



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДО
С.И. Качин

« ____ » _____ 2012 г.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
(МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1)**

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлениям
140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»,
140400 «Электроэнергетика и электротехника»,
200100 «Приборостроение»,
221700 «Стандартизация и метрология»,
280700 «Техносферная безопасность»

Составители

Л.И. Терехина, И.И. Фикс

Семестр	2
Кредиты	4
Лекции, часов	8
Практические занятия, часов	8
Индивидуальные задания	№ 1, № 2, № 3, № 4
Самостоятельная работа, часов	146
Формы контроля	экзамен

Издательство

Томского политехнического университета
2012



УДК 517

Дифференциальное исчисление (Математический анализ 1): методические указания и индивидуальные задания для студентов ИДО, обучающихся по напр. 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника», 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 200100 «Приборостроение», 221700 «Стандартизация и метрология», 280700 «Техносферная безопасность» / сост. Л.И.Терехина, И.И.Фикс; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 125 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики ФТИ «___» _____ 2012 года, протокол № ____.

Зав. кафедрой ВММФ

профессор, доктор физ.-мат. наук _____ А.Ю. Трифонов

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Дифференциальное исчисление» («Математический анализ 1») предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника», 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 200100 «Приборостроение», 221700 «Стандартизация и метрология», 280700 «Техносферная безопасность». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Дифференциальное исчисление» («Математический анализ 1») изучается во втором семестре первого курса студентами технических специальностей ИДО. Студенты, обучающиеся по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника» изучают дисциплину «Математический анализ 1», а обучающиеся по направлениям 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника», 200100 «Приборостроение», 221700 «Стандартизация и метрология», 280700 «Техносферная безопасность» – дисциплину «Дифференциальное исчисление».

Задачами дисциплины являются:

- развитие математической интуиции;
- воспитание математической культуры;
- формирование навыков, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- овладение студентами необходимым математическим аппаратом, дающим возможность анализировать, моделировать и решать технические задачи
- воспитание у студентов отношения к математике как к инструменту исследования и решения технических задач, необходимому в их дальнейшей работе.

В результате изучения дисциплины студент должен *знать* основные понятия дифференциального и интегрального исчислений (предел, производная, дифференциал, неопределенный и определенный интегралы и их применение к решению прикладных задач); *уметь* применять изученные методы для решения профессиональных задач, устанавливать границы применимости методов, уметь анализировать найденные решения; *владеть* навыками применения современного математического инструментария для решения технических задач, методиками построения, анализа и применения математических моделей; *иметь опыт* применения математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов исследования, аналитического и численного решения задач.

Дисциплина «Дифференциальное исчисление» («Математический анализ 1») является базовой дисциплиной естественно-научного цикла (Б2).

Для её успешного усвоения необходимы математические знания и умения на уровне среднего образования, а именно, необходимо свободно оперировать с простыми дробями, целыми и дробными степенями, с формулами сокращенного умножения, строить графики основных элементарных функций, находить области определения элементарных функций, оперировать с логарифмами.

Пререквизитами для данной дисциплины являются «Информатика» (Б2, В2) и «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Предел и непрерывность функции

Предмет анализа. Функция, способы задания. Основные элементарные функции, их графики и область определения. Гиперболические функции. Понятие сложной и обратной функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел функции, его геометрический смысл. Предел последовательности. Теоремы о пределах. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые величины, основные соотношения эквивалентности. Неопределенности и методы их раскрытия. Односторонние пределы. Непрерывность в точке и на интервале. Классификация точек разрыва. Теоремы о непрерывных функциях.

Рекомендуемая литература: [1, глава III, IV], [2, глава II], [3, глава II, с. 67–93, с. 93–102; 102–108], [6, с. 3–40], [4, ч. 1, с. 149–162, с. 162–165], [5, глава 1, п.п. 1.1–1.2, п. 1.3], [6, с. 3–39, с. 40–51].

Методические указания

Необходимо освоить методы вычисления пределов функций и числовых последовательностей, используя различные приемы, в том числе, замечательные пределы, проводить сравнение бесконечно малых величин и замену их на эквивалентные, определять порядок малости бесконечно малых величин, исследовать функцию на непрерывность, определять точки разрыва функции и их характер.

Тема 2. Производная функции одной переменной

Задача о касательной. Средняя и мгновенная скорость. Приращение аргумента и приращение функции. Понятие производной функции. Физический и геометрический смысл производной. Связь непрерывности и дифференцируемости функции. Правила дифференцирования. Таблица производных. Метод логарифмического дифференцирования. Дифференцирование неявной, показательной, степенной и параметрически заданной функции. Дифференциал функции, его математический, геометрический и физический смысл. Свойства дифференциала, инвариантность его формы. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правило Лопиталя.

Рекомендуемая литература: [1, глава IV, глава VIII, с. 261–267], [2, глава III, глава V], [3, глава III, глава IV, с. 192–198], [6, с. 76–78], [6, с. 52–75], [4, ч. 1, с. 165–181, с. 185–188], [5, глава 2, п. 2.1, глава 3, п. 3.1].

Методические указания

Необходимо научиться дифференцировать функции любого типа: сложные, заданные параметрически, показательно-степенные, используя правила дифференцирования и таблицу производных, находить производные и дифференциалы высших порядков, использовать производные для вычисления пределов функций.

Тема 3. Приложения производной

Возрастание и убывание функции на интервале. Экстремумы. Необходимое и достаточные условия существования экстремума функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Задачи смыслового содержания. Выпуклость, вогнутость кривой, точки перегиба, необходимое и достаточное условия. Асимптоты, понятие, виды асимптот. Схема отыскания вертикальных асимптот. Нахождение параметров наклонных асимптот. Полное исследование функций и построение графиков. Касательная и нормаль к кривой. Геометрические и физические приложения.

Рекомендуемая литература: [1, глава IX, с. 291–304], [2, глава V], [3, глава III, стр. 139–146, стр. 183–186, глава IV, с. 165–192], [6, с. 78–118, с. 119, с. 124–125], [4, ч. 1, с. 175–177, 189–197], [5, глава 3, п. 3.2, 3.3].

Методические указания

Необходимо изучить схему полного исследования функции и схемы исследования функции на экстремум и нахождение промежутков возрастания и убывания, исследование на выпуклость и вогнутость и определение точек перегиба, а также схемы нахождения вертикальных и наклонных асимптот графика функции. Научиться применять полученные в ходе исследования результаты к построению графика функции. Находить наибольшее и наименьшее значения функции на интервале. Использовать производные для составления уравнений касательных и нормалей к кривым.

Тема 4. Функции нескольких переменных

Понятие функции нескольких независимых переменных. Область определения. Предел и непрерывность. Частные производные функций, их геометрический смысл. Частные и полный дифференциалы функции. Производная сложной функции. Полная и частная производные. неявные функции и их дифференцирование. Производные и дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы полного

дифференциала. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям. Экстремум функции двух независимых переменных, понятие, необходимые и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Рекомендуемая литература: [1, с. 457–461, 477–500, глава XIV, с. 502–510], [2, глава VIII], [3, глава VII, с. 341–368, 387–398], [6, с. 126–142, с. 144–147], [4, ч. 1, с. 208–224], [5, глава 4, п. 4.1, 4.2].

Методические указания

Необходимо находить частные производные функций нескольких переменных различных типов, находить полный дифференциал функции нескольких переменных, проводить исследование на экстремум функции двух переменных.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематика практических занятий

1. Вычисление пределов функций и числовых последовательностей. Эквивалентные бесконечно малые величины. Непрерывность функции (2 часа).

2. Дифференцирование функций. Производные показательной, степенной функций, функций, заданных параметрически, нахождение производных и дифференциалов высших порядков, вычисление пределов по правилу Лопиталя (2 часа).

3. Нахождение асимптот графика функции. Исследование на экстремум. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба. Полное исследование функции (2 часа).

4. Функции нескольких переменных: область определения, дифференцирование, полный дифференциал функции, частные производные высших порядков, исследование на экстремум (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком предусмотрено выполнение четырёх индивидуальных домашних заданий. Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач. Номера индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) соответствуют темам раздела «Содержание теоретического раздела дисциплины».

Студент выполняет **вариант индивидуального домашнего задания**, номер которого совпадает с двумя последними цифрами шифра его зачётной книжки. Например, если номер зачетной книжки 3-3В11/14, то студент выбирает вариант индивидуального домашнего задания под номером 14, если шифр 3-3В11/20, то номер ИДЗ 20, если две последние цифры шифра больше 20, то для определения номера варианта ИДЗ от этих цифр надо отнять 20. Например, если шифр 3-3В11/30, то номер ИДЗ 10, если шифр 3-3В11/36, то номер ИДЗ 16 и т.п.

Индивидуальные задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и высылаются на проверку преподавателю.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, в обязательном порядке получают рецензию на каждое индивидуальное задание. Правильно выполненные работы студенту не возвращаются.

При оформлении необходимо соблюдать следующие требования:

1. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно (в отдельной тетради для студентов КЗФ и в отдельном файле для студентов ДОТ).

2. Обязательно должен быть титульный лист. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр.

3. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.

4. Обязательно прилагается список использованной литературы, в который включается рабочая программа и методические указания, в соответствии с которыми выполнены задания.

5. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания. Перед решением следует записать текст условия задачи.

6. Решения всех задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.

7. В случае не соответствия работы требованиям к оформлению студент получает оценку «не зачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена на проверку преподавателю.

8. Студент, не получивший положительной аттестации по всем индивидуальным заданиям, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

4.2. Варианты домашних заданий и методические указания**4.2.1. Индивидуальное задание №1 «Предел. Непрерывность»****Вариант 1****1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6n}{7-9n}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sqrt{9x^2 + 7x + 1}}{5(1 - 3x^2 + x)}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 4(n+1)!}{n^2 (n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x - 6 \cdot 7^x}{8 \cdot 5^{x-2} - 3^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 3n} - \sqrt{2n^2 + 4n - 3})$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 4x - 4}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+3}{5n-2} \right)^{6n+1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{1 - \sqrt{3x-2}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{(3n+4)^3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 9x}{1 - \sqrt[6]{7x^2 + 1}}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\arcsin(\sqrt{x+9} - 3),$

2) $e^{x^2 \cdot \sin 3x^2} - 1$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1}{x^3 + 27x^2}$

2) $y = 1 - 2^{\frac{5}{3-x}}$

3) $y = \begin{cases} 2x-1, & x < -1 \\ 1-\sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x^2, & x > 1 \end{cases}$

Вариант 2**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 3n^3 + 5n^2}{1 + 2n - 4n^2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 3\sqrt{2x + 4}}{2 - 7x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - 3n!}{4n + 4n!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 5 \cdot 6^x}{5^x - 6^{x-1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 5n + 2} - \sqrt{3n^2 - 9n})$

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x - 12}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n}{2n^2 + 5} \right)^{-4n+5}$

9) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+7} - 2}{1 - \sqrt{3x+10}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n + 2) \arcsin \frac{7n^2}{5n^3 + 3n^2 - 4}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1-6x} - \sqrt[5]{1+3x}}{7x}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $3x \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2},$

2) $1 - \cos \frac{2x^3}{5}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{3x-7}{x^2+5x}$

2) $y = \frac{1}{\frac{1}{2+5^{3-x}}}$

3) $y = \begin{cases} 1-x^2, & x < -3 \\ 6x-2, & -3 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{x+2}-5, & x > 2 \end{cases}$

Вариант 3**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 4\sqrt{n}}{\sqrt{1 + 4n^2}}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)(5 - 7x)}{x^2 - x + 6}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{n^2(n)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x + 4 \cdot 6^x}{3^{2x} - 5^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 7n + 1} - \sqrt{n^2 + 4n - 6})$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n + 4}{5n + 9} \right)^{1+3n}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2\sqrt{x}}{\sqrt{5x+4} - 3}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (8n + 3)^2 \ln \left(1 + \frac{1}{(3n+1)(4n+3)} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{x(e^{-5x} - 1)}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\arcsin(\sqrt{25 + x^2} - 5),$

2) $2^{x^4 \cdot \arctg^3 \sqrt{x}} - 1$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{x+6}{x^3-1}$

2) $y = \frac{2}{\frac{4}{5+8^{x+9}}}$

3) $y = \begin{cases} 1+3x^2, & x \leq 0 \\ 2-\sqrt{1-x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 4x-5, & x > 1 \end{cases}$

Вариант 4**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2(1-7n^2)}{(1+5n^2)^2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x + 7} - x}{2 + 5x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot n! - 3(n-1)!}{2n! + (n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+2} + 5^{x-3}}{2^{2x} - 3 \cdot 5^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 5} - \sqrt{n^2 - 5n + 1})$

8) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 8x + 7}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n+7}{9n+1} \right)^{5n}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{2 - \sqrt{9x-5}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 + 3n) \left(1 - \cos \frac{1}{5n} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \operatorname{tg} 2x}{4x + \operatorname{arctg} 7x}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $x^2 \cdot \arcsin \sqrt[5]{x^4},$

2) $\ln(1 + x \cdot \sqrt{\sin^5 x})$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$

2) $y = 5 - 3^{\frac{1}{x-4}}$

3) $y = \begin{cases} 5 + 2x, & x < -1 \\ (2x+1)^2, & -1 \leq x \leq 3 \\ 5 + \sqrt{10+2x}, & x > 3 \end{cases}$

Вариант 5**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)^2}{2-5n\sqrt{2n^2-1}}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2(1-x)}{(1-3x)^2(x-3)}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - 5(n+1)!}{n! + 2(n+1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^{x-2} - 3^{x+2}}{4x^3 - 5 \cdot 4^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n^2 - 8n} - \sqrt{5n^2 + n + 1})$

8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{9 - 6x + x^2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-3} \right)^{7n-1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{\sqrt{3x-5} - 2}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - 2) \operatorname{arctg} \frac{3}{6n^2 + 7}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 11x}{\sqrt[7]{1-3x^2} - 1}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\ln(1 + x^3 \cdot \sqrt{x^5})$,

2) $\operatorname{tg} 2x - \sin 2x$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1-x^2}{x^2+x}$

2) $y = \frac{\frac{1}{4+7^{3x}}}{\frac{1}{1-7^{3x}}}$

3) $y = \begin{cases} -4, & x < 0 \\ 3x - x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 3 + x, & x > 3 \end{cases}$

Вариант 6**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n}{5 - n + 6n^2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 5} + x}{(1 + 5x)^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)! - (n-1)!}{n! + 3(n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 3^{x+1}}{4 \cdot 3^{x-3} - e^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 - n - 2} - \sqrt{3n^2 + 2n + 7})$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n - 4}{7n + 5} \right)^{2n+7}$

9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+18} + 2x}{\sqrt{2x+5} - 1}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - n) \arcsin^2 \frac{1}{5n+3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x} - \sqrt[3]{1+7x}}{\ln(1+9x)}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\ln(1 + \sqrt{x^3 \sin^3 5x})$

2) $\sqrt{4x^2 + 1} - 1 - \sqrt{x^3}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{7x+5}{x^2-16}$

2) $y = \frac{1}{\frac{1}{3+4^{x-4}}}$

3) $y = \begin{cases} 2+3x^2, & x \leq 0 \\ 5x+2, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{7x+2}-4, & x > 2 \end{cases}$

Вариант 7**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 4\sqrt{n}}{5\sqrt{2n+3}}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 3}{(1 - 3x)(2 + 5x)^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)! + 3(n-1)!}{5(n+1)n! + n^6}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{x-1} - 2^{2x}}{3 \cdot 5^{x+1} - 2^{x-1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{7n^2 + 5n - 1} - \sqrt{7n^2 + 4n + 2})$

8) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 16}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 - 5}{4n^2 + 7} \right)^{3n^2}$

9) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+6} - 4}{\sqrt{3x-6} - 3}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \sin^2 \frac{1}{(3n-1)^2}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\ln(1 - \sqrt[3]{x^2 \cdot \operatorname{tg} x})$,

2) $\operatorname{arctg} \sqrt[2]{3\sqrt{4x^5}}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{x}{(2x+1)^2}$

2) $y = 4 + 3^{\frac{1}{2x+3}}$

3) $y = \begin{cases} 2x, & x < -2 \\ 2 - \sqrt{4 - x^2}, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2x^2 + 3, & x > 2 \end{cases}$

