

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Саратовский государственный технический университет
Балаковский институт техники, технологии и управления

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению контрольной работы № 2
для студентов заочной формы обучения
по направлению 240100.62 «Химическая технология»

*Одобрено
редакционно-издательским советом
Балаковского института техники,
технологии и управления*

Балаково 2010

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Перед выполнением контрольного задания студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в разделе «Литература» данных методических указаний. В начале каждой контрольной работы номера необходимых для этой работы пособий указываются в квадратных скобках. В методических указаниях даются также некоторые начальные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров.

Задачи контрольной работы выбираются из таблицы вариантов, помещенной в конце методических указаний, согласно тому варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента. Контрольную работу следует выполнять в тетради (отдельной для каждой работы) чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента. В заголовке работы должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы. Заголовок работы надо поместить на обложке тетради; здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и адрес студента. Решения задач располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера. Решения задач излагать подробно и записывать аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи. После получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты.

При выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Литература: [1] ч.1, гл.IX, X; [2] ч.1, гл.VII, VIII; [3] ч.1, гл.X-XII; [4] т.1, гл.VI, [5] гл.IV, V.

Основные теоретические сведения

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение вида $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$.

Таблица интегралов

$$1. \int dx = x + C,$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C,$$

$$11. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C,$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C,$$

При интегрировании используются следующие методы:

1. *Непосредственное интегрирование* – это метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к табличному интегралу.

2. *Подведение под знак дифференциала:*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C, \quad (1)$$

так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x), u = \varphi(x)$.

3. *Метод замены переменной*: Пусть $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t , тогда формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (2)$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной t интегрирования назад к переменной x .

3. *Интегрирование по частям*:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

При интегрировании за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

4. *Интегрирование рациональных дробей*, т.е. отношений двух многочленов $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ (соответственно k -й и n -й степени): $R(x) = P_k(x)/Q_n(x)$, сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на элементарные, всегда интегрируемые дроби вида:
$$\frac{A}{(x-a)^l}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, \quad (4)$$

где l и m – целые положительные числа, а трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней. При этом в случае неправильной дроби предварительно должна быть выделена целая часть.

5. *Интегрирование тригонометрических функций*. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(x)$ -рациональная функция, с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ сводятся к интегралу от рациональной дроби нового аргумента t . При такой подстановке получим:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \text{ тогда } x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

6. *Формула Ньютона-Лейбница* для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (5)$$

если $F'(x) = f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

7. *Вычисление определенных интегралов.* Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x) \geq 0$, и со знаком минус, если $f(x) < 0$, т.е. площадь этой трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (6)$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x=a$ и $x=b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (7)$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то площадь ее находится по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt. \quad (8)$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \quad (9)$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ ($y=c$, $y=d$, $x=0$) и частью графика кривой $y = f(x)$ ($x = \varphi(y)$), вращается вокруг оси Ox (Oy), то объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (V = \pi \int_{ca}^d (\varphi(y))^2 dy.) \quad (10)$$

Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ гладкая (т.е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (11)$$

При параметрическом задании кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ длина дуги кривой, соответствующая изменению параметра t от t_1 до t_2 , вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt. \quad (12)$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то длина дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi. \quad (13)$$

Пример 1. Найти $\int \frac{\ln^8 x dx}{x}$.

Решение. Применим подстановку $t = \ln x$. Тогда $dt = \frac{dx}{x}$ и

$$\int \frac{\ln^8 x dx}{x} = \int t^8 dt = \frac{t^9}{9} + C = \frac{\ln^9 x}{9} + C.$$

Пример 2. Найти $\int (2x + 8) \cos 7x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям (3). Положим

$u = 2x + 8$; $dv = \cos 7x dx$; тогда $du = 2dx$, $v = \int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x$. Получим

$$\int (2x + 8) \cos 7x dx = \frac{2x + 8}{7} \sin 7x - \frac{2}{7} \int \sin 7x dx = \frac{1}{7} (2x + 8) \sin 7x + \frac{2}{49} \cos 7x + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{x^3 - 13x - 13}{x^2 - x - 12} dx$.

Решение. Выделим целую часть из дроби, получим

$$\frac{x^3 - 13x - 13}{x^2 - x - 12} = x + 1 - \frac{1}{x^2 - x - 12} = x + 1 - \frac{1}{(x + 3)(x - 4)}, \text{ т.к. квадратный трехчлен}$$

имеет корни $x = -3$ и $x = 4$. Тогда

$$\frac{1}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x+3)}{(x+3)(x-4)}.$$

Приравняем числители в левой и правой частях: $1 = A(x-4) + B(x+3)$.

