рассматривается аналогично).

Пусть граничное условие можно представить в виде линейной комбинации функций φ_i на границе:

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^5 D_i \varphi_i(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где коэффициенты D_i есть постоянные величины, которые нам известны.

Таким образом, выписывая (2) **на границе** из (3) получим, что

$$C_i = D_i.$$

Подставляя найденные C_i в выражение для $u(x, y)$, получаем искомое решение задачи.

Пример. Пользуясь методом подбора, решим задачу Неймана для уравнения Лапласа в круге радиуса a , если на границе поставлено следующее граничное условие: $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = Ax$.

Решение. Поскольку область, в которой рассматривается задача, является кругом, то имеет смысл рассматривать задачу в полярных координатах.

Нормальная производная функции U на границе (на окружности) имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial U}{\partial r},$$

следовательно, граничное условие выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial U(a, \varphi)}{\partial r} = Aa \cos(\varphi). \quad (4)$$

Соотношение (2) в полярных координатах имеет вид:

$$u(r, \varphi) = C_1 + C_2 r \cos(\varphi) + C_3 r \sin(\varphi) + C_4 \frac{r^2}{2} \sin(2\varphi) + C_5 r^2 \cos(2\varphi).$$

Выпишем производную функции U на границе:

$$\frac{\partial U(a, \varphi)}{\partial r} = C_2 \cos(\varphi) + C_3 \sin(\varphi) + C_4 a \sin(2\varphi) + C_5 2a \cos(2\varphi). \quad (5)$$

Приравнявая (4) и (5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях, получим:

$$C_2 = Aa, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0.$$

Таким образом, решение задачи имеет вид:

$$u(r, \varphi) = Aar \cos(\varphi) + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.