Вариант 8

1. Найти пределы

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n}{2 - 4n^4}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n! + 3(n+2)!}{n^2(n-1)!}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n + 2} - \sqrt{4n^2 - 6n + 4})$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n}{n^2 + 4n + 3} \right)^{7n-1}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \operatorname{arctg}^4 \frac{1}{5n-3}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{1-3\sqrt{5x^2+x}}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x - 5^{2x}}{5 \cdot 4^x - 2 \cdot 5^{2x-2}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - 5x + x^2}{x^2 + x - 20}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{4 - \sqrt{x+16}}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-6x} - e^{5x}}{\sqrt{3x+1} - 1}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\arcsin(\sqrt{x^2+7} - \sqrt{7})$,

2) $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{x^3 + 4x}{2} \right)$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1}$

2) $y = \frac{1}{\cos 4x}$

3) $y = \begin{cases} 2-x^3, & x < 0 \\ 1+(x+1)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{3+x^2}, & x > 1 \end{cases}$

Вариант 9**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2 + n}}{1 - 7n}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{5 - 4x^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)! + 3(n+1)!}{n^2(n+1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} - 5^x}{5^{x+1} - 9 \cdot e^{2x}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 3n - 1} - \sqrt{2n^2 - 7n + 3})$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 3x - 14}{x^2 + 3x - 10}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+3}{8n-11} \right)^{5n-7}$

9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3\sqrt{x-2}}{x^2 - 9}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \frac{1}{7n-3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(9x^2 + 1)}{1 - \sqrt{6x^2 + 1}}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x},$

2) $1 - \cos^{35} x$

3. Исследовать на непрерывность функции

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2-x}$$

$$2) y = 5 - 6 \frac{1}{x+2}$$

$$3) y = \begin{cases} x-2, & x \leq 2 \\ 4-3x^2, & 2 < x < 4 \\ 3\ln x + 2, & x \geq 4 \end{cases}$$

Вариант 10

1. Найти пределы

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+5} - 3n^2}{3 + 4n - 5n^3}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - 3(n+2)!}{5n(n+1)!}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 4} - \sqrt{n^2 + 7n - 2})$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+4} \right)^{5n+4}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 1) \left(1 - \cos \frac{5}{n+1} \right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 5x - 4}{1 - 3x - 2x^2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 5^x}{6^x - 9 \cdot 5^{x+2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 3x + 2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x^2 - 4}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-5x^2} - 1}{3x \cdot \ln(1-6x)}$$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\sqrt[5]{2x+1} - 1 - x^2$,

2) $\frac{5x^3 + 4x^2}{8x + 5}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1}{\sqrt{9 - 25x^2}}$

2) $y = \frac{1}{\frac{3}{7 + 4x - 5}}$

3) $y = \begin{cases} 1 + \cos x, & x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x}, & x > 3 \end{cases}$

Вариант 11**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-7}{2-5n}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x \cdot \sqrt{4x^2 - 5x + 2}}{1 - 3x - x^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - 2(n-1)!}{n(n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 2 \cdot 5^x}{7 \cdot 4^x - 5^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 4})$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{4x - 2x^2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+4} \right)^{-4n}$

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{2 - \sqrt{3x-2}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n-3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{1 - \sqrt[3]{5x^2 + 1}}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\arcsin(\sqrt{x+4} - 2)$

2) $e^{-4x \cdot \sin 5x} - 1$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1}{x^4 - 8x}$

2) $y = 2 + \frac{3}{8^{x-5}}$

3) $y = \begin{cases} x-2, & x < -3 \\ -\sqrt{1+x^2}, & -3 \leq x \leq \sqrt{3} \\ -2, & x > \sqrt{3} \end{cases}$

Вариант 12**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n}{n - 4n^2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5\sqrt{x}}{2 - 7x^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 3n!}{n + 4(n+1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 4 \cdot 3^x}{2^x - 4^{x-1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5} - \sqrt{2n^2 + 4n})$

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{3x - x^2 + 10}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 4} \right)^{3n}$

9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x+8} - 2}{1 - \sqrt{3x+7}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+4) \arcsin \frac{n}{n^2 - 3n}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+5x} - \sqrt[4]{1+2x}}{3x}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{5}$

2) $1 - \cos \frac{3x}{7}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{x+2}{x^3 - 9x}$

2) $y = \frac{5}{\frac{1}{3+7^{x-2}}}$

3) $y = \begin{cases} (x-3)^3, & x < 3 \\ x+1, & 3 \leq x \leq 4 \\ 3+2\sqrt{x}, & x > 4 \end{cases}$

Вариант 13**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n-7} - 2n}{1+4n}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{1 - \sqrt{x^3}}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)! + (n+2)!}{n^3(n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2 \cdot 4^x}{2^{2x} - e^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 4} - \sqrt{n^2 + 3})$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{4x^2 - 2x - 2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{3n+4} \right)^{2-n}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+3} - 2}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n-2) \ln \left(1 + \frac{1}{3n+1} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x(e^x - 1)}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)$

2) $2^{x^2 \cdot \operatorname{arctg}^3 x} - 1$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{x+2}{x^3-64}$

2) $y = \frac{3}{\frac{2}{4+e^{x+6}}}$

3) $y = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ -\sqrt{x-x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & x > 1 \end{cases}$

Вариант 14**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 7n}{1 - 5n^3}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x} - x^2}{1 + 3x^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \cdot n! - (n-1)!}{n! + (n+1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 5^x}{2^x - 5^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 - 7n})$

8) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + x - 3}{5x^2 + 4x - 1}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-3}{4n+6} \right)^{2n-3}$

9) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+6} - 2}{2 - \sqrt{3x+7}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) \left(1 - \cos \frac{1}{2n-1} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} 4x}{x + \operatorname{arctg} 3x}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $3x \cdot \arcsin \sqrt[3]{x^5}$

2) $\ln(1 + x^2 \cdot \sin^3 2x)$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$

2) $y = 2 + 4^{\frac{1}{3-x}}$

3) $y = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ (x-1)^2, & -1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{8+2x}, & x > 4 \end{cases}$

Вариант 15**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2-5\sqrt{n-1}}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2}{1 - 3x - 5x^3}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - 2(n-1)!}{n(n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 5^x}{x^6 - 5^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 8} - \sqrt{n^2 + 4n + 3})$

8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{3 + 2x - x^2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 4}{2n^2 - 2} \right)^{3n^2 - 2}$

9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 4n - 2) \operatorname{arctg} \frac{4}{n^2 + 3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sqrt[5]{1+x^2} - 1}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\ln(1 + \sqrt{x^3} \cdot x^2)$

2) $\operatorname{tg} x - \sin x$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2 + x}$

2) $y = \frac{\frac{1}{3+2^x}}{\frac{1}{1-2^x}}$

3) $y = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & 0 \leq x \leq 3 \\ 3 - x, & x > 3 \end{cases}$

Вариант 16**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n}{5 - n + 6n^2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-5} + x}{1-3x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)! - (n+1)!}{n^2(n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x - 5^x}{5^x - 7^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 6n} - \sqrt{n^2 - 2})$

8) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 4x - 6}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{5n+7} \right)^{3n+4}$

9) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+12} + x}{\sqrt{2x+7} - 1}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 4n) \arcsin^2 \frac{1}{2n-3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+6x}}{\ln(1+7x)}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\ln(1 + 2x \sin^3 4x)$

2) $\sqrt{7x^2 + 1} - 1 - \sqrt{x^5}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{2x-1}{x^2-9}$

2) $y = \frac{5}{\frac{1}{6+2^{x+7}}}$

3) $y = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 4x-10, & 0 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+1}, & x > 3 \end{cases}$

Вариант 17**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 4n}{2n - 3}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x} + x}{1 - 3x}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + 3(n+1)!}{(n+1)n!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 2^{2x}}{4^x - 2^{x-1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 3} - \sqrt{n^2 + 4n})$

8) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{4x - x^2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n-5}{7n+2} \right)^{2-3n}$

9) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+8} - x}{\sqrt{3x-3} - 3}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^3 \sin^3 \frac{1}{2n-3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{1 - \cos 2x}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\ln(1 - \sqrt[4]{x^3 \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x}})$

2) $\operatorname{arctg} \sqrt[5]{3x^7}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{x}{(6x-7)^3}$

2) $y = 1 - 5^{\frac{1}{x+4}}$

3) $y = \begin{cases} 2+x, & x < -2 \\ -\sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2x+3, & x > 2 \end{cases}$

Вариант 18**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{2 - 3n^2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - 3\sqrt{x^2 + x}}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 2(n+2)!}{n^2(n-1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x - 2^{2x}}{4^x - 2 \cdot 5^{x-2}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3n - 6})$

8) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{6 - 5x - x^2}{x^2 + 2x - 8}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n}{n^2 + 4} \right)^{5n-1}$

9) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+5} - 1}{3 - \sqrt{x+13}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n \operatorname{arctg} n \frac{1}{2n-3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - e^{3x}}{\sqrt{5x+1} - 1}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\arcsin(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{5})$

2) $\operatorname{tg}^3 \left(\frac{x^2 + 4x}{5} \right)$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1}{3x} + \frac{2}{(x-2)^2}$

2) $y = \frac{1}{\cos x}$

3) $y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1 + x^2}, & x > 1 \end{cases}$

Вариант 19**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{1 - 4n}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{1 - 3x^3}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)! + 2(n+1)!}{n(n+1)!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2x} - 5^x}{5^{x+1} - 9^x}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 5n - 2})$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 4x - 12}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+7}{3n-7} \right)^{3n-4}$

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n \sin^n \frac{n}{2n^2 - 3}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x^2 + 1)}{1 - \sqrt{3x^2 + 1}}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x}$

2) $1 - \cos^3 x$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x+2}$

2) $y = 3 + 2 \frac{1}{x-5}$

3) $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 4 - 3x, & 2 < x < 4 \\ 5 \ln x - 1, & x \geq 4 \end{cases}$

Вариант 20**1. Найти пределы**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n+5}}{3+4n}$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x - 3x - 2x^3}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+2)!}{n^2 n!}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2x} + 5^x}{6^x - 9^{x+1}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 7})$

8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{3x^2 + 3x - 6}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 4n} \right)^{n+4}$

10) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3+x} - 1}{x^3 + 8}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) \left(1 - \cos \frac{3}{n+5} \right)$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{4 \ln(1+9x)}$

2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде Ax^k

1) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2x} + 1} - 1$

2) $\frac{x^2 + 3x^5}{7x + 1}$

3. Исследовать на непрерывность функции

1) $y = \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

2) $y = \frac{7}{\frac{4}{8+5^{3x+2}}}$

3) $y = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2+x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2-x}, & x > 2 \end{cases}$

4.2.2. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1**Задача 1.** Найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 1}{7 + 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \dots$$

Подставим предельное значение аргумента в числитель и знаменатель дроби и получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Выделим в

числителе и знаменателе главные члены (члены с большими степенями в числителе и знаменателе), проведем сокращение и получим

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)^2}{(3 + 5x)(4 - 9x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \dots$$

Подставим предельное значение аргумента в числитель и знаменатель дроби и получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Выделим в

числителе и знаменателе главные члены, проведем сокращение и получим

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)^2}{(5x)(-9x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{-45x^2} = -\frac{4}{45}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{9x^2 + x + 2}}{1 - 3x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \dots$$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Выделим в числителе и

знаменателе главные члены, учитываем, что $\sqrt{9x^2} = |3x|$, проведем сокращение и получим

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot 3|x|}{-3x^3} = \begin{cases} -1, & \text{при } x \rightarrow +\infty, \text{ т.к. } |x| = x \\ 1, & \text{при } x \rightarrow -\infty, \text{ т.к. } |x| = -x \end{cases}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n} - \sqrt{4n^2 + 7}) = (\infty - \infty) = \dots$$

Имеем дело с неопределенностью вида $(\infty - \infty)$. Видим, что главные члены после извлечения корней уничтожатся и информацию о величине предела примут на себя второстепенные члены. Домножим и разделим выражение на сопряженную величину, используем формулу $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ и оценим величину предела, выделяя теперь главные части в числителе и знаменателе, как в примере 1.

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 3n} - \sqrt{4n^2 + 7})(\sqrt{4n^2 + 3n} + \sqrt{4n^2 + 7})}{\sqrt{4n^2 + 3n} + \sqrt{4n^2 + 7}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2 + 3n) - (4n^2 + 7)}{2n + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 4n^2 - 7}{4n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 7^n - 4 \cdot 3^n}{5 \cdot 7^{n+2} - 3^{n+5}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \dots$$

Подставим предельные значения аргумента в числитель и знаменатель дроби. Убеждаемся, что имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Выделим в числителе и знаменателе главные члены (члены с большим основанием степени), проведем сокращение и получим

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 7^n}{5 \cdot 7^n \cdot 7^2} = \frac{2}{5 \cdot 49} = \frac{2}{245}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3(n-1)!}{4n(n-1)!} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \dots$$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Сведем все факториалы к факториалу меньшего выражения, т.е. $(n-1)!$. Затем выносим этот факториал за скобку и сокращаем. После этого выделим в числителе и знаменателе главные члены, проведем сокращение и получим

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n + 3(n-1)!}{4n(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!(n+3)}{4n(n-1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3n}\right)^{4n} = (1^\infty) = \dots$$

Здесь мы имеем неопределенность вида (1^∞) и используем формулу второго замечательного предела

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{5}{3n}\right)^{\frac{3n}{5}} \right\}^{\frac{5}{3n} \cdot 4n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 4n}{3n}} = e^{20/3}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n+4}\right)^{-7n} = (1^\infty) = \dots$$

Здесь мы имеем неопределенность вида (1^∞) . Прибавим и отнимем 1 в основании выражения, приводим к общему знаменателю и используем далее формулу второго замечательного предела

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+5}{2n+4} - 1\right)^{-7n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+4}\right)^{-7n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n}{2n+4}} =$$
$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n}{2n}} = e^{-7/2}$$

Рассмотрим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)}{(x-1)} = \frac{2-3}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

В подобных примерах нужно разложить на множители многочлен в числителе и знаменателе, для чего нужно найти корни квадратных трехчленов. После этого сократить выражение, из-за которого числитель и знаменатель обращались в ноль, и подставить значение переменной и вычислить ответ.

$$\begin{aligned} 10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6x+4}-4}{\sqrt{5x-1}-3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{6x+4}-4)(\sqrt{6x+4}+4)(\sqrt{5x-1}+3)}{(\sqrt{6x+4}+4)(\sqrt{5x-1}-3)(\sqrt{5x-1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(6x+4-16)(\sqrt{5x-1}+3)}{(\sqrt{6x+4}+4)(5x-1-9)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(6x-12)(\sqrt{5x-1}+3)}{(\sqrt{6x+4}+4)(5x-10)} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)}{(\sqrt{6x+4}+4)5(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(\sqrt{5x-1}+3)}{5(\sqrt{6x+4}+4)} = \frac{6(3+3)}{5(4+4)} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Выполняем следующие действия: 1) умножаем и делим на сопряженные выражения для числителя и знаменателя, 2) получаем формулы разности квадратов, выносим за скобки коэффициенты, сокращаем скобку, из-за которой получался ноль в числителе и знаменателе, 3) вычисляем оставшиеся в числителе и знаменателе выражения при данном значении аргумента.

Следующие неопределенности (вида $\left(\frac{0}{0} \right)$ и $(0 \cdot \infty)$) раскрываются с использованием табличных эквивалентных величин

$$1. \sin \alpha \sim \alpha \qquad 6. \ln(1+\alpha) \sim \alpha$$

$$2. \arcsin \alpha \sim \alpha \qquad 7. \log_a(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \qquad 8. e^\alpha - 1 \sim \alpha$$

$$4. \operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha \qquad 9. a^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln a$$

$$5. 1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2} \qquad 10. \sqrt[n]{1+\alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{n}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x\sqrt{x})}{e^{-5x}-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x\sqrt{x}}{-5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{x}}{5} = 0$$

Здесь использованы формулы 6 и 8.

$$\begin{aligned} 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+7x^2}-1}{\cos 5x-1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7x^2}{2}}{\frac{4}{(5x)^2}} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7x^2}{2}}{\frac{4}{25x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7/4)x^2}{(25/2)x^2} = -\frac{7}{50} \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы 5 и 10.

$$13) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+2) \operatorname{arctg} \frac{n}{2n^2-1} = (0 \cdot \infty) = \dots$$

Т.к. $\frac{n}{2n^2-1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то можно использовать замену на эквивалентную величину $\operatorname{arctg} \frac{n}{2n^2-1} \sim \frac{n}{2n^2-1}$ и неопределенность приведет к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, которую рассматривали ранее

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+2) \frac{n}{2n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

Задача 2. Для данных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин записать эквивалентные в виде $A \cdot x^k$

1) $\sin 2x \sim 2x$, $A = 2$, $k = 1$.