Т.к. равенство справедливо при любых x , положим последовательно $x = -3$ и $x = 4$:

$$x = -3, 1 = A(-3-4) + B(-3+3), \quad A = -1/7.$$

$$x = 4, 1 = A(4-4) + B(4+3), \quad B = 1/7.$$

$$\frac{1}{(x+3)(x-4)} = -\frac{1}{7(x+3)} + \frac{1}{7(x-4)};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 13x - 13}{x^2 - x - 12} dx &= \int (x+1) dx - \int \left(\frac{1}{7(x-4)} - \frac{1}{7(x+3)} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{7} \ln|x-4| + \frac{1}{7} \ln|x+3| + C = \\ &= \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x+3}{x-4} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$.

Решение. Применяем универсальную подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x} = \int \frac{1}{8 - 4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 7 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{t^2 - 8t + 15} = \int \frac{2+t-t+3-3}{(t-3)(t-5)} dt =$$

$$\int \frac{(t-3) - (t-5)}{(t-3)(t-5)} dt = \int \frac{dt}{t-5} - \int \frac{dt}{t-3} = \ln|t-5| - \ln|t-3| + C = \ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.$$

Пример 5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x$ и $y = 3 - x^2$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения прямой

прямой $y = 2x$ и параболы $y = 3 - x^2$. Решая

систему уравнений $y = 2x$, $y = 3 - x^2$, полу-

чим $x_1 = -3, x_2 = 1$. Искомая площадь (рис.1)

по формуле (7) равна

$$S = \int_{-3}^1 (3 - x^2 - 2x) dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-3}^1 = 10 \frac{2}{3}.$$

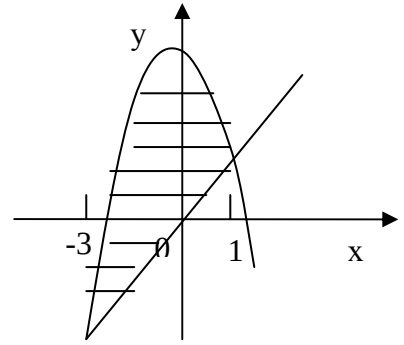


Рис.1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература: : [1] ч.2, гл.IV; [2] ч.2, гл.I; [4] т.2, гл.XIII, [5] гл.IX.

Основные теоретические сведения

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения. Решения, полученные из общего решения при определенном значении постоянной C , называются *частными*. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$ называется *задачей Коши*.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$. ($y' = \varphi(x) f(y)$). Это уравнение сводится к уравнению с разделенными переменными $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ путем почленного деления на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0.$$

Почленное интегрирование последнего уравнения приводит к соотношению $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C$, которое и определяет решение исходного уравнения.

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - однородные функции одного порядка. Функция $f(x, y)$ называется *однородной m -го порядка*, если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y' = f(y/x)$. С помощью подстановки $y = tx$ однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции t .

Уравнение вида $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ называется *линейным*. Если $q(x) = 0$, то уравнение называется *линейным однородным*. Общее решение линейного однородного уравнения получается путем разделения переменных, а общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольной постоянной или методом замены $y = uv$, где $u = u(x), v = v(x)$ -неизвестные функции.

Уравнение n -го порядка $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n -кратным интегрированием.

Дифференциальные уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащие искомой функции, допускают понижение порядка, если взять за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, т.е. полагая $y^{(k)} = z$. Тогда получим уравнение $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Дифференциальные уравнения вида $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащие независимой переменной, допускают понижение порядка, если положить $y' = z$, а за новый аргумент принять сам y . В этом случае $y'', y''', \dots$ выразятся по формулам $y'' = z \frac{dz}{dy}, y''' = z \left(z \frac{d^2 z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right), \dots$ через z и производные от z по y , причем порядок уравнения понизится на единицу.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, где p и q -числа. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*, а если $f(x) \neq 0$, -*неоднородным*.

Квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$. Пусть $D = p^2 - 4q$ - дискриминант квадратного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения строится в зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения:

- 1) $k_1 \neq k_2$ ($D > 0$), тогда $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;
- 2) $k_1 = k_2$ ($D = 0$), тогда $y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$;
- 3) $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ($D < 0$), $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теореме.

