**4.4. Симплекс-метод.**

Приведем алгоритм [7] симплекс-метода решения основной задачи. Обоснование симплекса-метода содержится, например, в [7],[8]. Пусть дана система линейных неравенств:

 (2)

, ,

, , ,

, .

Требуется определить максимальное (минимальное) значение линейной формы:

, . (1)

Прежде всего следует привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого введем дополнительные переменные

, ,

и преобразуем неравенство (2) в уравнение:

. (8)

,  ,

.

Уравнение (8) представляет собой систему *m* линейных уравнений с *n+m* неизвестными  . Решение этой системы определяется неоднозначно. Обозначим  векторы-столбцы матрицы  системы (8), . Так как матрица *Е* коэффициентов при дополнительных переменных  является

неособенной, то можно представить уравнение (8) в виде:

,

решение которого, очевидно, есть

,

где х можно рассматривать как произвольный вектор. Векторы  линейно независимы и образуют базис в пространстве . В итоге решение системы (8) определяется вектором  и называется базисным решением.

 *Построим первую симплексную таблицу.* Для этого положим . Тогда . В первой строке, начиная с четвертого столбца, запишем элементы матрицы-строки  коэффициентом линейной формы

.

Во второй строке запишем обозначения векторов . Во втором столбце таблицы запишем обозначения базисных векторов . В первый столбец будем вписывать коэффициенты , соответствующие переменным , базисного решения, которыми в первой таблице являются значения переменных . Третья и последующая строки таблицы до *m+2* –строки, начиная с третьего столбца, заполняются элементами

, .

В последнюю (индексную) строку вписываются значение  целевой функции, соответствующее базисному решению

,

и , .

Далее следует использовать *критерий оптимальности*. Если все , то базисное решение будет *оптимальным*.

Если среди элементов индексной строки есть положительные величины, то для определения оптимального решения необходимо перейти к новому базису. Для этого составляется *вторая симплексная таблица*, которая позволяет установить, какой из базисных векторов подлежит замене. Поиск нового базисного вектора осуществляется следующим образом. В индексной строке таблицы *1* отыскивается наибольшее положительное число

.

Соответствующий *вектор-столбец*  называется *ключевым* и должен быть введен в новый базис. При выборе  в качестве базисного вектора могут представиться два случая:

 1)  для всех *i*. Это означает, что значение линейной формы  может расти до бесконечности;

 2)  по крайней мере, для одного *i* . В этом случае можно найти новое базисное решение, для которого значение линейной формы  будет меньше: .

Далее находим *ключевую строку* в таблице. Для определения ключевой строки вычисляется величина

.

Итак, определены ключевые вектор-столбец  и ключевая вектор-строка . Элемент , расположенный на их пересечении, называется *разрешающим элементом*. Ключевую вектор-строку  следует вывести из базиса и заменить вектором .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Индексная строка |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Теперь построим *вторую симплексную таблицу*, используя для вычисления ее элементов соотношения:

 (9)

, .

Если вторая симплексная таблица не дает оптимального решения, строим третью таблицу и т.д. до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности.

**Пример.** Пусть дана система линейных неравенств:

 (10)

Требуется определить минимальное значение линейной формы

 (11)

Заменим неравенство (10) уравнениями:



и перепишем (11) в виде

, (11’)

или в матричной форме

, ,



,



Коэффициенты при  составляют единичную матрицу *Е*, т.е. векторы  линейно независимы и образуют базис. Следовательно, первое базисное решение задачи есть вектор

.

Составим первую симплексную таблицу и, используя выражения

 (9)

, ,

построим последовательно вторую и третью таблицы. Последняя третья таблица позволяет получить оптимальное решение.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ciб | aiб | b | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| a1 | a2 | a3 | a4 | a5 |
| 0 | a3 | 2 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | a4 | 2 | 1 | -2 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | a5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
|  |  | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | a3 | 6 | 0 | -3 | 1 | 2 | 0 |
| -1 | a1 | 2 | 1 | -2 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | a5 | 3 | 0 | 3 | 0 | -1 | 1 |
|  |  | -2 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | a3 | 9 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | a1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0,333333 | 0,666667 |
| 1 | a2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -0,33333 | 0,333333 |
|  |  | -3 | 0 | 0 | 0 | -0,66667 | -0,33333 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

В таблице 1 имеем , поэтому *k=1, r=2*, так как . Следовательно, вектор  должен быть заменен вектором .

В таблице 2 соответственно , поэтому *k=2, r=3,* так как в соответствующем столбце имеется единственный положительный элемент . Новый базис получается заменой  на .

Итак, .

Базисное решение  получается из системы, соответствующей базису :



**Задача: решить симплексным методом**

****