2) $\sin^4 2x \sim (2x)^4 = 16x^4$, $A = 16$, $k = 4$.

3) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 3x} = (\operatorname{tg} 3x)^{5/3} \sim (3x)^{5/3} = \sqrt[3]{243} x^{5/3}$, $A = \sqrt[3]{243}$, $k = \frac{5}{3}$.

4) $x^5 + x^3 = x^3(x^2 + 1) \sim x^3$, $A = 1$, $k = 3$,

(здесь мы учитываем, что при $x \rightarrow 0$ $(x^2 + 1) \rightarrow 1$)

5) $1 - \cos 7x \sim \frac{(7x)^2}{2} = \frac{49}{2} x^2$, $A = \frac{49}{2}$, $k = 2$.

6) $\ln(1 - \sqrt[3]{x} \cdot \sin \sqrt{x}) \sim -\sqrt[3]{x} \cdot \sin \sqrt{x} \sim -\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} = -x^{5/6}$, $A = -1$, $k = 5/6$.

$$7) \ln(1-5x^3) \sim -5x^3, \quad A = -5, \quad k = 3.$$

$$8) e^{\arctg 4x^3} - 1 \sim \arctg 4x^3 \sim 4x^3, \quad A = 4, \quad k = 3.$$

$$9) e^{\sqrt{x}} - 1 - x \sim \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = x^{1/2}, \quad A = 1, \quad k = 1/2,$$

так как при $x \rightarrow 0 \quad (1 - \sqrt{x}) \rightarrow 1$

$$10) \sqrt[5]{1-x} - 1 \sim -\frac{x}{5} = -\frac{1}{5}x, \quad A = -\frac{1}{5}, \quad k = 1.$$

Задача 3. Исследовать на непрерывность функции

$$1) y = \begin{cases} 2x+3, & x < -1 \\ 2/(1+x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ -3x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Данная функция является кусочно--непрерывной. Функция определена для любого значения аргумента x . Точками разрыва этой функции могут являться только граничные точки интервалов, в которых меняется закон задания функции, т.е. точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Найдем односторонние пределы на границах заданных интервалов.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \lim_{x \rightarrow -1-0} (2x+3) = -2+3=1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1+0} 2/(1+x^2) = 2/2 = 1$$

Значение функции в точке $x = -1$:

$$y(-1) = 2/(1+(-1)^2) = 1$$

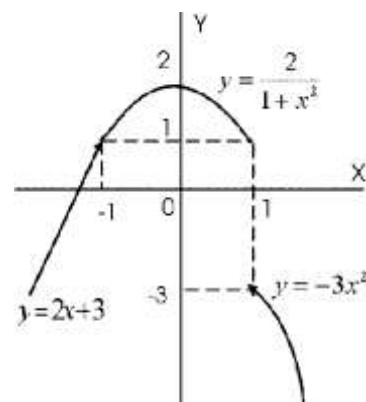
Односторонние пределы равны между собой и равны значению функции в точке. Вывод: в точке $x = -1$ функция непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2/(1+x^2) = 2/2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-3x^2) = -3 \cdot 1^2 = -3$$

Найдем значение функции в точке $x = 1$: $y(1) = 2/(1+(1)^2) = 1$

Вывод: в точке $x = 1$ функция терпит неустранимый разрыв 1-го рода (односторонние пределы существуют, но не равны между собой)



$$2) y = \frac{1}{x^3 - 4x^2}$$

Перепишем функцию в виде

$$y = \frac{1}{x^3 - 4x^2} = \frac{1}{x^2(x-4)}$$

Областью определения данной функции служит вся числовая ось за исключением точек $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Точки $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ являются точками разрыва функции.

Найдем односторонние пределы в каждой точке.

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2(x-4)} = \frac{1}{(-0)^2(0-4)} = \frac{1}{+0 \cdot (-4)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2(x-4)} = \frac{1}{(+0)^2(0-4)} = \frac{1}{+0 \cdot (-4)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Точка $x = 0$ является точкой неустранимого разрыва 2-го рода.

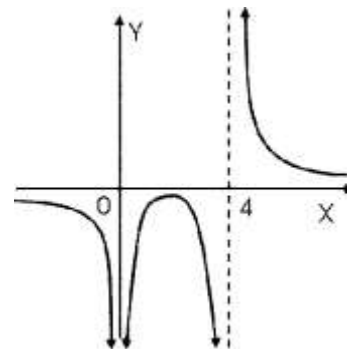
$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{1}{x^2(x-4)} = \frac{1}{(4)^2(4-0-4)}$$

$$= \frac{1}{16 \cdot (-0)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{1}{x^2(x-4)} = \frac{1}{(4)^2(4+0-4)} =$$

$$= \frac{1}{16 \cdot (+0)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Точка $x = 4$ является точкой неустранимого разрыва 2-го рода (см. рис.)



$$3) y = 5 - \frac{1}{3^{x+2}} \quad \text{Точкой разрыва функции является точка } x = -2.$$

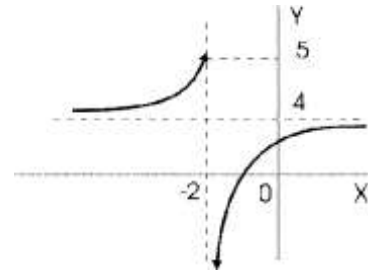
Найдем односторонние пределы функции в этой точке и делаем вывод о наличии разрыва и его типе.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \left(5 - \frac{1}{3^{x+2}} \right) = 5 - \frac{1}{3^{-2-0+2}} = 5 - \frac{1}{3^{-0}} = 5 - 3^{-\infty} = 5 - 0 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \left(5 - \frac{1}{3^{x+2}} \right) = 5 - \frac{1}{3^{-2+0+2}} =$$

$$= 5 - \frac{1}{3^0} = 5 - 3^{+0} = 5 - \infty = -\infty$$

Точка $x = -2$ является точкой неустраняемого разрыва 2-го рода (односторонние пределы равны бесконечности).



$$4.) y = \frac{2}{5 + 4^{x+3}}$$

В область определения данной функции не входит точка $x = -3$, являющаяся в силу этого точкой разрыва. Определим характер разрыва. Находим предел функции слева от точки $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2}{5 + 4^{x+3}} = \frac{2}{5 + 4^{-3-0+3}} = \frac{2}{5 + 4^0} = \frac{2}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Здесь мы использовали следующее:

$$\frac{1}{-0} = -\infty, \quad 4^{-\infty} = \left(\frac{1}{4} \right)^{+\infty} = \frac{1}{4^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Находим предел функции справа от точки $x = -3$.

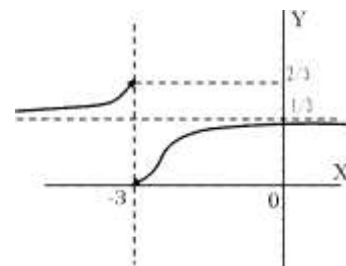
$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2}{5 + 4^{x+3}} = \frac{2}{5 + 4^{-3+0+3}} = \frac{2}{5 + 4^0} = \frac{2}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Итак, односторонние пределы существуют, но не равны между собой $\lim_{x \rightarrow -3-0} y = 1/3 \neq \lim_{x \rightarrow -3+0} y = 0$.

Вывод: в точке $x = -3$ функция терпит неустраняемый разрыв I - го рода. Скачок функции равен разности односторонних пределов, т.е. $1/3$. Найдем предел при $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{5 + 4^{x+3}} = \frac{2}{5 + 4^{\infty}} = \frac{2}{5 + \infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Заметим, что вопрос о непрерывности функции и нахождении точек разрыва тесно связан с задачей нахождения вертикальных асимптот графика функции.



4.2.3. Индивидуальное задание № 2 «Производные»**Вариант 1****1. Найти производные $y'(x)$ данных функций**

1) $y = \ln^2 \cos(e^{-2x^3})$

2) $y = \frac{x^2 + 5x - 2}{8x + 7} + \operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{x}}$

3) $y = \operatorname{arctg}(2^{-\sqrt{x}}) + \frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}$

4) $y = \sqrt{(3x-1)^5} \cdot \sin^3 \frac{3x}{2}$

5) $y = (3x - \operatorname{ctg} x)^{\cos x}$

6) $y = \left(\frac{3}{\ln x + x^2} \right)^{\sqrt{1+x}}$

7) $\begin{cases} x = 2t^2 + 5t - 1 \\ y = t^3 + 5t^2 - t + 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = e^{t+2} \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = \sqrt{1 - 4x + x^2}$

2) $\begin{cases} x = \ln(t-4) \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}, \quad x_0 = 0$

2) $\begin{cases} x = \frac{t}{t+2} \\ y = \frac{t^2}{t-1} \end{cases} \quad t_0 = 3$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$

Вариант 2

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \ln^3(6^x - 3x) + \sqrt{5^x - x^2} \quad 2) y = \frac{\sin \sqrt{5x}}{(4x^3 - 3x)^2}$$

$$3) y = 3^{\sin x} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{x} \quad 4) y = \arccos^2(1 - 7x^5)$$

$$5) y = (\sqrt{6 - 3x - 4x^2})^{\cos x} \quad 6) y = \left(\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x}} \right)^{\operatorname{tg} 4x}$$

$$7) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^3 \\ y = \arcsin(t - 1) \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \quad 2) \begin{cases} x = \cos(2t^2 + 4) \\ y = \sin(t^3 - 6) \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \frac{3x - x^2}{x - 1}, \quad x_0 = 0$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{1 + t^2}{t} \\ y = \ln(3t^2 - 7) \end{cases} \quad t_0 = 2$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)}{3x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^x - 4}{\ln x}$$

Вариант 3

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{3x^2 - 3x}}{(2+x)^5} \quad 2) y = e^{\cos^4 5x}$$

$$3) y = \left(7 + \ln \frac{1}{x} + 5x\right)^3 \quad 4) y = \sin 2^{-x^2} + \frac{1}{(1 + \ln x)^2}$$

$$5) y = \left(\operatorname{tg} \frac{2}{x}\right)^{\sin x} \quad 6) y = (x + 2x^3)^{\frac{2}{x+3}}$$

$$7) \begin{cases} x = 3t - 5t^4 \\ y = t^2 + 7t^3 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2} \\ y = \frac{3 + 2 \ln t}{t} \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \sin \ln 3x \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2 \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 2$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2} \\ y = \frac{3 + 2 \ln t}{t} \end{cases} \quad t_0 = 1$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \ln(1+2x)}{x^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$$

Вариант 4**1. Найти производные $y'(x)$ данных функций**

1) $y = \frac{2-x}{\sqrt[4]{x}} + 2x \cdot \sqrt{1-x^3}$

2) $y = 2\sqrt{e^{2x} + e^x} + \frac{5}{\operatorname{ch} x}$

3) $y = (2x^2 + 1) \cdot \operatorname{ctg} \frac{2x-1}{3x+5}$

4) $y = \arcsin^2 \sqrt{1-3\cos^2 x}$

5) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$

6) $y = (4\cos x + 5)^{\ln(x+8)}$

7) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = t^2 / 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = \frac{\ln x}{x^5}$

2) $\begin{cases} x = (t-t^2)^3 \\ y = (1-t^3)^2 \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = \frac{3x^2 + 4}{x^3 \sqrt{1+x^4}}, \quad x_0 = 1$

2) $\begin{cases} x = \sin t^2 \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases} \quad t_0 = 0$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{3x+7} - 5}{3 - \sqrt{3+x}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x-3}$

Вариант 5

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

1) $y = \frac{x^2}{1 - \sqrt[4]{x}} + \frac{1}{3^{x+1}}$

2) $y = \operatorname{arctg}^4 \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{x + \sqrt{x}} \right)$

3) $y = \sqrt[3]{\arcsin(1+2x)} - 2^{5x^2}$

4) $y = \ln \operatorname{arctg} \left(x^2 - \frac{2}{x^3} \right)$

5) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sqrt{x^2+3}}$

6) $y = (3 \ln x + 2x)^{\arcsin 3x}$

7) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{\ln t} \\ y = \frac{1}{t^2 + t + 1} \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = (5x-1) \cdot \ln^2 x$

2) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = 3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos^4 x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2} \\ y = \sqrt[3]{(t-1)^2} \end{cases} \quad t_0 = 2$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - \sin 3x}{\pi/6 - x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{12+2x} - 4}$

Вариант 6**1. Найти производные $y'(x)$ данных функций**

1) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - \frac{(5x - 1)^3}{6}$

2) $y = \arcsin^3\left(\frac{2}{x}\right) \cdot e^{-3x}$

3) $y = \operatorname{tg}\left(\ln x - \frac{1}{x}\right) + \sqrt{2^x + 3^x}$

4) $y = \frac{(2x^2 + 3x + 5)^3}{2\sqrt{x} + 1/x}$

5) $y = \left(\frac{\ln x + x}{\sin x}\right)^{2\sqrt{x}}$

6) $y = (1 - 2\cos x)^{x^2 + x + 5}$

7) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} 3t \\ y = \operatorname{tg} t^2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

2) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = \operatorname{arctg} \frac{1}{t} \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = b \arcsin \frac{x}{b} - \sqrt{b^2 - x^2}, \quad x_0 = \frac{b}{a}$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \frac{1}{t-1} \end{cases} \quad t_0 = 2$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x)}{x^3} \right)$

2) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + 7x - 15}$

Вариант 7

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2x+3} \quad 2) y = \sqrt{\operatorname{arctg} \ln x + 1}$$

$$3) y = \cos(x - 4x^2 + 5) \cdot \ln \sqrt{x} \quad 4) y = \frac{(2+x+\sin^5 2x)}{1-x^2}$$

$$5) y = \left(2x + \frac{2}{x}\right)^{\operatorname{ctg} x} \quad 6) y = \left(\frac{x}{\ln x + 5}\right)^{x^2}$$

$$7) \begin{cases} x = \frac{1+t}{5t^2} \\ y = \frac{3}{5t^2} + \frac{2}{t} \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = \ln(t^2 + 1) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = e^{-x} \cdot (\cos 2x - 3 \sin 2x) \quad 2) \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1 \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 + 3x - 5} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x)$$

Вариант 8

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{\ln \cos x} \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \cdot (2x-4)^5$$

$$3) y = 8^{\sin x} \cdot \left(x - \frac{1}{\cos 5x} \right) \quad 4) y = \frac{1+3 \operatorname{ctg}^3(x/2)}{7x^2-4x+6}$$

$$5) y = \left(\frac{3}{\sqrt{x}} \right)^{\ln 26x}$$

$$6) y = (\arcsin x)^{x^2-\sqrt{x}}$$

$$7) \begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x = \sqrt{t} \cdot e^{-2t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = (1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x \quad 2) \begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = 3 \cdot \sin t \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \ln \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} x = 2t \cdot \cos t \\ y = 2t \cdot \sin t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1/2} \sin(2x-1) \cdot \operatorname{tg} \pi x$$

Вариант 9

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \frac{1}{\ln 2x} + \frac{\sqrt[5]{x}}{3} + \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt[4]{x^3}} \quad 2) y = 3^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg}(x^3+1)$$

$$3) y = \ln \arcsin(x-3) \cdot \left(\frac{2}{x+3}\right)^4 \quad 4) y = \operatorname{arctg}^5 \cos x \cdot 5^{x-x^2}$$

$$5) y = \left(\arcsin x + \frac{3}{x^5}\right)^{\operatorname{arctg} 4x} \quad 6) y = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^{(2x^2+x+1)}$$

$$7) \begin{cases} x = \ln(t^2+2) \\ y = \frac{1}{t^2+2} \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = e^{\sqrt{t+1}} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = 5^{\sin 3x} \quad 2) \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \sqrt{x^2+3}, \quad x_0 = 3$$

$$2) \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \quad t_0 = 1$$

4. Используя правило Лопиталья, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{1 + \sin x}{(\pi + 2x)^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 8x + 4}$$