Теорема. Если y^* - некоторое частное решение неоднородного уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, и y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = y^* + y_0$.

Частное решение неоднородного уравнения можно найти методом неопределенных коэффициентов:

1. Если $f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$, ($P_n(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены степени n), то:
 - а) $y^* = Q_n(x) e^{ax}$, если a не является корнем характеристического уравнения;
 - б) $y^* = x Q_n(x) e^{ax}$, если a является однократным корнем характеристического уравнения;
 - в) $y^* = x^2 Q_n(x) e^{ax}$, если a является двукратным корнем характеристического уравнения;
2. Если $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ многочлены степени n и m соответственно, α и β - действительные числа, то:
 - а) $y^* = e^{\alpha x} (M_l(x) \cdot \cos \beta x + N_l(x) \cdot \sin \beta x)$, если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения;

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xydy = 0$.

$$(x^2 - t^2 x^2) \cdot dx + 2x \cdot xt \cdot xdt + 2x \cdot xt \cdot tdx = 0,$$

$$x^2(1-t^2+2t^2) \cdot dx + 2tx^3 dt = 0, \quad (1+t^2) \cdot dx + 2tx \cdot dt = 0.$$

Разделим переменные $\frac{dx}{x} + \frac{2t}{1+t^2} dt = 0$ и интегрируем

$$\ln|x| + \ln(1+t^2) = C_1, \quad \ln|x| \cdot (1+t^2) = C_1, \quad |x|(1+t^2) = e^{C_1}.$$

Обозначим $C = e^{C_1}$, $C > 0$. Тогда $|x|(1+t^2) = C$. Заменяя t на $\frac{y}{x}$, получаем:

$x^2 + y^2 = Cx$ - общий интеграл исходного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2x$.

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение 1 порядка. Решим его методом подстановки. Полагаем $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Данное уравнение принимает вид:

$u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т.е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$. Сначала решаем уравнение

$$v' + 2x \cdot v = 0, \quad \frac{dv}{dx} + 2x \cdot v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -2x \cdot dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}.$$

Теперь решаем уравнение

$$u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x, \quad \frac{du}{dx} \cdot e^{-x^2} = 2x, \quad \int du = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx, \quad u = e^{x^2} + C.$$

Итак, общее решение данного уравнения есть $y = u \cdot v = (e^{x^2} + C) \cdot e^{-x^2}$, т.е. $y = 1 + C \cdot e^{-x^2}$.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение второго порядка не содержит явно функцию y . Положим $y' = z$, где z – некоторая функция аргумента x . Если $y' = z$, то $y'' = \frac{dz}{dx}$ и данное уравнение примет вид:

$$(x^2 + 1) \frac{dz}{dx} = 2xz.$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решая его, получим:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2 + 1}; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2xdx}{x^2 + 1}; \quad \ln|z| = \ln|x^2 + 1| + \ln|C_1|,$$

откуда $z = C_1(x^2 + 1)$ или $y' = C_1(x^2 + 1)$.

Определим численное значение C_1 при указанных начальных условиях.

Имеем: $3 = C_1(0 + 1)$. Следовательно, $C_1 = 3$. Решаем уравнение 1-го порядка

$$y' = 3(x^2 + 1); \quad dy = 3(x^2 + 1)dx; \quad y = 3 \int (x^2 + 1)dx = x^3 + 3x + C_2.$$

Определим численное значение C_2 при указанных начальных условиях.

Имеем: $1 = 0 + 0 + C_2$; $C_2 = 1$. Таким образом, $y = x^3 + 3x + 1$ есть частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - y' - 6y = (2x - 1)e^{3x}$, и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 1/5$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение данного уравнения записывается в виде: $y = y_0 + y^*$. Найдем общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения $y'' - y' - 6y = 0$.

Так как корни его характеристического уравнения $k^2 - k - 6 = 0$ действительны и различны ($k_1 = -2, k_2 = 3$), то общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные. Так как число 3 является однократным корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = x(Ax + B)e^{3x} = (Ax^2 + Bx)e^{3x}$.