Вариант 10

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3\sqrt{\frac{1-x}{1+2\sqrt{x}}} \quad 2) y = \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x}$$

$$3) y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+6}) \quad 4) y = \cos e^{-x^2} + 2\sqrt{\operatorname{ctg} x}$$

$$5) y = (\ln x)^{\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \quad 6) y = (\cos x + 3x)^{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}}$$

$$7) \begin{cases} x = \frac{2}{2+t^2} \\ y = \frac{t^2}{2+t^2} \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = t \cdot \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \ln(1-x^2) \quad 2) \begin{cases} x = \ln(t+1) \\ y = (t+1)^2 \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \sqrt{(3-x)(2+x)}, \quad x_0 = -1$$

$$2) \begin{cases} x = 3t^2 + t + 2 \\ y = t^3 + 4t^2 + 3 \end{cases} \quad t_0 = 1$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{\pi x}{4}}{1 - x^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10-3x} - 2}{\ln(5-2x)}$$

Вариант 11

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \ln^3 \sin(5^{-x^2}) \quad 2) y = \frac{6x-2}{8x^2-4x+7} + \operatorname{arctg} \frac{5x}{\sqrt{3}}$$

$$3) y = \operatorname{tg}(e^{-x^3}) + e^{\operatorname{ctg} x} \quad 4) y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 \ln(3x)$$

$$5) y = \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{4x}{3}\right) \sqrt{x} \quad 6) y = \left(4 - \frac{3}{\cos 2x}\right)^{\ln(1+x)}$$

$$7) \begin{cases} x = \operatorname{ctg} 2t \\ y = \sin 2t + 1 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t}} \\ y = \sqrt{3t+2} \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \quad 2) \begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x^2}, \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases} \quad t_0 = -1$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^4 - 2x^3 + x - 2}$$

Вариант 12**1. Найти производные $y'(x)$ данных функций**

1) $y = \ln(2^x + 5x) + \sqrt{2^x + 5x}$ 2) $y = \frac{\ln \sin 5x}{(1 - x^5)}$

3) $y = 4^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg} e^{\sqrt{x}}$ 4) $y = \arcsin^5(7 - 3x^2)$

5) $y = (\sqrt{x^2 - 2x + 5})^{\sin \sqrt{x}}$ 6) $y = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^{\operatorname{ctg} 3x}$

7) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 3t \\ y = \cos 3t + 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = e^{t^2 + t} \\ y = 5 \ln^3 t \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 2) $\begin{cases} x = 2t^2 + 4t - 1 \\ y = 5t^3 - 8 \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = \sqrt{1 - 3x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}, \quad x_0 = 0$

2) $\begin{cases} x = 3t(1 + t^2) \\ y = 3t^2(1 - t^2) \end{cases} \quad t_0 = 2$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow \pi/8} \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{\cos 4x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{3 - \sqrt{x^2 + 9}}$

Вариант 13

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \ln^5(\sin 4x - \cos^2 5x) \quad 2) y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[3]{x}$$

$$3) y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} - \operatorname{arctg} \frac{2}{x^3} \quad 4) y = \sqrt{x} \cdot 9^{(1-x^2)}$$

$$5) y = (\cos 3x)^{\sqrt{\ln 8x}} \quad 6) y = (\ln \arcsin x)^{\operatorname{arctg} 2x}$$

$$7) \begin{cases} x = a^{3t} \\ y = e^{2t} + 1 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = 3\sin^3 t \\ y = 3\cos^3 t \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$2) \begin{cases} x = 3t - 5t^4 \\ y = t^2 + 7t^3 \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3 \cos^3 x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$2) \begin{cases} x = t \cdot (t^2 + 1) \\ y = \frac{t}{t^2 + 1} \end{cases} \quad t_0 = 1$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - \ln(1 + 5x^2)}{x^4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + \ln x} - 1}{\sin \pi x}$$

Вариант 14

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} - 3\sqrt[3]{(x^2+1)^2} \quad 2) y = \operatorname{arccctg} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$3) y = \ln^2(e^{2x} + 1) + \cos^3 x \quad 4) y = \operatorname{tg} \sqrt{\ln(1+2x^4)}$$

$$5) y = (5x - 3x^2)^{\cos^2 x} \quad 6) y = \left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right)^{3x^2}$$

$$7) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = \frac{t-8}{t^2-4} \\ y = \frac{3}{t(t^2-4)} \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \sin x^2 \quad 2) \begin{cases} x = \sqrt{t-t^2} \\ y = e^{-t^3} \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \sqrt{x^2 - 4x} - \arcsin(x-4), \quad x_0 = 4$$

$$2) \begin{cases} x = t^2(1 + \ln t) \\ y = t(3 + 2 \ln t) \end{cases} \quad t_0 = 1$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x-\pi)^2 \sin x}{1 + \cos x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{3+x} - 1}$$

Вариант 15**1. Найти производные $y'(x)$ данных функций**

1) $y = \frac{1}{4} \cdot (x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 5}$ 2) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + 2x}}$

3) $y = -2x^5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{\operatorname{tg} x}$ 4) $y = \frac{\arccos x}{1 + x^2} - 3^{\sin 32x}$

5) $y = (x + \sqrt{x})^{(x^2 - 1)}$ 6) $y = (4x^2 + 3)^{\operatorname{ctg} 5x}$

7) $\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = e^{2t} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = 2t(1 - \ln t) \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = (1 - 2x^2)^3 - \cos 5x$ 2) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t^2 \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}), \quad x_0 = 0$

2) $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

4. Используя правило Лопиталья, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2 - 1}{\arcsin(1 - 3x)}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

Вариант 16

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{7} + \frac{\sqrt[4]{x^9}}{x^3 + 4} \quad 2) y = \arcsin \frac{3}{5\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$3) y = \ln^3 \operatorname{ctg}(e^x) \cdot \sin 5x \quad 4) y = \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\operatorname{arctg}(3x-1)} + (\ln 3)^{2x}$$

$$5) y = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2-1}} \quad 6) y = \left(\frac{x-1}{x^2+5}\right)^{\ln x}$$

$$7) \begin{cases} x = e^{t^2-1} \\ y = t + 1/t \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = \sqrt{t^2-t} \\ y = 3t - \sin^3 t \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = 3^{\sin x} \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \operatorname{ctg} 3t \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = x \cdot e^{x^2}, \quad x_0 = \frac{3}{2}$$

$$2) \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos 3\pi x}{\operatorname{tg} \pi x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

Вариант 17

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$1) y = \sqrt[4]{x^3 - 2x} + \sqrt[3]{(7x+3)^2} \quad 2) y = \frac{1 + \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg} 6x}$$

$$3) y = \operatorname{arctg}\left(e^{\sqrt{x}}\right) + (\ln 5)^{\operatorname{tg} \frac{2}{x}} \quad 4) y = \frac{\arccos x}{\sqrt{3-x^2}} - \ln \sqrt{3-x^2}$$

$$5) y = (\sin 2x)^{\arcsin 2x} \quad 6) y = (\ln 9x)^{4x-3}$$

$$7) \begin{cases} x = \frac{t-t^2}{1+2t^3} \\ y = \frac{3t-1}{1+2t^3} \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x = t^2 \\ y = e^{-3t^2} \end{cases}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad 2) \begin{cases} x = t^2 - t \\ y = \ln^3 t \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = x + \frac{1}{x + e^x}, \quad x_0 = 0$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1 \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

Вариант 18**1. Найти производные $y'(x)$ данных функций**

1) $y = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt[3]{(2x^2+1)^2}$) $y = \operatorname{arccctg} \frac{2x+7}{3-5x}$

3) $y = \ln \sin e^x + 5 \operatorname{tg}^2 \ln x$ 4) $y = 4^{-2x^3} - \operatorname{ctg} \frac{x}{x+1}$

5) $y = (\sqrt{x} - 1)^{\sin x^5}$

6) $y = (1 + \operatorname{tg} \frac{1}{x})^{2x^3-3}$

7) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin 2t + 2 \cos 2t \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = e^{\sqrt{x+1}}$

2) $\begin{cases} x = e^{t-t^3} \\ y = t^2 + t \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = (3-x^2) \cdot \ln x, \quad x_0 = 2$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}} \\ y = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}} \end{cases} \quad t_0 = 0$

4. Используя правило Лопиталья, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \sin(2x-1) \cdot \operatorname{tg} \pi x$

Вариант 19

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} + \frac{\sqrt[3]{x^3+9}}{5} & 2) y = 2x - \arccos \sqrt{\frac{1}{x}} \\ 3) y = \operatorname{arctg} 2x \cdot \ln^3(1+e^{-5x}) & 4) y = (x^2+5)^3 \cdot \operatorname{ctg} 3x \\ 5) y = (\sqrt{x})^{\ln \frac{1}{x}} & 6) y = (3x^2+x)^{\cos^4 2x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 7) \begin{cases} x = \ln \sqrt{t^2+1} \\ y = \frac{1}{t^2+1} \end{cases} & 8) \begin{cases} x = \operatorname{tg} \frac{3t^2}{5} \\ y = \cos \frac{3t^2}{5} + 1 \end{cases} \end{array}$$

2. Найти вторую производную y'' функции

$$1) y = \frac{1}{(x^2+4)^3} \qquad 2) \begin{cases} x = t^2 + e^t \\ y = 3^{2t} \end{cases}$$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

$$1) y = \frac{16}{x^2(x-4)}, \quad x_0 = 3$$

$$2) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t_0 = \frac{3\pi}{4}$$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^3 x}{x (\cos 5x - \cos 3x)} \qquad 2) \lim_{x \rightarrow b} \frac{\sqrt{x-a} - \sqrt{b-a}}{x^2 - b^2}$$

Вариант 20**1. Найти производные $y'(x)$ данных функций**

1) $y = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}{6} + \frac{1}{\sqrt[4]{3x^7}}$ 2) $y = x^3 \cdot \operatorname{arctg} x^2 + 3 \frac{\cos x}{\ln x}$

3) $y = \frac{1 + 3e^x}{\sqrt{\sin 5x}} + e^{-x^3}$ 4) $y = \sin^4(2x - \operatorname{tg} 3x)$

5) $y = (\cos 2x)^{5x^3 + 2x}$ 6) $y = (\ln 2x)^{\operatorname{arctg} 4x}$

7) $\begin{cases} x = \frac{2-t}{t^2} \\ y = \frac{t^2}{2+t} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = t \cdot \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = \ln \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} 2x$ 2) $\begin{cases} x = 5^t \\ y = \ln t \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в указанной точке

1) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = 0$

2) $\begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t) \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t) \end{cases} \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$ 2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{2^{\sin x} - 1}$

**4.2.4. Решение типового варианта и образец оформления
индивидуального задания № 2****Производные****Задача 1**

•1. $y = \sin x + \frac{x}{\ln x}.$

Воспользуемся правилами дифференцирования суммы и частного
и таблицей производных:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' + \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \cos x + \frac{x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \\ &= \cos x + \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \cos x + \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}. \end{aligned}$$

•2. $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{x}{2}}.$

Используем правило $(cu)' = cu'$ и формулы

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2/x - x/2}} \cdot (2/x - x/2)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2/x - x/2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}\right)$$

•3. $y = \left(7 + \ln \frac{1}{x} + 5x\right)^3$

Перепишем функцию в виде $y = (7 - \ln x + 5x)^3$, т.к.

$$\ln \frac{1}{x} = \ln x^{-1} = -\ln x$$

Используем формулы

$$(u^k)' = ku^{k-1} \cdot u', \quad (u + v)' = u' + v', \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$y' = 3(7 - \ln x + 5x)^2 \cdot (7 - \ln x + 5x) = 3(7 - \ln x + 5x)^2 \cdot \left(-\frac{1}{x} + 5\right)$$

• 4. $y = \sin 2^{-x^2} + \frac{1}{(1 + \ln x)^2}$

Перепишем функцию в виде $y = \sin 2^{-x^2} + (1 + \ln x)^{-2}$

Используем формулы

$$(u^k)' = ku^{k-1} \cdot u', \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad (u + v)' = u' + v',$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u', \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$y' = \cos 2^{-x^2} \cdot 2^{-x^2} \ln 2 \cdot (-2x) + (-2)(1 + \ln x)^{-3} \cdot \frac{1}{x}$$

• 5. $y = (x^3 - 2)\sqrt[3]{x^5}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения и таблицей производных:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 - 2)' \sqrt[3]{x^5} + (x^3 - 2)(\sqrt[3]{x^5})' = \\ &= 3x^2 \sqrt[3]{x^5} + (x^3 - 2)(x^{5/3})' = 3x^2 \sqrt[3]{x^5} + (x^3 - 2) \frac{5}{3} \cdot (x^{2/3}) = \\ &= 3x^{11/3} + \frac{5}{3}(x^3 - 2)x^{2/3}. \end{aligned}$$

Производные показательно-степенной функции находятся по формуле

$$(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

• 6. $y = (\sin x^3 - 2x + 5)^{\ln(x - \sqrt{x})}$.

$$\begin{aligned} y' &= \ln(x - \sqrt{x}) \cdot (\sin x^3 - 2x + 5)^{\ln(x - \sqrt{x}) - 1} \cdot (\sin x^3 - 2x + 5)' + \\ &+ (\sin x^3 - 2x + 5)^{\ln(x - \sqrt{x})} \cdot \ln(\sin x^3 - 2x + 5) \cdot (\ln(x - \sqrt{x}))' = \\ &= \ln(x - \sqrt{x}) \cdot (\sin x^3 - 2x + 5)^{\ln(x - \sqrt{x}) - 1} \cdot (\cos x^3 \cdot 3x^2 - 2) + \\ &+ (\sin x^3 - 2x + 5)^{\ln(x - \sqrt{x})} \cdot \ln(\sin x^3 - 2x + 5) \cdot \frac{1}{x - \sqrt{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически производится по правилу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

$$\bullet 7. \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 + \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Дифференцирование данных функций производится по правилу

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 + \operatorname{tg} t \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{(t^2 + \operatorname{tg} t)'}{(t^3 - t)'} = \frac{2t + \frac{1}{\cos^2 t}}{3t^2 - 1}$$

Задача 2. Найти вторую производную y'' функций.

Для нахождения второй производной функции необходимо:

- найти первую производную и провести возможное упрощение полученного выражения,
- взять производную от полученного выражения, как от новой функции $y'' = (y')'$.
- При параметрическом задании функции вторую производную находим по формуле

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)_{t'} \cdot \frac{1}{x'_t}$$

1) $y = \sin(\ln 3x)$

$$y' = (\sin(\ln 3x))' = \cos(\ln 3x) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{\cos(\ln 3x)}{x}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{\cos(\ln 3x)}{x} \right)' = \frac{-\sin(\ln 3x) \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 \cdot x - 1 \cdot \cos(\ln 3x)}{x^2} = \\ &= \frac{-\sin(\ln 3x) - \cos(\ln 3x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} x = e^{t^2} \\ y = 2t^2 + t^3 \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{(2t^2 + t^3)'}{(e^{t^2})'} = \frac{2t + 3t^2}{e^{t^2} \cdot 2t} = \frac{2 + 3t}{2e^{t^2}}$$

$$y''_{xx} = \left(\frac{2 + 3t}{2e^{t^2}} \right)'_t \cdot \frac{1}{(e^{t^2})'} = \frac{3e^{t^2} - (2 + 3t)e^{t^2} 2t}{2e^{2t^2}} \cdot \frac{1}{e^{t^2} 2t} = \frac{3 - 4t - 6t^2}{4t e^{2t^2}}$$

Задача 3. Вычислить значение производной функции в точке

$$1) y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 2$$

Находим производную функции и в полученное выражение подставляем значение аргумента x_0 .