Отсюда $y'^* = (2Ax + B)e^{3x} + (Ax^2 + Bx)3e^{3x}$,

$y''^* = 2Ae^{3x} + (2Ax + B)3e^{3x} + (2Ax + B)3e^{3x} + (Ax^2 + Bx)9e^{3x}$. Подставляя y, y', y'' в исходное уравнение и сокращая все слагаемые на множитель $e^{3x} \neq 0$, получаем $2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx) - (2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx) - 6(Ax^2 + Bx) = 2x - 1$ или после упрощения $10Ax + 2A + 5B = 2x - 1$. Отсюда следуют равенства $10A = 2, 2A + 5B = -1$, т.е. $A = 1/5, B = -7/25$. Таким образом, общее решение заданного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{7}{25} x \right) e^{3x}.$$

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x} + \left(\frac{2x}{5} - \frac{7}{25} \right) e^{3x} + \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{7}{25} x \right) 3e^{3x}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 1/5$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -2C_1 + 3C_2 - \frac{7}{25} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Из системы уравнений находим $C_1 = 63/125$, $C_2 = 62/125$. Итак, искомое частное решение имеет вид: $y = \frac{63}{125}e^{-2x} + \frac{62}{125}e^{3x} + \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x\right)e^{3x}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение: $y'' = 4y' - 3z'$. Подставляем $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство: $y'' = 4y' - 3(2y - 3z)$, $y'' - 4y' + 6y = 9z$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ y'' - 4y' + 6y = 9z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем z через y и y' :

$$z = \frac{4y - y'}{3}.$$

Подставляем значение z во второе уравнение последней системы:

$$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3}, \text{ т.е. } y'' - y' - 6y = 0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решаем его: $k^2 - k - 6 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ и $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$ - общее решение уравнения. Находим функцию z . Значения y и $y' = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x}$ подставляем в выражение z через y и y' . Получим: $z = 2C_1e^{-2x} + \frac{1}{3}C_2e^{3x}$.

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}, \quad z = 2C_1e^{-2x} + \frac{1}{3}C_2e^{3x}.$$

ЗАДАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

I. Найти неопределенные интегралы. В двух первых примерах проверить результаты дифференцированием.

1. а) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x} dx,$

б) $\int (x + 1) \sin x dx,$

в) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x - 3} dx,$

г) $\int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x}.$

2. а) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$, б) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$,
 в) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx$, г) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
3. а) $\int \frac{x^2}{x^3 + 6} dx$, б) $\int x \ln 2x dx$,
 в) $\int \frac{x^3 - 2}{x^2 - 3x + 2} dx$, г) $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 1}$.
4. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$, б) $\int \arcsin 3x dx$,
 в) $\int \frac{x^3 - x^2 - 4x - 1}{x^2 - x - 6} dx$, г) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.
5. а) $\int \frac{x^2}{9 + x^6} dx$, б) $\int (6 - 5x)e^{-3x} dx$,
 в) $\int \frac{x^3 - 3}{x^2 + 6x + 7} dx$, г) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.
6. а) $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$, б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{8x - 1} dx$,
 в) $\int \frac{x^3 - x^2 - 10x - 1}{x^2 - x - 12} dx$, г) $\int tg^5 x$.
7. а) $\int \sin x e^{\cos x} dx$, б) $\int \arccos 4x dx$,
 в) $\int \frac{x^3 - 14x}{x^2 - 16} dx$, г) $\int tg^4 x dx$.
8. а) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, б) $\int (6x - 3) \cos 2x dx$,
 в) $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 3x + 4}{x^2 + 4x - 5} dx$, г) $\int \frac{dx}{1 + 3 \sin^2 x}$.
9. а) $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$, б) $\int x \arcsin x dx$,
 в) $\int \frac{x^3 - 7x}{x^2 - 9} dx$, г) $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^3 x} dx$.
10. а) $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg}^3 x}$, б) $\int (x + 2) \cos x dx$,
 в) $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x - 2} dx$, г) $\int \sin^4 2x dx$.

II. Вычислить несобственный интеграл или показать его расходимость.

11. $\int_2^\infty \frac{x dx}{x^2 - 1}$. 12. $\int_1^\infty \frac{dx}{(3+x) \ln^2(3+x)}$. 13. $\int_0^\infty x e^{-x} dx$.
 14. $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^2 - 4x + 7}$. 15. $\int_{\pi/2}^\infty x \cos 2x dx$. 16. $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

$$17. \int_0^{\infty} \frac{\arctg 4x dx}{16x^2 + 1}. \quad 18. \int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}. \quad 19. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{5 + 3 \sin x}. \quad 20. \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

III. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

$$21. y = x^3, y = \sqrt{x}.$$

$$22. y = \frac{5}{x}, y = 6 - x.$$

$$23. y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x.$$

$$24. y = x^2 + 2, y = 4 - x^2.$$

$$25. y = -x^2 + 1, y = x - 1. \quad 26. y = x^2 - 4x + 4, y = x.$$

$$27. y = \frac{1}{4}x^2, y^2 = 4x.$$

$$28. y = \frac{6}{x}, y = 7 - x.$$

$$29. y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7. \quad 30. y = 2x - x^2, y = -x.$$

IV. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

$$31. \text{ а) } xy y' = x^2 + y^2,$$

$$\text{ б) } y' - \frac{y}{x} = x.$$

$$32. \text{ а) } (x - y)dx + (x + y)dy = 0, \quad \text{ б) } xy' - 2y = 2x^4.$$

$$33. \text{ а) } y^2 + x^2 y' = xy y',$$

$$\text{ б) } x^2 y' + xy + 1 = 0.$$

$$34. \text{ а) } y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x},$$

$$\text{ б) } xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}.$$

$$35. \text{ а) } y' = \frac{x+y}{x-y},$$

$$\text{ б) } xy' + y = \sin x.$$

$$36. \text{ а) } xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y,$$

$$\text{ б) } (1 - x^2)y' + xy = 1.$$

$$37. \text{ а) } (3x + y)y' = x + 3y,$$

$$\text{ б) } x^2 y' = 2xy + 3.$$

$$38. \text{ а) } (x - y)ydx - x^2 dy = 0,$$

$$\text{ б) } y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

$$39. \text{ а) } xy' + y \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) = 0,$$

$$\text{ б) } xy' + y = \ln x + 1.$$

$$40. \text{ а) } y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

$$\text{ б) } y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x.$$

V. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

$$41. y'' = y' e^y, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$42. y'' = \operatorname{arctg} x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$43. y'^2 + 2yy'' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$44. y'' = \frac{x}{e^{2x}}, \quad y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = -1/4.$$

$$45. yy'' + y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$46. y''' = x \sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 1.$$

$$47. y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2, \quad y(1) = \pi/2, y'(1) = 2.$$

$$48. y''' = \cos 4x, \quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{15}{16}, y''(0) = 0.$$

$$49. 2yy'' = y'^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$50. y''' = \frac{6}{x^3}, \quad y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1.$$

VI. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

$$51. y'' - 5y' + 6y = 2\cos x, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1/2.$$

$$52. y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1, \quad y(0) = -3, y'(0) = -1/5.$$

$$53. y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3/4.$$

$$54. y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, y(0) = 3, \quad y'(0) = 9.$$

$$55. y'' + 4y' = \sin 2x, y(0) = 1/4, \quad y'(0) = 0.$$

$$56. y'' + y' = e^{-x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$57. y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$58. y'' + 2y' - 8y = 3\sin x, \quad y(0) = -1, y'(0) = -3/2.$$

$$59. y'' + y' - 2y = 6x^2, \quad y(0) = -4, y'(0) = -1.$$

$$60. y'' - 4y' = 8x^3, \quad y(0) = 2, y'(0) = -3.$$

Таблица вариантов для выбора контрольных заданий

Вариант	Контрольная работа №2
1	1 11 21 31 41 51
2	2 12 22 32 42 52
3	3 13 23 33 43 53
4	4 14 24 34 44 54
5	5 15 25 35 45 55
6	6 16 26 36 46 56
7	7 17 27 37 47 57
8	8 18 28 38 48 58
9	9 19 29 39 49 59
0	10 20 30 40 50 60

Литература

Основная

1. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н.Лунгу, В.П.Норин, Д.Т.Письменный, Ю.А.Шевченко; под ред. С.Р.Федина. - 3-е изд., испр. - М.:Айрис-пресс, 2005. - 592 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2007. - 608 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник для втузов: в 2-х т. / Н.С.Пискунов. – М.: Интеграл-пресс, 2002. - Т.2. – 544 с.

Дополнительная

4. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш. шк., 2005.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. М.: ОНИКС 21 век. Изд-во Мир и образование, 2006.
6. Зими́на О.В. Высшая математика / О.В. Зими́на, А.И. Кириллов, Т.А.Сальников; под ред. А.И.Кириллова. - 3-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 368 с.
7. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: типовые расчеты. Учебное пособие для ВУЗов. Лань. 2008.
8. Шапкин А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, матем. статистике, математическому программированию с решениями. Москва, ИТК, Дашков и К. 432 с, 2006.