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} \right)' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} \quad y'|_{x=2} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2} \\ y = \frac{3 + 2 \ln t}{t} \end{cases} \quad t_0 = 1$$

$$x'_t = \left(\frac{1 + \ln t}{t^2} \right)' = \frac{\frac{1}{t} \cdot t^2 - 2t \ln t}{t^4} = \frac{1 - 2 \ln t}{t^3}$$

$$y'_t = \left(\frac{3 + 2 \ln t}{t} \right)' = \frac{\frac{2}{t} \cdot t - (3 + 2 \ln t)}{t^2} = \frac{-1 - 2 \ln t}{t^2}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-1-2\ln t}{t^2} \cdot \frac{t^3}{1-2\ln t} = -\frac{t(1+2\ln t)}{1-2\ln t},$$
$$y'_x|_{x=1} = -\frac{1(1+2\cdot 0)}{1-2\cdot 0} = -1$$

Задача 4. Используя правило Лопиталя, найти пределы

правило Лопиталя применимо только к неопределенностям вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Если исходная неопределенность другого вида, то ее необходимо сначала привести к нужному виду

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3 - x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 2x + 1)'}{(x^3 - x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{3x^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 15} - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - \sqrt{x})'}{(\sqrt{x^2 + 15} - 4)'} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 15}} \cdot 2x} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{2\sqrt{16}}} = \frac{3/2}{1/4} = 6$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 7x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sin 3x)'}{(\operatorname{tg} 7x)'} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{3 \cos 3x}{\cos^2 7x}}{\frac{3 \cos 3\pi}{\cos^2 7\pi}} = \frac{3 \cos 3\pi}{\cos^2 7\pi} = \frac{3 \cdot (-1)}{(-1)^2} = -\frac{3}{7}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \cdot \ln x - x + 1)'}{((x-1) \cdot \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{1}{x}(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \ln x}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \cdot \ln x)'}{(x \ln x + x - 1)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \frac{0 + 1}{0 + 1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В неопределенностях вида $(0 \cdot \infty)$ необходимо произведение также записать в виде дроби, переводя одну из функций-сомножителей в знаменатель. Например

$$\begin{aligned} 5. \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot \ln x &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{(1/x^2)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(1/x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{(-2/x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^3}{(-2x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{-2} = 0. \end{aligned}$$

4.2.5. Индивидуальное задание № 3 «Приложения производной»**Вариант 1**

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x^3 + 16}{x} \qquad 2) y = x^{2/3} \cdot e^{-x}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \qquad 2) y = \ln(x - 1/x)$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = x^3 \cdot \ln x \qquad 2) y = \sqrt{9x^2 + 25}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{x^2 + 6}{x^4 + 1} \qquad x_0 = 0$$

$$2) \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 1 \end{cases} \qquad t_0 = -2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2(-x^2 + 7x - 7)}{x^2 - 2x + 2} \quad \text{в интервале } [1; 4]$$

Вариант 2

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{4x^2}{x^3 - 1} \quad 2) y = (x + 2)^2 \cdot e^x$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{3x^2 - 7x - 16}{x^2 - x - 6} \quad 2) y = \ln \frac{x+1}{x+2}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad 2) y = \frac{3 - x^3}{4 - x^2}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \sqrt[3]{x^2} - 20 \quad x_0 = -8$$

$$2) \begin{cases} x = t^2 - t^4/4 \\ y = t^2 + t^3/3 \end{cases} \quad t_0 = 0$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)} \quad \text{в интервале } [-2; 5]$$

Вариант 3

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x-5}{x^2} \quad 2) y = \ln \frac{x-1}{x+1}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{5x}{\ln x} + 7x \quad 2) y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x \quad 2) y = x^2 \cdot e^{-3x}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = 1 - \sqrt[3]{x} \quad x_0 = 8$$

$$2) \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \quad t_0 = \pi/3$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x \quad \text{в интервале} \quad [\pi/6; \pi/3]$$

Вариант 4

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x+1}{x^2}, \quad 2) y = x^3 \ln x$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{x^4 + 27}{2x^3} \quad 2) y = 1 - e^{-1/x}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{10x}{(1+x)^3}, \quad 2) y = x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2} \quad x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} x = t \sin t + \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases} \quad t_0 = \pi/4$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \quad \text{в интервале } [-1; 2]$$

Вариант 5

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2} \quad 2) y = x^3 \cdot e^{-5x}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{1}{x} \cdot e^{x^2} \quad 2) y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = x - \ln(x + 1) \quad 2) y = x + \frac{4}{x + 2}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $X = X_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32 \quad x_0 = 4$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \ln(\operatorname{ctg} t) + 1 \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases} \quad t_0 = \pi / 4$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sin 2x - x \quad \text{в интервале } [0; \pi]$$

Вариант 6

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = x + 2 \operatorname{arctg} x \qquad 2) y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = x^2 \cdot e^{-4x} \qquad 2) y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{(x+1)^2}{x-2} \qquad 2) y = x + \ln(x^2 - 1)$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2} \qquad x_0 = 3$$

$$2) \begin{cases} x = 2t \cos t \\ y = 2t \sin t \end{cases} \qquad t_0 = \pi/2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x - 2 \ln x \quad \text{в интервале } [1; e]$$

Вариант 7

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{1}{3}x^3 - x^4 \qquad 2) y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{3}{x(x-4)} \qquad 2) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{(x-1)^2}{x-2} \qquad 2) y = x \cdot e^{-x^2}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $X = X_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = e^{2x-x^2}, \qquad x_0 = 0$$

$$2) \begin{cases} x = \cos(t/2) \\ y = t - \sin t \end{cases} \qquad t_0 = \pi/2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5} \quad \text{в интервале} \quad [-2; 1]$$

Вариант 8

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = x^3 + \frac{x^4}{4} \qquad 2) y = x \cdot e^{2x-1}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \ln \frac{x-1}{x+1} \qquad 2) y = \frac{1-x^3}{x^3}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2} \qquad 2) y = x^2 - 2 \ln x$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{4x - x^2}{4} \qquad x_0 = 2$$

$$2) \begin{cases} x = 3t(t^2 + 1) \\ y = 3t^2(1 - t^2) \end{cases} \qquad t_0 = 2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln x \quad \text{в интервале} \quad [1/\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

Вариант 9

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{4x^2}{x^3 - 1} \quad 2) y = \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = x + \frac{1}{x} \quad 2) y = \frac{x^3}{(x-2)(x^2-1)}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = 1 + \sqrt[3]{(1-x)^2} \quad 2) y = x^3 \cdot e^{2x+1}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} \quad x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases} \quad t_0 = 1$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2} \quad \text{в интервале } [-1; 2]$$

Вариант 10

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \ln[(x^2 - 1)^2] \quad 2) y = (x^2 - 4x + 3) \cdot e^{x-1}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad 2) y = x + \frac{\ln x}{x}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x \quad 2) y = x^2 \cdot e^{1/x}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $X = X_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \quad x_0 = 4$$

$$2) \begin{cases} x = \arcsin(1-t) \\ y = \arccos t \end{cases} \quad t_0 = 0$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2\sin x + \sin 2x \quad \text{в интервале} \quad [0; 3\pi/2]$$

Вариант 11

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = x^3 \cdot (x+2)^2 \qquad 2) y = x \cdot e^{-x}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2} \qquad 2) y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{1}{(x-2)(x^2-1)} \qquad 2) y = (3-x) \cdot e^{x-2}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{1}{3x+2} \qquad x_0 = 2$$

$$2) \begin{cases} x = 1-t^2 \\ y = t-t^3 \end{cases} \qquad t_0 = 2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{10x}{1+x^2} \text{ в интервале } [0; 3]$$

Вариант 12

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \ln(x^2 + 6x) \qquad 2) y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{2x+3}{x^2+3x} \qquad 2) y = \frac{e^{-2x}}{x+5}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \qquad 2) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \ln \sin 2x \qquad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$2) \begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases} \quad t_0 = \pi/3$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15 \quad \text{в интервале} \quad [1/2; 2]$$

Вариант 13

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x^4}{x^3 - 27} \quad 2) y = (x + 4) \cdot e^{-(x+7)}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = x - \ln(x + 1) \quad 2) y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 1)^2} \quad 2) y = x^2 \cdot \ln x$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{2(x + 2)}{3(x^2 + 1)} \quad x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cos t \end{cases} \quad t_0 = 0$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x \quad \text{в интервале } [-1; 1]$$

Вариант 14

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{8x}{(1+x)^3}, \quad 2) y = x \cdot \ln x + x$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{3x}{x-1} + 3x, \quad 2) y = \arctg \frac{1}{x+1}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{4x^2}{x^3-1}, \quad 2) y = e^{3x-x^2}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3} \quad x_0 = 3$$

$$2) \begin{cases} x = t(t+1) \\ y = 2t^2(1-t) \end{cases} \quad t_0 = 2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}} \quad \text{в интервале} \quad [3/2; 3]$$

Вариант 15

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}, \quad 2) y = x \cdot e^{-x^2/2}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = x^2 \cdot e^{-x}, \quad 2) y = \ln \frac{x+4}{x-2},$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)}, \quad 2) y = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2},$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{3x - 2x^3}{3} \quad x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases} \quad t_0 = 1$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = (x-1)^2 \sqrt{x^2 - 2x + 3} \quad \text{в интервале } [0; 3]$$

Вариант 16

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6} \quad 2) y = \frac{2}{3} x^2 \cdot \sqrt[3]{6x - 7}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{x^3 + 16}{x} \quad 2) y = x + e^{-x}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 6} \quad 2) y = (x - 1) \cdot e^{3x}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{x - 1}{x^4 + 1} \quad x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} \quad t_0 = \pi / 6$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x \quad \text{в интервале } [e^{3/4}; e^3]$$

Вариант 17

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x} \quad 2) y = (x^2 - 4x + 3) \cdot e^{x-1}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad 2) y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x + 4}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \quad 2) y = x^2 \cdot e^{1/x}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = x \cdot e^{2x-x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \arccos(1-t) \end{cases} \quad t_0 = 0$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2 \sin x + \sin 2x \quad \text{в интервале} \quad [0; 3\pi / 2]$$

Вариант 18

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12} \quad 2) y = x^2 \cdot e^{-x}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{3}{x(x-4)} \quad 2) y = \frac{\ln x}{x^2}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad 2) y = \frac{e^{2(x+1)}}{2x+1}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \quad x_0 = 8$$

$$2) \begin{cases} x = \cos(t/2) \\ y = t - \sin t \end{cases} \quad t_0 = \pi/2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5} \quad \text{в интервале } [-2; 1]$$

Вариант 19

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{4x}{4+x^2} \qquad 2) y = 3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = \frac{(x-3)^2}{4x-4} \qquad 2) y = \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = x \cdot e^{-x} \qquad 2) y = 4x - 9 \ln x$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{2x}{x^2+1} \qquad x_0 = -2$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t_0 = -\pi/3$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{10x+10}{x^2+2x+2} \quad \text{в интервале} \quad [-1; 2]$$

Вариант 20

1. Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} \quad 2) y = -(2x + 3) \cdot e^{2(x+2)}$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1) y = 9 \ln x - 25x \quad 2) y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1) y = \frac{x^3 - 32}{x^2} \quad 2) y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2 - 4x + 1)}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3) \quad x_0 = 4$$

$$2) \begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = t(1 + t^2) \end{cases} \quad t_0 = 2$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16 \quad \text{в интервале } [1; 4]$$

**4.2.6. Решение типового варианта и образец оформления
индивидуального задания № 3 «Приложения производной»****Задача 1.** Исследовать на экстремум функции

$$1) y = \frac{x^3}{(x+2)^2}.$$

а) $D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

б) Находим критические точки

$$y' = \frac{3x^2(x+2)^2 - x^3 \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 0.$$

$$y' = \infty \Rightarrow (x+2)^3 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \notin D(y).$$

с) Определяем знак производной в каждом интервале

$$x = -6: \text{ слева } y'(-7) = \oplus, \quad \text{справа: } y'(-5) = (-);$$

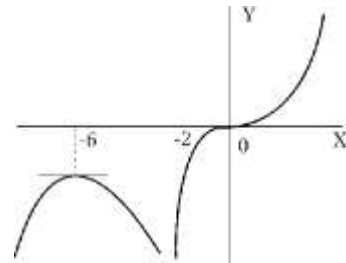
$$x = -2: \text{ слева: } y'(-3) = (-), \quad \text{справа: } y'(-1) = \oplus;$$

$$x = 0: \text{ слева: } y'(-1) = \oplus, \quad \text{справа: } y'(1) = \oplus,$$

Строим график знаков первой производной



д) Выводы: При переходе через точку $x_1 = -6$ производная сменила знак с $\oplus$ на $(-)$, поэтому в точке $x_1 = -6$ – "гладкий" max. В точке $x_2 = 0$ экстремума нет, т.к. не сменился знак производной. В точке $x_3 = -2$ экстремума нет, т.к. это точка разрыва.

Функция возрастает в интервале $x \in (-\infty; -6) \cup (-2; +\infty)$.Функция убывает в интервале
 $x \in (-6; -2)$.е) Значения функции в критических точках $y(-6) = -27/4$, $y(0) = 0$.

$$2) y = x^3 \cdot e^x.$$

а) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

б) Находим первую производную

$$y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = x^2 \cdot e^x \cdot (x + 3).$$

Определяем критические точки

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 \cdot e^x \cdot (x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -3.$$

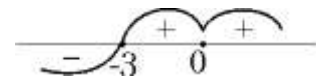
Точек, в которых $y'(x)$ не существует, нет.

с) Наносим точки $x_1 = 0, x_2 = -3$ на числовую прямую и определяем знак $y'(x)$ в окрестностях этих точек.

$$x = -3: \quad \text{слева: } y'(-4) = (-), \quad \text{справа: } y'(-2) = \oplus,$$

$$x = 0: \quad \text{слева: } y'(-1) = \oplus, \quad \text{справа: } y'(1) = \oplus.$$

Строим график знаков первой производной



д) Выводы: При переходе через точку $x = -3$ производная сменила знак с $(-)$ на $\oplus$, поэтому в точке $x = -3$ — min.

В окрестности точки $x = 0$ знак производной не изменился, в этой точке экстремума нет.

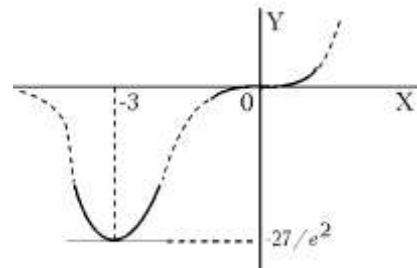
Интервал возрастания функции: $x \in (0; +\infty)$.

Интервал убывания функции: $x \in (-\infty; 0)$.

е) Вычисляем значение функции во всех критических точках:

$$y(-3) = \frac{-27}{e^3} \approx -1,4, \quad y(0) = 0$$

и наносим эти точки на координатную плоскость. Поскольку производная в критических точках $y' = 0$, касательная к графику функции проходит горизонтально и в точке $x = -3$ экстремум "гладкий."



$$3) \quad y = 3(x-1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

$$а) \quad D(y): x \in (-\infty; +\infty).$$

б) Находим первую производную

$$\left(3(x-1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} \right)' = 3 \left(3(x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + (x-1)^3 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} \right) =$$

$$= 3(x-1)^2 \cdot \left(\frac{9\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} + 2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \right) = 3(x-1)^2 \cdot \frac{9x + 2x - 2}{3\sqrt[3]{x}} = \\ = \frac{(11x - 2) \cdot (x - 1)^2}{\sqrt[3]{x}}.$$

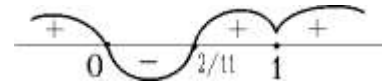
Находим критические точки $y' = 0 \Rightarrow (11x - 2)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow$
 $x_1 = 2/11, x_2 = 1, y' = \infty \Rightarrow x_3 = 0.$

с) Наносим критические точки на числовую прямую и определяем знак $y'(x)$ в окрестностях этих точек.

$x = 0$: слева: $y'(-1) = \oplus$, справа: $y'(1/11) = (-)$,

$x = 2/11$: слева: $y'(1/11) = (-)$, справа: $y'(3/11) = \oplus$,

$x = 1$: слева: $y'(3/11) = \oplus$, справа: $y'(+2) = \oplus$.



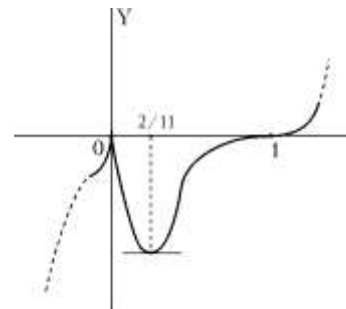
д) Выводы: При переходе через точку $x = 0$ производная сменила знак с $\oplus$ на $(-)$, поэтому в точке $x = 0$ – max. При переходе через точку $x = 2/11$ производная сменила знак с $(-)$ на $\oplus$, поэтому в точке $x = 2/11$ – min.

В окрестности точки $x = 1$ знак производной не изменился, значит в этой точке экстремума нет.

е) Вычисляем значение функции во всех критических точках:

$y(0) = 0, y(2/11) \approx -0.5, y(1) = 0$ и наносим

эти точки на координатную плоскость. Поскольку производная в критических точках $y'(2/11) = y'(1) = 0$, касательная к графику функции проходит горизонтально и в точке $x = 2/11$ экстремум "гладкий." В точке $x = 0$ производная $y' = \infty$ и максимум имеет пикообразный характер.



4) $y = x \cdot \ln x + x.$

а) $D(y): x \in (0; +\infty).$

б) Находим критические точки

$$y' = (x \ln x + x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x_1 = e^{-2}.$$

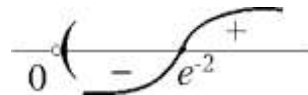
$$y' = \infty \Rightarrow \ln x = \infty \Rightarrow x_2 = 0 \notin D(y).$$

с) График знаков производной

$$x = e^{-2} :$$

$$\text{слева : } y'(e^{-3}) = \ln e^{-3} + 2 = -3 + 2 = -1 < 0,$$

$$\text{справа : } y'(e^{-1}) = \ln e^{-1} + 2 = -1 + 2 = 1 = \oplus$$



4) Выводы: в точке $x_1 = e^{-2}$ – "гладкий" min, (производная сменила знак с (-) на $\oplus$)

в точке $x_2 = 0$ экстремума нет (эта точка является граничной точкой области определения функции).

Функция возрастает в интервале $x \in (1/e^2; +\infty)$.

Функция убывает в интервале $x \in (0; 1/e^2)$.

5) Значение функции в критической точке $y(e^{-2}) \approx -0,135$.

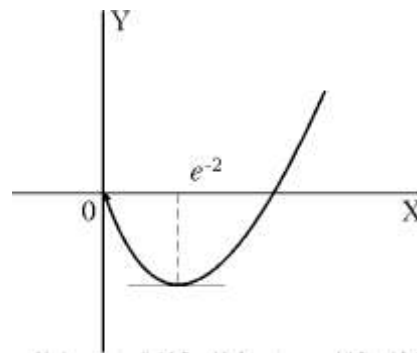
В граничной точке области определения $x = 0$ предел функции равен

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x + x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} + \lim_{x \rightarrow +0} x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} + 0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

Предел производной в этой точке равен бесконечности. Поведение функции в окрестностях характерных точек показано на рисунке.



Задача 2. Найти все асимптоты графиков функций.

$$1) y = \frac{3x^2 + x + 2}{x - 4}.$$

а) Ищем вертикальные асимптоты.

В область определения функции не входит точка $x = 4$,

$$D(y): x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$$

Исследуем характер разрыва функции в точке $x = 4$. Для этого найдем односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{3x^2 + x + 2}{x - 4} = \frac{48 + 4 + 2}{4 - 0 - 4} = \frac{54}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{3x^2 + x + 2}{x - 4} = \frac{48 + 4 + 2}{4 + 0 - 4} = \frac{54}{+0} = +\infty.$$

Вывод: в точке $x = 4$ функция терпит бесконечный разрыв и $x = 4$ – уравнение вертикальной асимптоты.

б) Находим уравнение наклонной асимптоты. Пусть $y = kx + b$ есть искомое уравнение асимптоты. Тогда:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + x + 2}{(x - 4) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{3x^2 + x + 2}{x - 4} - 3 \cdot x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + x + 2 - 3x^2 + 12x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{13x + 2}{x - 4} = 13.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты $y = 3x + 13$.

$$2) y = x - \ln x.$$

а) Вертикальные асимптоты.

Область определения функции $D(y): x \in (0; +\infty)$.

Исследуем поведение функции на границе области определения.

Найдем односторонний предел

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x - \ln x) = 0 - \ln(+0) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Вывод: односторонний предел равен бесконечности, поэтому $x = 0$ – уравнение вертикальной асимптоты.

b) Наклонные асимптоты $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1 - 0 = 1.$$

Здесь было использовано правило Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty.$$

Так как $b = -\infty$, то наклонной асимптоты нет.

3) $y = (x+1)e^{-3x}$.

a) Вертикальных асимптот нет, т.к. область определения функции $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

b) Наклонные асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) \cdot e^{-3x}}{x}.$$

Значение функции e^{-3x} зависит от того, стремится $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$. Поэтому находим отдельно левую и правую наклонные асимптоты.

Л е в а я

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)e^{-3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-3x} = 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty.$$

Так как $k = \infty$, то левой наклонной асимптоты нет.

П р а в а я

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^{-3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-3x} = 1 \cdot e^{-\infty} = 0.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot e^{-3x} = (\infty \cdot 0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)'}{(e^{3x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3e^{3x}} = \frac{1}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Так как $k = 0$, $b = 0$, то правой горизонтальной асимптотой графика функции является положительная часть оси OX .

Задача 3. Провести полное исследование и построить графики функций

Исследование функции проводят по схеме:

1. Находим область определения функции, выявляем точки разрыва и граничные точки области определения.
2. Находим асимптоты графика: вертикальные и наклонные.
3. Проводим исследование с помощью первой производной на экстремум и находим промежутки возрастания и убывания функции.
4. Проводим исследование с помощью второй производной: находим точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.
5. Определяем четность и нечетность функции, периодичность, вычисляем значения функции в дополнительных точках.

$$1) y = \frac{4x^3 + x^4}{4}$$

а) Область определения функции $x \in (-\infty, \infty)$.

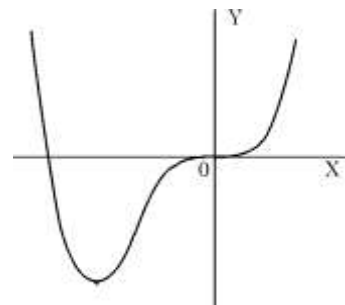
б) Нули функции

$$4x^3 + x^4 = x^3(4 + x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -4$$

Находим критические точки:

$$y' = 3x^2 + x^3 = x^2(3 + x) = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = -3.$$

Видно, что при переходе через точку $x = 0$, знак производной не изменится, и в этой точке не будет экстремума, а при переходе через $x = -3$ знак меняется с минуса на плюс, значит, в точке минимум. Значение функции в точке $y(-3) = -27/4$. Наносим эту точку на график. Заметим, что из графика видно, что имеются две точки перегиба, одна из них $(0;0)$, а другая находится между началом координат и точкой минимума. Если потребуется, можно найти точные координаты этой точки с помощью второй производной.



$$2) y = \frac{x^3}{3-x^2} = \frac{x^3}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}$$

а) Область определения $x \neq -\sqrt{3}, x \neq \sqrt{3}$

Исследуем характер разрывов. Найдем односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}-0} = \frac{(-\sqrt{3})^3}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+(-\sqrt{3}-0))} = \frac{-3}{2(-0)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}+0} = \frac{(-\sqrt{3})^3}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+(-\sqrt{3}+0))} = \frac{-3}{2(+0)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-(\sqrt{3}-0)2\sqrt{3}} = \frac{3}{2(+0)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-(\sqrt{3}+0)2\sqrt{3}} = \frac{3}{2(-0)} = -\infty$$

В точках $x = \pm\sqrt{3}$ функция терпит бесконечный разрыв, поэтому прямые

$x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$ – вертикальные асимптоты.

б) Рассмотрим поведение функции на бесконечности.

$$\text{При } x \rightarrow \pm\infty \quad y = \frac{x^3}{3-x^2} \sim -x$$

Значит, график имеет наклонную асимптоту с угловым коэффициентом, равным -1

с) Нуль функции: $y = 0$ при $x = 0$

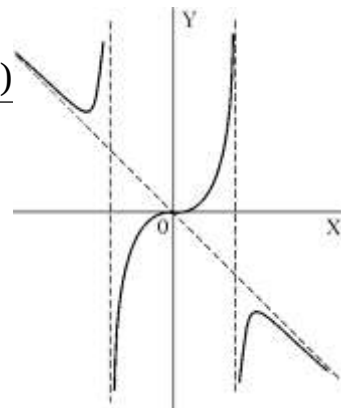
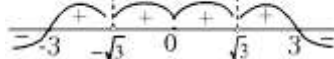
$$\text{В окрестности точки } x = 0 \quad y = \frac{x^3}{3-x^2} \sim \frac{1}{3}x^3$$

д) Экстремум.

$$y' = \left(\frac{x^3}{3-x^2} \right)' = \frac{3x^2(3-x^2) - x^3(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{-x^2(x^2-9)}{(3-x^2)^2}$$

$$y' = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 3, \quad y' = \infty \quad \text{при } x = \pm\sqrt{3} \notin D(y).$$

График знаков y'



В точке $x_1 = 0$ — экстремума нет, в точке $x_2 = -3$ — "гладкий" min, в точке $x_3 = 3$ — "гладкий" max. Значения функции в точках: $y(0) = 0$, $y(-3) = 4,5$; $y(3) = -4,5$.

Отметим, что точки разрыва функции не могут выступать в роли экстремальных.

е) Отметим, что данная функция является нечетной, и ее график симметричен относительно начала координат. Кроме того, видно, что точка $(0;0)$ является точкой перегиба графика.

$$1) y = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

а) Область определения $x > 0$

Исследуем поведение функции на границе области определения. Найдем односторонний предел

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\ln(+0)}{+0} = \frac{-\infty}{(+0)} = -\infty.$$

Т.о., прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

б) Нуль функции $y = 0$ при $x = 1$.

В окрестности точки $x = 1$ $y = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \sim \ln x$

с) При $x \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 0$

График имеет правую горизонтальную асимптоту $y = 0$

С учетом поведения функции имеем примерный график. Уточнить можно положение максимума и его величину.

д) Экстремум:

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \sqrt[3]{x} - \ln x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{3 - \ln x}{3x\sqrt[3]{x}}$$

$y' = 0$ при $\ln x = 3$, $x = e^3$, $y' = \infty$ при $x = 0 \notin D(y)$.

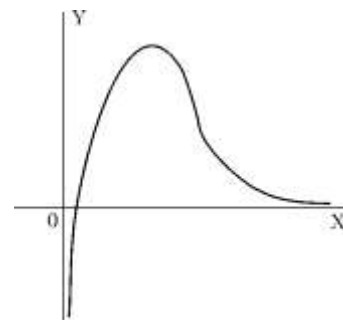
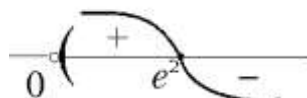


График знаков y'



Вывод: в точке $x = e^3$ – "гладкий" max.

Значение функции в точке max: $y(e^3) = \frac{3}{e} \approx 1,1$.

Из построения видно, что график функции должен иметь точку перегиба при $x > e^3$.

4). $y = x^2 \cdot \sqrt{x+1}$.

а) Область определения функции $D(y): x \in [-1; +\infty)$.

Находим предел функции на границе области определения

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 \cdot \sqrt{x+1} = 0.$$

Так как предел существует, то вертикальных асимптот нет.

б) При $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \sqrt{x+1} = \infty$$

При этом $y = x^2 \cdot \sqrt{x+1} \sim x^{5/2}$.

На бесконечности функция нелинейно возрастает с ростом x , поэтому наклонной асимптоты у графика нет.

с) Нули функции: $y = x^2 \cdot \sqrt{x+1} = 0$ при $x = 0$ и при $x = -1$.

д) Экстремум.

$$y' = 2x\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2x\sqrt{x+1} \cdot 2\sqrt{x+1} + x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_2 = -4/5,$$

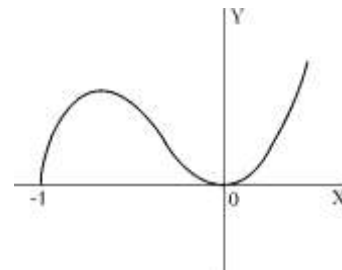
$$y' = \infty \text{ при } x_3 = -1 \in D(y).$$

График знаков y'



В точке $x_1 = -4/5$ – "гладкий" max,

в точке $x_2 = 0$ – "гладкий" min.



Экстремальные значения функции:

$$y(-4/5) \approx 0,3, y(0) = 0.$$

В точке $x = -1$ – граничной точке области определения, экстремума нет, график функции подходит к точке $(-1;0)$ вертикально.

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x - \sin 2x$ в интервале $[0; 3\pi/2]$.

а) Находим критические точки функции

$$y' = (2\sin x - \sin 2x)' = 2\cos x - 2\cos 2x = 2(\cos x + 1 - 2\cos^2 x).$$

$$y' = 0 \text{ при } \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1/2 \Rightarrow x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) В данный нам промежуток входят только точки:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2\pi/3, \quad x_3 = 4\pi/3.$$

в) Вычисляем значения функции $y = 2\sin x - \sin 2x$ в критических точках и на концах промежутка

$$y(0) = 0; \quad y(2\pi/3) \approx 2,58; \quad y(4\pi/3) \approx -2,58; \quad y(3\pi/2) = -2.$$

Сравнивая полученные значения, получаем:

$$y(2\pi/3) \approx 2,58 \text{ -- наибольшее значение функции,}$$

$$y(4\pi/3) \approx -2,58 \text{ -- наименьшее значение функции.}$$

Задача 5. оставить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_0$, или соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$1) y = \frac{2}{1+x^2}, \quad x_0 = 3$$

$$\text{Уравнение касательной } y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

$$\text{Находим } y_0 = f(x_0) = f(3) = \frac{2}{3^2+1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Находим производную функции и вычисляем ее значение при $x_0 = 3$

$$y' = \left(\frac{2}{x^2+1} \right)' = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}; \quad y'(x_0) = y'(3) = -\frac{4 \cdot 3}{(3^2+1)^2} = -\frac{3}{25}.$$

Подставляем $y(3)$ и $y'(3)$ в уравнение касательной

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{3}{25} \cdot (x - 3), \Rightarrow 3x + 25y - 14 = 0.$$

$$\text{Уравнение нормали } y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

$$y - \frac{1}{5} = \frac{25}{3} \cdot (x - 3), \Rightarrow 125x - 15y - 372 = 0.$$

2) $\begin{cases} x = 2t \cdot \cos t \\ y = 2t \cdot \sin t \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = \pi / 2$

а) Для составления уравнения касательной нам необходимо вычислить значения x_0 и y_0 точки касания

$$x_0 = x(t_0) = 2 \cdot (\pi/2) \cdot \cos(\pi/2) = 0,$$

$$y_0 = y(t_0) = 2 \cdot (\pi/2) \cdot \sin(\pi/2) = \pi.$$

б) Находим угловой коэффициент касательной. Для этого найдем производную параметрически заданной функции

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(2t \sin t)'}{(2t \cos t)'} = \frac{2(\sin t + t \cdot \cos t)}{2(\cos t - t \cdot \sin t)} = \frac{\sin t + t \cdot \cos t}{\cos t - t \cdot \sin t}.$$

Подставляем в полученное выражение $t_0 = \pi/2$

$$y'(\pi/2) = \frac{\sin(\pi/2) + (\pi/2) \cdot \cos(\pi/2)}{\cos(\pi/2) - (\pi/2) \cdot \sin(\pi/2)} = \frac{1}{-(\pi/2)} = -\frac{2}{\pi}.$$

Записываем уравнение касательной

$$y - \pi = -\frac{2}{\pi} \cdot (x - 0), \Rightarrow \frac{2}{\pi} x + y - \pi = 0.$$

Уравнение нормали $y - \pi = \frac{\pi}{2} \cdot x, \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot x - y + \pi = 0.$

4.2.7. Индивидуальное задание № 4 «Функции нескольких переменных»**Вариант 1**

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = 2y - x + \sqrt{4x^2 - y^2}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \arcsin(xy) + \frac{x^2}{3y}$$

$$2) \ z = \operatorname{tg} \frac{y^3}{x-y} + \sqrt[3]{x^2 + y^5}$$

$$3) \ z = (\sin 5y)^{(\ln x - x^2)} + \frac{\ln y}{y^2 - \sin x^2}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \sqrt{\arccos(x + 3y)}, \text{ где } x = 3^{t^2+t}, \ y = \frac{\operatorname{tg} t}{3}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z = (3x - 5y)^3 \cdot \cos \frac{1}{x-y}$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = x^2 \cdot e^{3y} \text{ в точке } M_0(1, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$(x + 4y)^2 - 5^{-y} = \frac{1}{x+7}$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$z \cdot \ln(x^2 + z) = \frac{3x}{\sqrt{z}} + \ln(y^3 - 4x)$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - y^3 - 3x + 6y$

Вариант 2

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \ln(x^2 - y - 4x + 8)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

$$2) \ z = \sqrt[6]{x^2 + 3y - 1} + \operatorname{tg} \frac{2x}{3y},$$

$$3) \ z = \left(y^3 - \frac{1}{\ln x}\right)^5 + \operatorname{tg} 2^x$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = e^{y \sin x}, \text{ где } x = \sqrt{t^3 + 3t + 1}, \ y = \frac{t^2 - 1}{t^3}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \sqrt{\frac{\arccos x}{\sin 2y}}$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = x^{\ln y} \text{ в точке } M_0(1, e)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$10^{x-y} + 3y^5 = \operatorname{arctg}(y + 2)$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\ln z + \sqrt{x^2 + y^3 + z^5} = e^{yz}$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

Вариант 3

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \sqrt{4y^2 - 9x}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = 3^x \cos x - e^{x^3} \cos^2 y,$$

$$3) \ z = \left(\operatorname{arccctg} \frac{2}{y} \right)^{\ln 3x} - \frac{4x + 5y}{3x^5 - y^2}$$

$$4) \ z = \arcsin \frac{y^2 - x}{3y} - \ln \operatorname{tg} (7xy^3)$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \sin(10x - 3y)^2, \text{ где } x = 4t^3 - 6t^2 + 1, \ y = -\frac{1}{t^2}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z = \sqrt{1 - y \cdot \operatorname{tg}^3(xy)}$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \operatorname{ctg}(x^2 y^3) \text{ в точке } M_0(1, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\ln x - e^{-2y} = \frac{x}{\sqrt{y}}$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$y^2 + 4x^2 - \sqrt{yz} + \sqrt{y^2 - z^3} = x^y$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = y\sqrt{x} - y^2 + 6y - x + 2$$

Вариант 4

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \arcsin(2x - y)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = y^2 \cdot \sqrt[3]{3x-5} + \frac{x}{y^3-1},$$

$$2) \ z = \frac{\ln(y + e^x)}{\arccos(x - 2y)}$$

$$3) \ z = \frac{y}{\sqrt{3y - \arcsin x^2}}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = y^3 \arcsin(x^2 + 1), \quad \text{где } x = \sqrt{t-2}, \quad y = \ln(t^2 - 3t + 2)$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z = \ln \operatorname{arctg}(2xy^3) - (y^5 - 3x^4)^2$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \sin(x^2 \cdot e^{3y}) \quad \text{в точке } M_0(1, 0)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$x \cdot \cos y^2 = \sqrt{4x - 3y^3}$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$1 - z^2 + 3x^3 \cos(2z + x) = \ln(x + 2y) - y^4$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

Вариант 5

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \arcsin \frac{1}{x} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \quad z = \left(\frac{y-1}{x+2} \right)^5 - e^{-\sqrt{y}}$$

$$2) \quad z = \frac{y^2}{\sqrt[5]{x^2 - y^2}} - \arcsin \frac{x}{y}$$

$$3) \quad z = \left(\frac{3}{5} \right)^{\sin y} + \ln \sqrt{x - 2y}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \ln(5y - \operatorname{arctg}(x^2)), \quad \text{где } x = \sqrt{t^2 + 6}, \quad y = t \cdot e^{3-t}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \frac{\sin x}{(3x^2 + 7y)}$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \sqrt{x^3 + \ln(y + 3)} \quad \text{в точке } M_0(1, -2)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$x \cdot \sin 5y - y \cdot \cos x = \ln(x^2 + y^3)$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$5(x^2 - 5y^4 + 9z^7) = 2(xyz - 3x^y + 2yz) + \frac{2}{z - y}$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$$

Вариант 6

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \frac{1}{\ln(y-x)}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \frac{x-3y^2}{\ln(x^3+y)} - \cos(xy^3)$$

$$2) \ z = \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} - y^2 \cdot 2^{\operatorname{arctg} y},$$

$$3) \ z = (2-x+5y)^4 \cdot \sin \frac{y}{x}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \frac{\cos(x-y)}{x}, \quad \text{где } x = (t^2 - 6t + 4), \quad y = 2t^3$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \operatorname{ctg}^2(y - \sqrt{x-3})$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \ln(x^2 + 5 \cos y) \quad \text{в точке } M_0(1, 0)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$x^2 + \ln y - x^2 e^y = \sqrt{y}$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$y + 2^y - z^2 = \arcsin(1 - z^2 - y)$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(6-x-y)$

Вариант 7

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \ln(x^2 - 6x + y - 8)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) z = \frac{x}{(x^3 - y^2)}$$

$$2) z = \frac{\arctg(x)}{\ln(1+3x-5y)} - \sqrt{x^y + y^x}$$

$$3) z = e^{\lg x} \cdot \sqrt{y - x^5}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \frac{x}{x^2 + y^3}, \text{ где } x = 1 - \operatorname{ctg}^3 t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{t^5}}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z = \sqrt[3]{\cos y + \sin x} - \sin(y \cdot \ln x)$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \arctg(x - 5y) \text{ в точке } M_0(-1, 1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\sin(2^x + y^2) + \ln x = \arctg 3y$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$z^x - x \cdot y^2 = x^3 \cdot \ln(zy^3)$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$

Вариант 8

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \sqrt{2y - x^2}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) z = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (x^2 + y^2)^3$$

$$2) z = e^{\sin x} - y^2 \cdot (\ln 3y)^{2x}$$

$$3) z = \arcsin(2x - y) + \operatorname{ctg}(xy) - \frac{1}{x^3 - y^2}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \frac{y^2}{\sqrt[3]{x}}, \text{ где } x = \arcsin 4t, \quad y = \sqrt{1 - t^3}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \frac{\ln(1 + e^x)}{x^2 + y^3}$,

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{x^2} \text{ в точке } M_0(-2, 4)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$y \cdot \sqrt[3]{x} = \ln(x^2 - y^5)$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\cos^2(x - z) - \sin(x^3 y) = z^5 - \operatorname{arctg} \frac{z}{x}$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x\sqrt{y} - x^2 + 6x - y + 3$$

Вариант 9

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \sqrt{3x^2 + 6y^2 - 9}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \frac{3y^2 - 5x}{y - x^3},$$

$$2) \ z = \arccos \frac{2x}{y^2 - \sqrt{x}}$$

$$3) \ z = (y^4 + 5)^{\frac{1}{x} - y}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \cos^2(4x - y^2), \quad \text{где } x = \sqrt{\ln(2-t)}, \quad y = e^{-3t}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z = \sqrt{x^3 - y^4} - e^{\sin y}$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \frac{3x}{2y + 5} \quad \text{в точке } M_0(1, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$(x + 5y)^4 = \sqrt{3x^2 - 4y} + 2^x$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\ln(3x + y - 5z^2) \cdot \cos(xy) = (x + 4y)^2 + \ln z$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(12 - x - y)$

Вариант 10

1. Найти и изобразить области определения функций:

$$z = \sqrt{2 - 3x^2 + 8y}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \frac{5x - 2y^3}{\ln(x^3 - y^5)},$$

$$2) \ z = \cos \frac{x-y}{x} - \frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

$$3) \ z = \ln(\operatorname{tg} y) \cdot \operatorname{ctg} \ln(3x - y^2)$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \arcsin(3x - y^2), \text{ где } x = \frac{1}{(t-5)^4}, \ y = \sqrt{5-4t^2}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \sqrt{y} \cdot e^{x-5y^4}$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \sqrt{\ln y} \cdot e^{3x} \text{ в точке } M_0(0, e)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\sqrt{x-6y} = \cos \sqrt{x^2 - y^3}$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$(2y + 3 \ln z)^2 = x^z + \frac{\sqrt{x}}{(1-yz)}$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y$$

Вариант 11

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \arcsin(1-y) + \sqrt{x-y^2}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \arctg \frac{3}{y-3} - \frac{\lg x - 9}{\ln(2-y^2)},$$

$$2) \ z = \sin \sqrt[7]{xy} - \frac{y^3}{2x-5},$$

$$3) \ z = \sqrt{x^2 - y^5} + (x - e^{5y})^2$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \sqrt{1 + \sin(y + \ln x)}, \text{ где } x = 6^{4t}, \ y = \sqrt[4]{5t}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \ln \sin(x^5 - y^3)$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \arctg(x^3 \cdot y^2) \text{ в точке } M_0(1, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$x^2 \cos 3y = y^3 + 2y + 5$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\ln(yz + x^2) = y^5 - 3\sin(z + \sqrt{y})$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - y^3 - 3x + 6y$

Вариант 12

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \sin \sqrt{y - x^3}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

1) $z = \sqrt{\ln(x^y - y^x)}$

2) $z = y^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \operatorname{tg}^3 y$

3) $z = \frac{5x^2 - y}{\operatorname{arctg} x} - \ln(3y^2 - y + 1) \cdot (2x)^{\ln y}$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \sqrt{4 + \operatorname{ctg}(x \ln y)}, \text{ где } x = 7^{2t}, y = \sqrt[4]{t}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \arccos \frac{x}{3y}$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = 3^{y/x} \text{ в точке } M_0(2, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\sqrt{\ln x + \ln y} - \frac{x^2}{y^3} + 3 \ln 5 = 0$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\arcsin(2xy) - \ln(x^y - \sin z) = \frac{\sqrt{z}}{2y}$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$$

Вариант 13

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \ln(16 - x^2 - y^2) + \ln(x^2 + y^2 - 9)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \left(\frac{x^2 - y}{3^y + x} \right)^3$$

$$2) \ z = e^{\cos 2x} - \operatorname{tg} y \cdot \ln(y^2 - 1)$$

$$3) \ z = \frac{(x - y)}{\operatorname{arctg} 3^y} - \frac{\cos(3y - x^2)}{\sin \ln y}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \arcsin(x^2 + y^2), \quad \text{где} \quad x = \ln(t^2 - 1), \quad y = \frac{2}{1 - t}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \sqrt{x - 2y^3}$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \ln(y^2 - e^{3x}) \quad \text{в точке} \quad M_0(1, 2)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$x \cdot \cos 2y - y \cdot 4^{-x} = (x - y)^2$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$(\operatorname{ctg} x)^z = 2 - \operatorname{arctg} \frac{x^2}{z - 5y}$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y$$

Вариант 14

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = 2 \ln^2(x^2 - 5y + 10)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$2) \ z = \sin \frac{x}{1-y} - \frac{1}{\sqrt{x-y^5}}$$

$$3) \ z = e^{-xy^2} \left(x^3 y - \frac{1}{\ln x} \right)$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{5y}, \text{ где } x = e^{2t-3}, \ y = \frac{1}{\sin 6t}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z = 2^{\cos y} - \operatorname{arctg} \ln(x^3 - 3y)$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = x^2 \cdot \cos y^3 \text{ в точке } M_0(1, 0)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$y^2 \cdot \sin 2x = \operatorname{arctg}(x - 2y)$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\ln(z - x^2 y) = \operatorname{ctg} \frac{x}{(z - 5)^2}$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y + 7$$

Вариант 15

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \sqrt{2x - \sqrt{y}}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \ln \operatorname{ctg} \frac{y^3}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$2) \ z = \left(\operatorname{arctg}(y^x) - \frac{x}{y^3} \right)$$

$$3) \ z = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-\cos x} - \frac{1}{(y+1)^2}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \arccos^4 \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad \text{где } x = t + \frac{t}{3}, \quad y = 6^{t+1}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z = \sqrt[3]{x^2 - y^4} - y^{\sin 3x}$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = e^{3y-x^2} \quad \text{в точке } M_0(1, 0)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$2^{4x+y} - y \cos xy - x = 0$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$(x + y - 3 \cos z) = \operatorname{arctg} \left(z^2 - \frac{x}{x-3y} \right)$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 - 6xy + 3y^2 + 12$$

Вариант 16

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \ln x + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \sqrt{y} \sin \frac{y-1}{x+2}$$

$$2) \ z = \cos\left(y^2 - \frac{1}{x}\right) + 2\operatorname{tg} \sqrt{2-y}$$

$$3) \ z = 3^{y^2-x^3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x^3 + y^2}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \sin(x - y^2), \quad \text{где } x = \frac{t-1}{6}, \quad y = \sqrt[5]{2-t^3}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = 3^{2y} \cdot e^{-x^2}$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \frac{3x - y}{2x + 5y} \quad \text{в точке } M_0(2, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\sqrt{3x^2 - y^2} + \frac{2}{x+y} = 5 \cos 6x$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$e^{z/x} + \cos x - 4xy^4z^3 = 0$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$

Вариант 17

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \ln(5 - 10x^2 - y^2)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \operatorname{arctg} \frac{x+2y}{3-y}$$

$$2) \ z = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{y}\right) + e^{-\sin(x-5y)}$$

$$3) \ z = 4^{-y/x} + \frac{y^2}{\arcsin x}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \frac{\sin y}{x^3}, \quad \text{где } x = 5^{2-7t}, \quad y = (7-t)^5$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = y \cdot (1 - 2\operatorname{ctg} \sqrt{x})$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \operatorname{tg}(x^2 - 3y) \quad \text{в точке } M_0(-1, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\frac{y}{x} = \operatorname{arctg} e^y - 3^x$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$z \cdot e^{xy} + x^2 = \sin z - 3y\sqrt{x-z}$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

Вариант 18

1. Найти и изобразить области определения функций:

$$z = \sqrt{y \cdot \ln x}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

$$1) \ z = \arcsin \frac{y^2}{x^3}$$

$$2) \ z = \ln(\sqrt{x-y} + \sqrt{1+y}) - \operatorname{arctg} \frac{xy^2}{x-8y}$$

$$3) \ z = \frac{2x}{\cos(y^2-1)} - x^{\ln y}$$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = \ln \cos(x^3 - y), \text{ где } x = 5^{3t-2}, \ y = \frac{4}{t}$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = \operatorname{tg}^2(3x + 2 \ln y)$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^5} \text{ в точке } M_0(1, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\sqrt{1-y^2} \cdot \cos x = \frac{1}{(x+7y)^3}$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$zy - z^3 + \sin \frac{1}{yz} = e^{z^3-x}$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2y - y^4 - x^3$

Вариант 19

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \frac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

1) $z = \arcsin(xy) + \arccos \frac{\sqrt{x}}{y}$

2) $z = y^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{4-y}{y^5}$

3) $z = \frac{\sin x^3}{x - \ln y} + \ln(x^2 - 1/y)$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = 5^{\sqrt{x^2 - 6y + 7}}, \text{ где } x = \ln^2 t, \quad y = t^3 - t^2 - 6$$

4. Найти полный дифференциал dz функции $z = e^{\sqrt{2x-3y}} \cdot \operatorname{tg} e^{-y}$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \frac{e^{3y}}{x^2} \text{ в точке } M_0(1, 0)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$xy - y \cdot 2^{-x^2} = \sqrt{(x-y)^5}$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\arcsin^2 z + 5x^3 y - \frac{\sqrt{z}}{x - 6y} = 0$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - x^2 - 2y^2$

Вариант 20

1. Найти и изобразить области определения функции

$$z = \ln(10 - 5x^2 - 2y^2)$$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

1) $z = y^3 \cdot e^{x/y}$

2) $z = \frac{\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}})}{x^2 + y^2}$

3) $z = \arcsin \frac{\sqrt{x}}{y-1} \cdot y^{2x^3}$

3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции

$$z = x^{2y} - (3y)^{-x}, \quad \text{где } x = \frac{1}{2-t^3}, \quad y = \ln(t^2 + 1)$$

4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z(x, y) = y^3 \cdot \cos 2x$$

5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = x^2 \cdot e^{3y} \quad \text{в точке } M_0(1, -1)$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$\ln(2y + x^3) - \frac{x}{\sqrt{y}} = 2 - 5xy$$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$z^y - y^3 + \operatorname{tg}(x - 7y) = \frac{y}{z} + \operatorname{tg} x$$

8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4\sqrt{xy}$$

**4.2.8. Решение типового варианта и образец оформления
индивидуального задания № 4 «Функции нескольких переменных»**

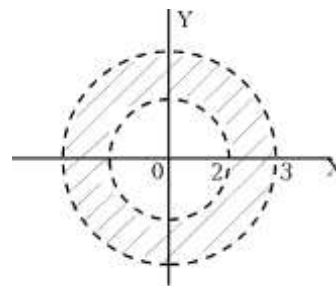
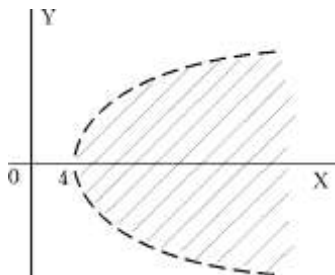
Задача 1. Найти и изобразить области определения функций:

1) $z = \ln(x - y^2 - 4)$.

Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента, поэтому

$$x - y^2 - 4 > 0 \Rightarrow y^2 < (x - 4).$$

Область определения данной функции изображена на рисунке. Граница области (парабола $y^2 = (x - 4)$) не входит в область и изображается пунктирной линией (область незамкнутая).



2) $z = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}}$.

а) Дробь определена при всех значениях переменных x и y , при которых знаменатель не обращается в ноль.

б) Подкоренное выражение должно быть строго положительным

$(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2) > 0$. Произведение сомножителей

положительно в двух случаях

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ 9 - x^2 - y^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0, \\ 9 - x^2 - y^2 < 0. \end{cases}$$

Первая система неравенств выполняется при условии $1 < x^2 + y^2 < 9$, а неравенства второй системы одновременно не выполняются. Таким образом, областью определения служит кольцо $1 < x^2 + y^2 < 9$, ограниченное окружностями с центром в начале

координат и радиусами 2 и 3. Сами окружности не входят в область определения

Задача 2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

Частные производные функции нескольких переменных находятся по правилам и таблицам

$$1) z = (x^4 + x^2 + 1)^{\cos 7y}.$$

Относительно переменной x функция является степенной, т.к. $\cos y = \text{const}$. Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$\begin{aligned} z'_x &= \cos 7y \cdot (x^4 + x^2 + 1)^{\cos 7y - 1} \cdot (x^4 + x^2 + 1)'_x = \\ &= \cos 7y \cdot (x^4 + x^2 + 1)^{\cos 7y - 1} \cdot (4x^3 + 2x). \end{aligned}$$

Относительно переменной y функция является показательной, т.к. $(x^4 + x^2 + 1) = \text{const}$. Используем формулу $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

$$\begin{aligned} z'_y &= (x^4 + x^2 + 1)^{\cos 7y} \cdot \ln(x^4 + x^2 + 1) \cdot (\cos 7y)'_y = \\ &= (x^4 + x^2 + 1)^{\cos 7y} \cdot \ln(x^4 + x^2 + 1) \cdot (-7 \sin 7y). \end{aligned}$$

$$2) z = \arcsin \frac{y}{x}. \text{ Используем формулу } (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)_x = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} \cdot y \cdot \left(\frac{1}{x} \right)_x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{-y/x^2}{\sqrt{1-(y/x)^2}}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)_y = \frac{\frac{1}{x} \cdot (y)'_y}{\sqrt{1-(y/x)^2}} = \frac{1/x}{\sqrt{1-(y/x)^2}}.$$

При дифференцировании аргумента $\frac{y}{x}$ в первом случае мы вынесли за знак производной постоянный множитель y , а во втором $1/x$.

$$3) z = \sqrt[3]{y} \cdot \operatorname{tg}^2(e^{5x-3y}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt[3]{y} \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}(e^{5x-3y}) \cdot \frac{1}{\cos^2(e^{5x-3y})} \cdot e^{5x-3y} \cdot 5.$$

Выражение $\sqrt[3]{y}$ при дифференцировании по x является постоянным множителем и выносится за знак производной, кроме того, при дифференцировании выражения $(5x-3y)$ по x производная $(-3y)'_x = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= (\sqrt[3]{y})_y \cdot \operatorname{tg}^2(e^{5x-3y}) + \sqrt[3]{y} \cdot (\operatorname{tg}^2(e^{5x-3y}))_y = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (y^{-2/3}) \cdot \operatorname{tg}^2(e^{5x-3y}) + \sqrt[3]{y} \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}(e^{5x-3y}) \cdot \frac{e^{5x-3y}}{\cos^2(e^{5x-3y})} \cdot (-3). \end{aligned}$$

Функция относительно переменной y является произведением, поэтому, прежде всего, применяем правило дифференцирования произведения, кроме того, при дифференцировании выражения $(5x-3y)$ по y производная $(5x)'_y = 0$.

Задача 3. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции

$$z = \sqrt{x} \cdot e^{3x-y^2}, \text{ где } x = t^5 + \ln t; y = \frac{1}{\sin t}.$$

Производную находим по формуле $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

Найдем все входящие в эти формулы производные отдельно

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{3x-y^2} + \sqrt{x} \cdot e^{3x-y^2} \cdot 3 = e^{3x-y^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \sqrt{x} \cdot e^{3x-y^2} \cdot (-2y), \quad \frac{dx}{dt} = 5t^4 + \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sin^2 t} \cdot \operatorname{cost}. \end{aligned}$$

Подставляем полученные производные в выражение для $\frac{dz}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \\ &= e^{3x-y^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) \cdot \left(5t^4 + \frac{1}{t} \right) + \sqrt{x} \cdot e^{3x-y^2} \cdot (-2y) \cdot \left(-\frac{\operatorname{cost}}{\sin^2 t} \right). \end{aligned}$$

Задача 4. Найти полный дифференциал dz функции

$$z(x, y) = \sqrt{\ln x} \cdot \operatorname{tg} 3y$$

Полный дифференциал функции двух переменных находим по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

Находим частные производные и подставляем в это выражение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg}^2 3y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{\ln x} \cdot 2\operatorname{tg} 3y \cdot \frac{1}{\cos^2 3y} \cdot 3$$

Получаем выражение для полного дифференциала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg}^2 3y \cdot dx + \sqrt{\ln x} \cdot 2\operatorname{tg} 3y \cdot \frac{3}{\cos^2 3y} \cdot dy$$

Задача 5. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции

$$z(x, y) = \ln(x^2 + \sqrt{y}) \quad \text{в точке } M_0(-1, 1)$$

Для нахождения смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ находим сначала частную производную функции по переменной x , а затем находим частную производную по переменной y от полученного выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{(x^2 + \sqrt{y})} \cdot 2x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{(x^2 + \sqrt{y})} \right) = -\frac{2x}{(x^2 + \sqrt{y})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Теперь вычисляем значение производной в заданной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{(x^2 + \sqrt{y})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = -\frac{2 \cdot (-1)}{((-1)^2 + \sqrt{1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Задача 6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

$$x^4 - 2\sin x + 3y^3 - \ln(x - 2y) + xy = e^{2y}.$$

Переносим члены из правой части в левую и обозначим

$$F(x; y) = x^4 - 2\sin x + 3y^3 - \ln(x - 2y) + xy - e^{2y}.$$

Искомую производную находим по формуле $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$

Находим частные производные этой функции как функции двух независимых переменных

$$F'_x = 4x^3 - 2\cos x - \frac{1}{x-2y} + y, \quad F'_y = 9y^2 - \frac{-2}{x-2y} + x - e^{2y} \cdot 2.$$

Подставляем в формулу

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{4x^3 - 2\cos x - \frac{1}{x-2y} + y}{\frac{2}{x-2y} + x - 2e^{2y} + 9y^2}.$$

Задача 7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x, y)$, заданной выражением

$$\sin(x + 3zy^2) - \sqrt{x^3 + 7z} - \frac{1}{3x + 5y} = 6 \cdot \ln y + 2.$$

Переносим члены из правой части в левую и обозначим

$$F(x; y; z) = \sin(x + 3zy^2) - \sqrt{x^3 + 7z} - \frac{1}{3x + 5y} - 6 \cdot \ln y - 2.$$

Находим частные производные этой функции по всем трем независимым переменным

$$F'_x = \cos(x + 3zy^2) \cdot 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 7z}} \cdot 3x^2 + \frac{1}{(3x + 5y)^2} \cdot 3,$$

$$F'_y = \cos(x + 3zy^2) \cdot 3z \cdot 2y + \frac{1}{(3x + 5y)^2} \cdot 5 - 6 \cdot \frac{1}{y},$$

$$F'_z = \cos(x + 3zy^2) \cdot 3y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 7z}} \cdot 7.$$

Подставляем эти выражения в формулы для частных производных неявной функции

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\cos(x+3zy^2) - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+7z}} + \frac{3}{(3x+5y)^2}}{\cos(x+3zy^2) \cdot 3y^2 - \frac{7}{2\sqrt{x^3+7z}}},$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\cos(x+3zy^2) \cdot 6zy + \frac{5}{(3x+5y)^2} - \frac{6}{y}}{\cos(x+3zy^2) \cdot 3y^2 - \frac{7}{2\sqrt{x^3+7z}}}.$$

Задача 8. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x + y - 6.$$

- 1) Функция определена для всех значений переменных x и y .
- 2) Находим частные производные первого порядка и составляем систему для определения координат точек, в которых возможен экстремум

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z'_x = 2x + y - 4, \\ z'_y = x + 2y + 1. \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Таким образом, найдена критическая (или стационарная) точка $M_0(3; -2)$.

- 3) Находим частные производные второго порядка и вычисляем их в точке $M_0(3; -2)$

$$a_{11} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_0} = 2, \quad a_{12} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_0} = 1, \quad a_{22} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_0} = 2.$$

В данном случае координаты точки не понадобились, так как производные второго порядка – постоянные числа.

Составляем выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$.

Отмечаем, что экстремум существует и, так как, при этом $a_{11} > 0$, в точке $M_0(3; -2) - \min$.

Значение функции в точке: $z_{\min} = z(3; -2) = -13$.

5. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные домашние задания.

Студенты, обучающиеся по КЗФ, сдают экзамен во время зимней экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме). Каждый билет содержит пять задач. Экзамен считается сданным, если решены 3 задачи и более. Преподаватель может задать вопросы по теории изучаемого материала.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, сдают экзамен в тестовой форме (on-line режим).

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

Предел. Непрерывность

1. Сформулируйте определения бесконечно малой и бесконечно большой величин при $x \rightarrow x_0$ и $x \rightarrow \infty$. Приведите графическую иллюстрацию.

2. Сформулируйте определения предела функции в точке и на бесконечности. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

3. Дайте определение предела числовой последовательности.

4. Запишите формулы 1-го и 2-го замечательных пределов.

5. Как сравнить две бесконечно малые величины? Что такое относительный порядок малости?

6. В каком случае бесконечно малые будут эквивалентны? Приведите примеры наиболее часто встречающихся соотношений эквивалентности.

7. Перечислите все виды неопределенностей. Какие приемы используются для раскрытия неопределенностей?

8. Что такое односторонние пределы функции в точке. Приведите примеры вычисления таких пределов.

9. Сформулируйте различные условия непрерывности функции в точке и на интервале. Какими свойствами обладают функции, непрерывные в точке?

10. Какими свойствами обладают функции, непрерывные в замкнутом промежутке? Проиллюстрируйте графически эти свойства.

11. Что понимают под разрывом функции в точке? Какие типы разрывов следует различать? Приведите определения каждого типа разрыва и их геометрическую иллюстрацию

Производная

1. Сформулируйте определение производной. В чем состоит геометрический и физический смысл производной?
2. Какая функция называется дифференцируемой в точке? на интервале? Как связаны понятия "непрерывности" и "дифференцируемости" функции в точке? Приведите графические примеры функций, непрерывных, но не дифференцируемых в точке. Как записывается приращение дифференцируемой функции?
3. Запишите правила дифференцирования суммы, произведения, частного двух функций.
4. Запишите правила дифференцирования сложной и обратной функций, параметрически заданной функции.
5. Опишите прием логарифмического дифференцирования. Когда он применяется?
6. Опишите прием дифференцирования неявно заданной функции.
7. Запишите производные основных элементарных функций.
8. Что такое дифференциал функции? Как он связан с ее приращением? Каков его геометрический и физический смысл?
9. Как находятся производные и дифференциалы высших порядков?
10. Какими свойствами обладают дифференцируемые функции (Сформулируйте и проиллюстрируйте графически теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).

Приложения производной

1. Сформулируйте определения возрастающей и убывающей на интервале функции.
2. Сформулируйте необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции в интервале. Поясните их графически.
3. Что такое экстремум функции? Какие существуют виды экстремумов?
4. Сформулируйте необходимые условия существования экстремума функции в точке. Приведите графические примеры.
5. Сформулируйте 1-е и 2-е достаточные условия существования экстремума.
6. Изложите схему исследования функции на экстремум.
7. Изложите схему нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в интервале.
8. Дайте определения выпуклости и вогнутости кривой в интервале, точек перегиба. Проиллюстрируйте геометрически.

9. Сформулируйте достаточные условия выпуклости и вогнутости кривой в интервале.

10. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования точек перегиба. Изложите схему отыскания точек перегиба.

11. Что называется асимптотой кривой? Укажите виды асимптот.

12. Изложите схему отыскания вертикальных асимптот.

13. Запишите уравнение наклонной асимптоты и формулы нахождения параметров этого уравнения. В каких случаях можно говорить об отсутствии у кривой наклонной асимптоты?

14. Дайте определения и запишите уравнения касательной и нормали к кривой.

15. В чем состоит правило Лопиталья? Для раскрытия каких неопределенностей оно применяется?

Функции нескольких переменных.

1. Дайте понятие функции двух (и более) независимых переменных, области определения такой функции. Что является графиком функции двух переменных?

2. Дайте определение непрерывности функции двух независимых переменных в точке и в области. Приведите примеры разрывных функций.

3. Сформулируйте определение частных производных функции двух независимых переменных по каждой из них. В чем состоит геометрический смысл частных производных функции.

4. Сформулируйте определение частного приращения и частного дифференциала функции. Определение полного приращения и полного дифференциала.

5. Как находятся частные производные высшего порядка? Сформулируйте условия равенства смешанных производных. Дифференциалы высших порядков и формулы их нахождения.

6. Дайте понятие сложной функции нескольких переменных. Запишите формулы дифференцирования сложной функции. Запишите формулы дифференцирования неявно заданной функции.

7. Что такое касательная плоскость и нормаль к поверхности? Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением в $S: F(x; y; z) = 0$ и $S: z = f(x; y)$.

8. Сформулируйте определение экстремума функции двух переменных. Каковы необходимые и достаточные условия существования экстремума функции двух переменных?

9. Изложите схему нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

5.3. Образцы билетов к экзамену для КЗФ

Экзаменационный билет № 0

1. Найти производные функций

$$1) y = \frac{\ln(x^2 + \cos 3x)}{\sqrt{2x+5}} \quad 2) y = 2^{\operatorname{tg} x} \cdot \arcsin^3\left(\frac{2}{x}\right)$$

2. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(5x+2)(3x+4)}{(5x-1)^2 \cdot (7x+3)}$$

3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4 \cdot \ln x$

4. Найти все асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 - 4x + 6}{7x - 1}$

5. Найти и построить область определения функции

$$z = \sqrt{2 - 3y^2 + 4x}$$

6. Найти значение смешанной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$z = \sqrt{2 - 3y^2 + \ln x}$$

5.4. Образцы билетов к экзамену для ДОТ

Экзамен проводится в тестовой форме (on-line)

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. Ильин В.А. Основы математического анализа. Часть 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1971.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1978.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука 1971.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 1. – М.: Высш. шк., 1980, часть 2. – М.: Высш. шк., 1986.

6.2. Учебно-методические пособия

5. Терехина Л.И., Фикс И.И. Высшая математика, часть 2. Предел, непрерывность. Производная. Приложения производной. функции нескольких переменных: учеб. пособие. – Томск, 2010.
6. Терехина Л.И., Фикс И.И. Математический анализ, часть 1: учеб. пособие. – Томск, 2004.

6.3. Internet-ресурсы

7. Сайт ТПУ. – Режим доступа: <http://www.tpu.ru>, вход свободный.



Учебное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1)

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

**ТЕРЕХИНА Людмила Ивановна
ФИКС Иван Иванович**

Рецензент

*кандидат технических наук,
доцент кафедры ВММФ*

И.А. Цехановский

Редактор С.В. Ульянова

Компьютерная верстка Т.И. Тарасенко

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать Хероx. Усл.печ.л. 7,27. Уч.-изд.л. 6,58.

Заказ . Тираж экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru

