Министерство образования и науки Российской Федерации

Волгоградский Государственный Университет

Кафедра информатики и экспериментальной математики

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебное пособие по функциональному анализу

24 октября 2005

Волгоград 2005

Авторы пособия: к.ф.-м.н. доцент Ю.В. Помельников
к.ф.-м.н. А.Н. Кондрашов

Рецензент д.ф.-м.н. профессор А.А. Клячин

Кондрашов А.Н., Помельников Ю.В.

Нормированные пространства. Учебное пособие по функциональному анализу. – Волгоград: Издательство Волгоградского университета, 2005. – 47 С.

Учебное пособие предназначено для студентов математического факультета, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика и информатика" и "Математическое обеспечение и администрирование информационных систем".

© Составление
Кондрашов А.Н., Помельников Ю.В.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Данное пособие, первое из двух, предназначено для студентов изучающих основы функционального анализа.

Недоступность и дефицит учебно-методических пособий по данному предмету создают определенные трудности для студентов. Недавнее переиздание очень хорошего, но (к моменту переиздания) ставшего библиографической редкостью, задачника [1], немного улучшило ситуацию. Настоящее пособие призвано решить эту проблему на математическом факультете Волгоградского государственного университета.

Основную трудность при изучении курса функционального анализа представляет, как отмечалось, достаточно абстрактный уровень изложения теоретического материала. В этой связи особое значение приобретает решение достаточного количества задач. Навыки, получаемые при решении предлагаемых задач, позволят приобрести надежные и прочные знания как в теоретической области, так и в применении методов функционального анализа в приложениях. Пособие содержит достаточную подборку заданий для практических занятий. При составлении пособия и выборе заданий выдерживался баланс между доступностью задач и их глубиной. В качестве образца здесь приведено решение принципиальных примеров. Для удобства изучения в начале каждого раздела приведен необходимый теоретический материал. Это позволяет использовать пособие как для самостоятельного обучения, так и в преподавании курса функционального анализа.

Материал первой части пособия предназначен для освоения студентами первичных понятий функционального анализа, таких как "метрика", "норма", "банахово пространство", "гильбертово пространство", "компактность" и др. При подборе задач мы в основном опирались на, уже упоминавшийся, задачник [1], а также на [4]. При изложении теоретического материала на [2, 5, 6, 7, 8].

Авторы выражают глубокую благодарность В.А. Клячину, прочитавшему пособие в рукописи и сделавшего ряд полезных замечаний.

1. Метрические пространства

Пусть на множестве X задана положительная функция $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая аксиомам:

1) $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$, $(x, y \in X)$ (невырожденность);

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\forall x, y \in X$ (симметрия);

3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$, $\forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

В этом случае ρ называется метрикой заданной на X, а пара $\mathcal{X} = (X, \rho)$ — метрическим пространством. Число $\rho(x,y)$ называется, также, расстоянием между элементами x и y в $\mathcal{X}$.

Примером метрического пространства является n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, элементами (точками) которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n действительных чисел и в котором расстояние между любыми двумя точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_)$ определено по формуле

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j|^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Упражнение 1.1 ([7, С. 58—59]). *Доказать, что данная функция удовлетворяет всем аксиомам метрики.*

Легко убедиться, что функции

$$\rho_0(x,y) = \max_j |y_j - x_j|, \tag{2}$$

$$\rho_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j| \tag{3}$$

тоже удовлетворяют всем аксиомам метрики. Проверим справедливость аксиом метрики, например, для функции (3). Аксиомы невырожденности и симметрии очевидны. Докажем справедливость неравенства треугольника. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\rho_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j| = \sum_{j=1}^{n} |(y_j - z_j) + (z_j - x_j)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}(|y_j - z_j| + |z_j - x_j|) = \sum_{j=1}^{n}|y_j - z_j| + \sum_{j=1}^{n}|z_j - x_j| =$$
$$= \rho_1(z,y) + \rho_1(x,z).$$

Другим примером метрического пространства является пространство $\mathbb{C}^n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n комплексных чисел и в котором метрика определена по любой из формул (1) — (3).

Множество $\mathrm{S}_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < r\}$ называется *открытым шаром* с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$, а множество $\bar{\mathrm{S}}_r(x_0) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \leq r\}$ называется *замкнутым шаром* с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$.

Определение 1.1. Множество $E \subset X$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре (открытом или замкнутом). Число $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x,y \in E} \rho(x,y)$ называется диаметром множества E.

Упражнение 1.2. *Доказать, что ограниченность множества равносильна конечности его диаметра.*

Определение 1.2. Множество $E \subset X$ называется открытым, если каждая его точка содержится в E вместе с некоторым открытым шаром, центром которого является данная точка.

Определение 1.3. Точка $a \in \mathcal{X}$ называется предельной точкой множества $E \subset X$, если в любом шаре $\mathrm{S}_r(a)$ имеется хотя бы одна точка множества E, отличная от a. Точка a, при этом, может как принадлежать E так и не принадлежать. Множество всех предельных точек множества E называется производным множеством и обозначается через E'. Множество $\bar{E} = E \bigcup E'$ называется замыканием множества E. Множество для которого $\bar{E} = E$ называется замкнутым.

Определение 1.4. Множество $E \subset X$ называется всюду плотным в $\mathcal{X}$, если $\bar{E} = X$. Если для любого открытого множества $A \subset X$ существует его открытое подмножество $B \subset A$ которое не пересекается с E, то E называется нигде не плотным.

Определение 1.5. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$ *сходится* к элементу $x \in X$ в пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$ (или в метрике ρ), если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Определение 1.6. Две метрики ρ и ρ' заданные на одном и том же множестве X называются эквивалентными, если любая последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in X$ сходящаяся в одной из этих метрик к некоторому элементу $x \in X$, будет сходящейся к этому же элементу и в другой.

Определение 1.7. Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ метрического пространства $\mathcal{X}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \text{ т.ч. } \forall n, m > N \text{ выполнено } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Определение 1.8. Метрическое пространство $\mathcal{X}$ в котором всякая фундаментальная последовательность сходится называется *полным.* Полным метрическим пространством является, например, множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Пример не полного метрического пространства дает множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ с тем же расстоянием.

Перечислим основные свойства полных метрических пространств [7].

Теорема 1.1 (Бэр). *Для того, чтобы метрическое пространство $\mathcal{X}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела бы непустое пересечение.*

Теорема 1.2 (Бэр). *Полное метрическое $\mathcal{X}$ не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ и $\mathcal{Y} = (Y, \rho')$ два метрических пространства и существует взаимно однозначное отображение $f : X \longrightarrow Y$ такое, что для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$ выполнено неравенство

$$C_1 \rho(x, y) \le \rho'(f(x), f(y)) \le C_2 \rho(x, y) \ \ \forall x, y \in X.$$

Тогда пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называются квазиизометричными, а отображение f — квазиизометрией. В случае если $C_1 = C_2 = 1$ эти пространства называют также изометричными, а отображение, соответственно, изометрией.

Определение 1.9. Пусть $\mathcal{X}$ — метрическое пространство и $\mathcal{X}^*$ — полное метрическое пространство. Пространство $\mathcal{X}^*$ называется пополнением пространства $\mathcal{X}$, если $\mathcal{X}$ изометрично всюду плотному подмножеству $\mathcal{X}^*$.

Теорема 1.3. *Каждое метрическое пространство $\mathcal{X}$ имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из $\mathcal{X}$.*

Замечание 1. В ряде задач бывает полезен следующий *очевидный* принцип вложения. Если пространство (квази)изометрично подмножеству пространства полнота которого уже известна, то пополнение данного пространства будет (квази)изометрично замыканию найденного подмножества.

Упражнение 1.3. *Доказать принцип вложения.*

Пример 1.1. [6, С. 10—11] Пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \tag{4}$$

является полным.

Действительно, если последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики (4), то при любом фиксированном $x \in [a, b]$ числовая последовательность $f_n(x)$ является фундаментальной, и поэтому имеет предел (в силу полноты пространства $\mathbb{R}$). Обозначим этот предел $f(x)$. Покажем, что $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ в метрике (4). Действительно, имеем

$$\forall \varepsilon \ \exists N_\varepsilon \qquad \forall n, m \geq N_\varepsilon \ \text{ выполнено } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Зафиксируем n и перейдем к пределу при $m \to \infty$. В пределе для любого $n \geq N_\varepsilon$ получим неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in [a, b].$$

Следовательно, последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$. В курсе математического анализа было доказано, что тогда функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a,b]$. Полнота пространства $C[a,b]$ доказана.

Пример 1.2. [6, С. 11] Пространство ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой (4) является полным.

Действительно, как и в примере 1.1, доказывается, что если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ фундаментальна относительно метрики (4), то она сходится к некоторой функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, в метрике (4). Тогда

$$\exists n_1 : \sup_{x\in[a,b]} |f_{n_1}(x) - f(x)| < 1,$$

и поэтому для любого $x \in [a,b]$

$$|f(x)| \le |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \le 1 + \sup_{x\in[a,b]} |f_{n_1}(x)|.$$

Следовательно, функция $f(x)$ ограничена, что и доказывает полноту рассматриваемого метрического пространства.

Аналогично доказывается, что множество m всех ограниченных числовых последовательностей с метрикой

$$\rho(\{\xi^k\},\{\eta^k\}) = \sup_k |\xi^k - \eta^k| \tag{5}$$

является полным метрическим пространством.

Замечание 2. В дальнейшем мы часто будем рассматривать метрические пространства элементами которых являются числовые последовательности. Эти пространства являются бесконечномерными аналогами пространства конечномерных пространств $\mathbb{R}^n$. Часто в этих случаях нами используются следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = \{\xi_k\},\ k = 1, 2, \ldots$$

или с верхними индексами

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots) = \{\xi^k\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Пример 1.3. [6, С. 11] Множество всех сходящихся последовательностей действительных чисел с метрикой (5) является полным метрическим пространством.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов этого пространства фундаментальна относительно метрики (5). Тогда если $x_n = \{\xi_n^k\}$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \;\; \forall n, m \geq N_\varepsilon \;\; \text{вып.} \;\; |\xi_n^k - \xi_m^k| < \varepsilon \quad \forall k. \tag{6}$$

Отсюда следует, что при фиксированном k числовая последовательность $\{\xi_n^k\}$ сходится. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n^k = \xi^k.$$

Тогда, переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (6), получаем:

$$\forall n \geq N_\varepsilon \;\; |\xi_n^k - \xi^k| \leq \varepsilon \quad \forall k,$$

т.е. $\forall n \geq N_\varepsilon$

$$\sup_k |\xi_n^k - \xi^k| \leq \varepsilon,$$

а это означает, что $x_n \to x = \{\xi^k\}$ при $n \to \infty$. Осталось показать, что последовательность $x = \{\xi^k\}$ сходящаяся. Для любых k, p и n имеем:

$$\begin{gathered} |\xi^k - \xi^{k+p}| \leq |\xi^k - \xi_n^k| + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}| + \\ +|\xi_n^{k+p} - \xi^{k+p}| \leq 2\rho(x, x_n) + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}|. \end{gathered} \tag{7}$$

Из того, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$, следует, что

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon : \quad \rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{3},$$

а из сходимости последовательности $x_{n_\varepsilon} = \{\xi_{n_\varepsilon}^k\}$ следует, что

$$\exists K_\varepsilon : \quad \forall k \geq K_\varepsilon, \; \forall p \; |\xi_{n_\varepsilon}^k - \xi_{n_\varepsilon}^{k+p}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и поэтому

$$\forall k \geq K_\varepsilon, \; \forall p \;\; |\xi^k - \xi^{k+p}| < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $x = \{\xi^k\}$ сходящаяся.

Приведем еще пример неполного метрического пространства.

Пример 1.4. [6, С. 12] В множестве функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, введем метрику по формуле

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \tag{8}$$

Покажем, что это метрическое пространство не является полным.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{если } x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ nx & \text{если } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ 1 & \text{если } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, для любых n и p

$$\int\limits_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - \operatorname{sgn} x| dx + \int\limits_{-1}^{1} |\operatorname{sgn} x - f_n(x)| dx = \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n},$$

и поэтому последовательность непрерывных функций (9) фундаментальна относительно метрики (8). Легко видеть, что в этой метрике она сходится к разрывной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in [-1, 1]$. Покажем, что в множестве непрерывных функций предела нет.

Предположим противное: пусть последовательность (9) в метрике (8) сходится к непрерывной функции $g(x)$, $x \in [-1, 1]$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx \leq \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)| dx + \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - g(x)| dx.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание вышесказанное, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx = 0.$$

Функция $F(x) = f(x) - g(x)$ является непрерывной во всех точках отрезка $[-1, 1]$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, $g(x) = f(x)$ для любого $x \neq$

0 из отрезка $[-1,1]$, что противоречит предположению непрерывности $f(x)$ на $[-1,1]$. Последнее утверждение является следствием следующей простой леммы.

Лемма 1.1 ([6, С. 13]). *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема (по Риману!) на промежутке Δ и*

$$\int\limits_{\Delta} |f(x)|dx = 0,$$

то $f(x) = 0$ в любой точке $x \in \Delta$, в которой функция f непрерывна.

Действительно, если функция f непрерывна в точке $x_0 \in \Delta$ и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0, в которой $|f(x)| > 0$, и поэтому тогда

$$\int\limits_{\Delta} |f(x)|dx \geq \int\limits_{\Delta \cap O(x_0)} |f(x)|dx > 0.$$

Использованные литературные источники: [6, §1, пп 1.1, 1.2, С. 3—15], [7, Гл. 2, § 1—3, С. 57—87], [8, Гл. 2, §1,С. 189—197]

Задачи[1]

1. Является ли метрическим пространством множество точек окружности, если расстоянием между точками считать длину наименьшей дуги, соединяющей данные точки?

2. Является ли метрическим пространством семейство всех непустых подмножеств метрического пространства X, если "расстояние"между множествами $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset X$ определить равенством

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1,\ y \in E_2} \rho(x, y)?$$

[1]Подобранные в этом пункте задачи взяты из [1, Гл. 1, § 6, С. 37—42],[3, Гл. IV, С. 16—35], [4, Гл. IV, § 18, С. 356—362]

3. Доказать, что для любых трех точек x, y, z метрического пространства X справедливо неравенство

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y).$$

4. Доказать, что для любых четырех точек x, y, u, v метрического пространства X справедливо неравенство

$$|\rho(x,u) - \rho(y,v)| \le \rho(x,y) + \rho(u,v).$$

5. Доказать, что в метрическом пространстве последовательность может иметь только один предел.

6. Доказать, что для любых двух различных точек метрического пространства существуют непересекающиеся шары с центрами в этих точках.

7. Может ли шар радиуса 4 быть собственным подмножеством шара радиуса 3?

8. Будет ли на множестве всех числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ ($x_n \in \mathbb{R}$ или $x_n \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \ldots$) метрикой функция

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),\ y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)?$$

9. Является ли метрическим пространством семейство всех непустых подмножеств метрического пространства X, если "расстояние" между множествами $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset X$ определить равенством

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1, y \in E_2} \rho(x,y)?$$

10. Доказать, что если (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства соответственно с метриками ρ_X и ρ_Y, то функция

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \sqrt{[\rho_X(x_1, x_2)]^2 + [\rho_Y(y_1, y_2)]^2}$$

является метрикой в их произведении $X \times Y$, называемом в этом случае *декартовым произведением метрических пространств X и Y.*

11. Пусть $\rho(x,y)$ — метрика на множестве X. Доказать, что функции

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},$$

$$\rho_2(x,y) = \min\{\rho(x,y),1\}, \quad \rho_3(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$$

являются метриками на множестве X, эквивалентными метрике ρ.

12. Доказать, что следующие пространства неполны и построить их пополнение:

а) прямая $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y) = |\mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}y|$;

б) прямая $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y) = |e^x - e^y|$.

13. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$?

14. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы в метрике $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ вещественная прямая была полным метрическим пространством?

2. Линейные нормированные пространства

Определение 2.1. Линейным или векторным пространством над полем действительных (или комплексных) чисел называется множество L элементов $x, y, z, \ldots$ произвольной природы, для которых определены операции сложения двух элементов и умножения элементов на действительные (или комплексные) числа, при этом выполняются аксиомы:

1) каждой паре x, y элементов из L поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется суммой элементов x, y и обозначается $x+y$;

2) каждому элементу x из L и каждому действительному (комплексному) числу α поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется произведением элемента x на число α и обозначается αx.

При этом эти операции удовлетворяют следующим двум группам условий:

I. 1) $x + y = y + x$(коммутативность сложения);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);

3) существует элемент, называемый нулевым и обозначаемый 0, такой, что $x + 0 = x \ \forall x \in L$;

4) $\forall x \in L \ \exists y \in L : x + y = 0$;

II. 5) $1x = x \ \forall x \in L$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения);

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность относительно числового множителя);

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность относительно элементов пространства);

Для данного элемента $x \in L$ элемент $y \in L$, удовлетворяющий условию $x + y = 0$, называется противоположным элементу x и обозначается $-x$. Таким образом, по определению $x + (-x) = 0$. Элемент $x + (-y)$ называется разностью элементов x, y и обозначается $x - y$. Элементы линейного пространства обычно называют векторами, а операции сложения векторов и умножения вектора на число — линейными операциями.

Линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется любой вектор вида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \tag{10}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — числовые множители. Линейная комбинация (10) называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ отличен от нуля.

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация (10), равная нулю. Если же только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулю, то векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются линейно независимыми.

Определение 2.2. Произвольная система векторов линейного пространства называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 2.3. Линейное пространство называется n-мерным, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Линейное пространство называется бесконечномерным, если для любого $n \in \mathbb{N}$ в нем существуют n линейно независимых векторов.

В линейной алгебре изучаются в основном только конечномерные пространства. Бесконечномерные пространства являются предметом изучения функционального анализа.

Определение 2.4. Множество L' называется *подпространством конечномерного линейного пространства* L, если $L' \subset L$ и L' алгебраически замкнуто в L, то есть операции сложения элементов и умножения элемента на число, определенные в L не выводят за пределы L': если $x, y \in L'$, то и $x + y \in L'$, и $\alpha x \in L'$ для любого числа α.

Замечание 3. *Ниже мы уточним это определение на случай бесконечномерных пространств.*

Определение 2.5. Пусть задана некоторая система элементов линейного пространства L. Совокупность всех линейных комбинаций этой системы называется ее линейной оболочкой.

Очевидно, линейная оболочка любой системы элементов конечномерного линейного пространства L является подпространством этого конечномерного пространства.

Отображение f линейного пространства X в линейное пространство Y называется линейным отображением (или линейным оператором), если для любых векторов x, y из X и любых чисел α, β

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Множество всех линейных операторов, отображающих X в Y, обозначается $\mathcal{L}(X, Y)$.

Легко видеть, что при обычном определении сложения двух операторов и умножения оператора на число, это множество является линейным пространством.

Любое линейное взаимно однозначное отображение линейного пространства X на линейное пространство Y называется изоморфизмом этих пространств. В этом случае пространства X, Y называются изоморфными. Изоморфные пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не своими свойствами. Поэтому при изучении свойств линейных пространств изоморфные пространства не различаются.

Понятие линейного нормированного пространства. Само по себе понятие линейного пространства в функциональном анализе используется достаточно редко. Наиболее важную роль в функциональном анализе играют пространства в которых наряду с линейной структурой задана некоторая дополнительная структура "близости" ее элементов. Чаще всего такой структурой является некоторая топология определенная в пространстве и согласованная с алгебраическими операциями (то есть алгебраические операции должны быть непрерывными относительно выбранной топологии). Одним из наиболее важных классов изучаемых в функциональном анализе линейных топологических пространств являются линейные нормированные пространства.

Определение 2.6. Пусть на линейном пространстве L, заданным над полем вещественных (комплексных) чисел $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), задана функция $p(x) : L \longrightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая аксиомам:

1) $p(x) = 0 \iff x = 0$;

2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) и $\forall x \in L$;

3) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in L$ (аксиома треугольника).

Тогда пара (L, p) называется *линейным нормированным пространством (л.н.п.)*, а сама функция $p(x)$ называется нормой заданной на L.

Традиционно норму $p(x)$ принято обозначать через $\|x\|_L$ или, если ясно о каком пространстве идет речь, через $\|x\|$. В дальнейшем мы будем пользоваться традиционным обозначением.

Со всякой нормой $\|x\|_L$ заданной на линейном пространстве L можно связать метрику

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_L, \tag{$*$}$$

и тем самым превратить L в метрическое пространство. Метрику $(*)$ и норму с помощью которой она строится называют согласованными. Соответственно все понятия введенные ранее для метрических пространств переносятся на нормированные.

В линейных пространствах можно определить алгебраическую сумму множеств и произведение множества на число. Пусть $A, B \subset L$ — множества и $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ — число. Тогда

$$A + B \overset{\text{def}}{=} \{z \in L : \exists x \in A, \exists y \in B \ \text{ т.ч. } z = x + y\},$$

$$\lambda A \overset{\text{def}}{=} \{y \in L : \exists x \in A \text{ т.ч. } \ y = \lambda x\}.$$

Пусть $x, y \in L$ две произвольные точки. Множество

$$[x, y] \overset{\text{def}}{=} \{z \in L : \ z = \alpha x + \beta y, \ \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0 \ \ \alpha + \beta = 1\}$$

называется отрезком соединяющим x и y. Точки x, y, при этом, называются концами отрезка.

Определение 2.7. Множество $A \subset L$ которое вместе с двумя точками содержит соединяющий их отрезок называется *выпуклым.*

Примеры линейных нормированных пространств.

Пример 2.1. Рассмотрим семейство линейных нормированных пространств, элементами которых являются точки из $\mathbb{R}^n$, а норма для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется по формуле

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \tag{11}$$

где $p \geq 1$. В частных случаях, когда $p = 1$ и $p = 2$, известно, что функция (11) на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. В общем случае достаточно проверить, что для этой функции справедливо неравенство треугольника.

Обычно доказательство неравенства треугольника для (11) опирается на следующие полезные неравенства.

Лемма 2.1 (Неравенство Юнга). *Для любых неотрицательных чисел a и b и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{12}$$

где q такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лемма 2.2 (Неравенство Гельдера для сумм). *Для любых $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \le \|x\|_p \|y\|_q \tag{13}$$

где q такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \le \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1}|x_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q-1}|y_j| \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_q).$$

А так как $(p-1)q = p$, то

$$\|x + y\|_p^p \le \|x + y\|_p^{p/q} (\|x\|_p + \|y\|_q),$$

и, следовательно,

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Это неравенство треугольника для нормы (11) называется *неравенством Минковского* для сумм.

Определение 2.8. В линейном пространстве L две нормы $\|x\|$ и $\|x\|_*$ называются эквивалентными, если существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что

$$c_1\|x\| \le \|x\|_* \le c_2\|x\|.$$

Легко видеть, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы

$$\|x\|_* = \sup_j |x_j|$$

и

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

эквивалентны. Действительно,

$$\sup_j |x_j| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq \sqrt{n} \sup_j |x_j|.$$

Вообще, для конечномерных пространств справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство см., например, [6, С. 46] или [5, С. 151].

В курсе линейной алгебры рассматривается в основном конечномерное евклидово пространство. В конечномерном евклидовом пространстве всякое подпространство, т.е. алгебраически замкнутое множество автоматически будет замкнутым множеством и в топологическом смысле, то есть относительно предельного перехода. В силу последней теоремы это свойство будет справедливо для любого конечномерного линейного нормированного пространства.

В случае бесконечномерных пространств алгебраическая замкнутость не влечет за собой замкнутости в топологическом смысле. Поэтому определение 2.4 следующим образом уточняется.

Определение 2.4$'$. Множество $L' \subset L$ называется *линейным многообразием* если L' замкнуто относительно алгебраических операций в L, т.е. $\forall x, y \in L' \subset L$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполнено $\lambda x + \mu y \in L'$. Если к тому же L' является замкнутым множеством относительно нормы в L, то L' называется *подпространством* в L.

Пример 2.2. *Покажем, что в линейном пространстве $C[a,b]$ нормы $\|f\|_1 = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|$ и $\|f\|_2 = \int\limits_a^b |f(x)|dx$ не эквивалентны.*

Не ограничивая общности можно считать, что $a = 0$, $b = \pi$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin nx, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{n} < x \leq \pi, \end{cases}$$

и найдем нормы

$$\|f_n\|_1 = \max_{[0,\pi]} |f_n(x)| = 1,$$

$$\|f_n\|_2 = \int_0^\pi |f_n(x)| dx = \frac{2}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда очевидно, что данные нормы не эквивалентны.

Пример 2.3. Пусть L— множество всех ограниченных числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}, \dots$ Линейные операции для них введем покоординатно. Именно, если $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$, то по определению положим

$$x + y \overset{\text{def}}{=} \{\xi_k + \eta_k\}, \quad \alpha x \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \xi_k\},$$

где α — число. Очевидно, сумма двух ограниченных последовательностей и произведение ограниченной последовательности на число являются ограниченными последовательностями. В этом линейном пространстве введем норму

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|. \tag{14}$$

Легко проверяется, что функция (14) на множестве L удовлетворяет всем аксиомам нормы:

1) Если $\|x\| = \sup\limits_k |x_k| = 0$, то $|x_k| = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$ при всех k. Следовательно $x = 0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$;

2) Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ имеем $|\alpha x_k| = |\alpha||x_k|$. Следовательно $\|\alpha x\| = \sup\limits_k |\alpha x_k| = \sup\limits_k (|\alpha||x_k|) = |\alpha| \sup\limits_k |x_k| = |\alpha|\|x\|$;

3) Наконец для $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$, мы имеем

$$|\xi_k + \eta_k| \le |\xi_k| + |\eta_k| \le \sup_k |\xi_k| + \sup_k |\eta_k| = \|x\| + \|y\|.$$

Отсюда

$$\|x + y\| = \sup_k |\xi_k + \eta_k| \le \|x\| + \|y\|.$$

Определение 2.9. Так полученное нормированное пространство числовых последовательностей с нормой (14) называется пространством m ограниченных числовых последовательностей.

Пример 2.4. Пусть L— множество всех числовых последовательностей $\{\xi_k\}$ для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p, \quad p \geq 1$$

сходится. Линейные операции в L определим как и в предыдущем примере. Покажем, что эти операции не выводят за рамки L, т.е. их результаты принадлежат также L.

Действительно, если $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$ принадлежат L, то при любом фиксированном n, по неравенству Минковского мы имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Устремляя здесь $n \to +\infty$ получим неравенство Минковского для бесконечных сумм

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение 2.10. Следовательно так определенное пространство последовательностей L является линейным пространством. Данное пространство, снабженное нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (p \geq 1)$$

называется пространством l_p.

Использованные литературные источники: [6, §3 , пп 3.1—3.4 С. 39—59], [7, Гл. 3, § 1—3, С. 139—166], [8, Гл. 2, §3, С. 235—307]

Задачи[2]

15. Пусть $x_n, x, y_n, y \in L$, $(n \in \mathbb{N})$. Доказать, что

[2]Подобранные в этом пункте задачи взяты из [1, Гл. 1, § 2, С. 9—19]

a) если $x_n \to x$, то x_n — ограниченная последовательность;

b) если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, $(\lambda, \lambda_n, \in \mathbb{C})$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;

c) если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$;

d) если $x_n \to x$ и $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$;

e) если $x_n \to x$, то $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$;

f) если $x_n \to x$,$y_n \to y$, то $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$;

16. Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно. Что означает сходимость последовательности в каждом из перечисленных ниже пространств?

a) Пространство E^m строк $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $(x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C}))$ с нормой
$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2\right]^{1/2}.$$

b) Пространство c^m строк $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $(x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C}))$ с нормой
$$\|x\| = \max_{1 \le k \le m} |x_k|.$$

c) Пространство l^m строк $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $(x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C}))$ с нормой
$$\|x\| = \sum_{k=1}^{m} |x_k|.$$

d) Пространство l_p^m $(p > 0)$ строк $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $(x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C}))$ с нормой
$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right]^{1/p}.$$

e) Пространство l_1 последовательностей $x = (x_1, x_2 \ldots)$, $(x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C}))$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$, с нормой
$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

f) Пространство l_2 последовательностей $x = (x_1, x_2 \dots)$, ($x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C})$), удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$, с нормой

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{1/2}.$$

g) Пространство l_p ($p > 1$) последовательностей $x = (x_1, x_2 \dots)$, ($x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C})$), удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$, с нормой

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{1/p}.$$

h) Пространство m ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2 \dots)$, ($x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C})$) с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

i) Пространство c_0 стремящихся к нулю последовательностей $x = (x_1, x_2 \dots)$, ($x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C})$) с нормой

$$\|x\| = \max_k |x_k|.$$

j) Пространство c сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2 \dots)$, ($x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C})$) с нормой

$$\|x\| = \sup_k |x_k|.$$

17. Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы, т.е. норма определена корректно. Что означает сходимость последовательности в каждом из перечисленных ниже пространств?

a) Пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

b) Пространство $C^{(k)}[a, b]$ k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in [a,b]} |x^{(i)}(t)|.$$

c) Пространство $M[a,b]$ всех ограниченных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

d) Пространство K непрерывных на вещественной прямой финитных функций (равных нулю вне некоторого интервала, своего для каждой функции) с нормой

$$\|x\| = \sup_{t} |x(t)|.$$

e) Пространство $\tilde{L}_p[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \left[\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\right]^{1/p}, \quad 1 \le p < +\infty.$$

f) Пространство $V[a,b]$ функций с ограниченной на $[a,b]$ вариацией с нормой

$$\|x\| = |x(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} |x(t)|.$$

18. [3] Привести пример последовательности $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ которая бы принадлежала каждой из рассматриваемой пары пространств и:

a) сходилась в m, но не сходилась в l_1;

b) сходилась в m, но не сходилась в l_2;

c) сходилась в l_2, но не сходилась в l_1;

d) сходилась в c_0, но не сходилась в l_1;

e) сходилась в c_0, но не сходилась в l_2.

[3] Замечание по решению задач на сходимость последовательностей в различных функциональных пространствах.

Решение задач на сходимость имеет особенности для пространств последовательностей и для функциональных пространств.

— В пространствах последовательностей обычно удается выделить последовательность конечных наборов чисел изменяющихся по тому или иному закону. Например, $(\underbrace{1/n, 1/n, \dots, 1/n}_{n\text{-раз}}, 0, 0, ...)$ сходится в пространстве ограниченных последовательностей m, но не сходится в l_2.

— Для функциональных пространств на конечном промежутке [a,b] приходится строить ступенчатые функции наподобие: $f(x) = 1$ при x лежащих от 0 до $1/n$, и равной нулю в остальных точках (здесь $[a,b] = [0,1]$). Такая последовательность функций сходится в $L_2[0,1]$ к нулю, и не сходится в пространстве ограниченных функций с нормой $\|f\| = \sup_{[a,b]} |f(t)|$.

19. Доказать, что при любом $p \geq 1$ каждый элемент пространства l_p является и элементом пространства c_0, но элемент

$$x = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, \ldots\right) \in c_0$$

не принадлежит l_p ни при каком $p \geq 1$.

20. Доказать, что если рассматривать пространство l_1 как множество в пространстве m, то его замыкание есть c_0.

21. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность:

a) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

b) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$?

22. Сходится ли последовательность $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$ в пространстве: а) $C[0,1]$; б) $C^1[0,1]$?

23. Пусть $x_n(t), x(t), y(t) \in C^{(k)}[a,b]$, $x_n(t) \to x(t)$ при $n \to \infty$. Доказать, что $x_n(t)y(t) \to x(t)y(t)$ при $n \to \infty$.

24. Доказать, что всякая последовательность, сходящаяся в пространстве $C[a,b]$, будет сходящейся и в пространстве $\tilde{L}_2[a,b]$. Построить пример последовательности, сходящейся в $\tilde{L}_2[a,b]$, но не сходящейся в $C[a,b]$.

25. Доказать, используя формулу Лагранжа конечных приращений, что пространство пробных функций $C_0^1[a;b]$ вложено в пространство непрерывно дифференцируемых функций $C^1[a;b]$ и при этом

$$\|f\|_{C_0^1} \leq \|f\|_{C^1} \leq (b-a+1)\|f\|_{C_0^1}$$

26. Доказать, что открытый шар $S_r(x_0)$ — открытое множество, а замкнутый шар $\overline{S}_r(x_0)$ — замкнутое множество и замыкание $S_r(x_0)$ совпадает с замыканием $\overline{S}_r(x_0)$.

27. Доказать, что для произвольного множества $A \subset X$ множество A' замкнуто.

28. Доказать, что для произвольного множества $A \subset X$ имеет место включение $(A')' \subset A'$. Возможно ли здесь строгое включение?

29. Пусть $A \subset X$ — замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.

30. Пусть $A, B \subset X$ — замкнутые множества. Возможно ли, что $\rho(A, B) = 0$, если $A \cap B = \emptyset$?

31. Доказать, что в любом линейном нормированном пространстве существует два непересекающиеся открытые множества, которые нельзя поместить в непересекающиеся открытые.

32. Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$: а) открытым; б) замкнутым?

33. Будет ли замкнутым в пространстве $C[a, b]$ множество многочленов степени: а) $\leq k$; б) $= k$?

34. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ множество функций $x(t)$ таких, что для любого $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$, является открытым.

35. Доказать, что множество непрерывных кусочно линейных функций всюду плотно в пространстве $C[a, b]$.

36. Доказать, что множество многочленов всюду плотно в пространстве $C^{(k)}[a, b]$.

37. При каком условии на последовательность $a_n \in \mathbb{R}$ $(a_n > 0)$ будет ограниченным множеством:

a) параллелепипед $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| < a_n\}$;

b) эллипсоид $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{a_n^2} < 1\}$?

38. Доказать, что параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| < 1\}$ — открытое множество.

39. При каком условии на последовательность $a_n \in \mathbb{R}$ $(a_n > 0)$ будет открытым множеством параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| < a_n\}$?

40. Доказать, что параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| \leq a_n\}$ — замкнутое множество.

41. Доказать, что пересечение любого набора выпуклых множеств снова выпукло, в то время как объединение — не обязательно (привести соответствующий пример).

42. Пусть A и B — выпуклые множества. Определим их векторную сумму как

$$A + B \equiv \{c = a + b : \quad a \in A, b \in B\}.$$

Доказать, что

a) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

b) если A и B — выпуклые множества, то и $A + B$ — также выпуклое.

43. Для выпуклого и $\lambda \in \mathbb{R}$ определим множество λA равенством

$$\lambda A = \{c = \lambda a : \quad a \in A\}.$$

Доказать, что при $\lambda_i \geq 0$

a) $\lambda_1 A + \lambda_2 A = (\lambda_1 + \lambda_2)A$;

b) $\lambda_1 A$ — выпуклое множество.

44. Доказать, что любой шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

45. Будет ли замыкание выпуклого множества в линейном нормированном пространстве выпуклым множеством?

46. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество:

a) многочленов степени $= k$;

b) многочленов степени $\leq k$;

c) непрерывных функций удовлетворяющих условию $\int\limits_0^1 |x(t)|dt \leq 1$;

d) непрерывных функций удовлетворяющих условию $\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt \leq 1$;

e) непрерывно дифференцируемых функций удовлетворяющих условию

$$\max_{[0,1]} |x(t)| + \max_{[0,1]} |x'(t)| \leq 1?$$

47. Доказать, что в пространстве l_2 выпуклыми множествами являются:

a) параллелепипед $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| < \frac{1}{2^n - 1}\}$;

b) эллипсоид $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\}$?

48. Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном пространстве есть подпространство.

49. Доказать, что шар в линейном нормированном пространстве не может содержать ненулевого линейного многообразия.

50. Пусть $L \subset X$ — линейное многообразие, $L \neq X$. **51.** Доказать, что L не содержит никакого шара.

52. Пусть $L = \{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$.

a) Доказать, что L — линейное многообразие.

b) Является ли L подпространством?

53. Образуют ли последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$ $(x_k \in \mathbb{R})$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k = 0$, подпространство в пространстве: а) l_1 б) m?

54. Доказать, что пространство c_0 является подпространством в пространстве c.

55. Доказать, что пространство c является подпространством в пространстве m.

56. Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространство следующие множества функций:

а) монотонные функции;

б) четные функции;

в) многочлены;

г) многочлены степени $\leq k$;

д) непрерывно дифференцируемые функции;

е) непрерывные кусочно линейные функции;

ж) непрерывные функции с ограниченной вариацией;

з) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$;

и) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $\int_{-1}^{1} x(t)\, dt = 0$;

к) функции, удовлетворяющие условию Липшица с какой-нибудь постоянной, зависящей от функции?

57. Доказать, что отображение $f : C^1[a, b] \to C[a, b]$, $f(x) = \frac{d}{dx} x(t)$ непрерывно.

58. Будет ли непрерывным отображение $f(x) = x(1)$, если оно рассматривается как действующее:

a) из $C[0,1]$ в $\mathbb{R}$;

b) из $\tilde{L}_2[0,1]$ в $\mathbb{R}$ (см. задачу 17)?

59. Будет ли непрерывным отображение $f(x) = x^2(t)$, если оно рассматривается как действующее:

a) из $C[0,1]$ в $C[0,1]$;

b) из $\tilde{L}_2[0,1]$ в $\tilde{L}_2[0,1]$;

c) из $C[0,1]$ в $\tilde{L}_2[0,1]$?

Будет ли это отображение равномерно непрерывным?

3. Банаховы пространства

Определение 3.1. Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым.*

Пусть на одном и том же линейном пространстве L заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Если существует пара чисел $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такая, что $\forall x \in L$ выполнено

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1,$$

то эти нормы называются *эквивалентными.* Очевидно, что сходимость (фундаментальность) последовательности элементов пространства по одной из эквивалентных норм, влечет за собой сходимость (фундаментальность) этой же последовательности по другой.

Определение 3.2. Линейные нормированные пространства $(L, \|\cdot\|_L)$ и $(L', \|\cdot\|_{L'})$ называются *изоморфными*, если существует линейная квазиизометрия $J : L \longrightarrow L'$, являющаяся одновременно изоморфизмом линейных пространств в алгебраическом смысле. Если при этом $\|J(x)\|_{L'} = \|x\|_L$, то пространства называются *изометричными.*

Линейное отображение $J : L \longrightarrow L'$ нормированного пространства $(L, \|\cdot\|_L)$ в нормированное пространство $(L', \|\cdot\|_{L'})$ называется *вложением*, если оно является взаимно однозначным на области значений и существует такая константа $A > 0$, что

$$\|J(x)\|_{L'} \leqslant A\|x\|_L \ \ \forall x \in L.$$

Данное в п. 1 определение пополнения метрического пространства для л.н.п. можно переформулировать следующим образом. Банахово пространство $(\hat{L}, \|\cdot\|_{\hat{L}})$ называется пополнением л.н.п. $(L, \|\cdot\|_L)$, если $(L, \|\cdot\|_L)$ изометрично линейному многообразию всюду плотному в $\hat{L}$.

Примером банахова пространства является пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{1/2}$ или, в силу эквивалентности, *любое* конечномерное нормированное пространство. Другими примерами банаховых пространств являются пространства числовых последовательностей l_p и m.

Пример 3.1. [6, С. 54—56] Покажем, что пространство m — полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства m является фундаментальной, т.е. если $x_n = \{\xi_n^k\}$, то выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \ \forall n \geq N, \forall p > 0 \ \ \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^{n+p}| < \varepsilon. \tag{15}$$

Тогда для любого фиксированного k числовая последовательность ξ_k^n тоже фундаментальная и, следовательно, имеет предел. Пусть

$$\lim_{n\to+\infty} \xi_k^n = \xi_k.$$

В неравенстве $|\xi_k^n - \xi_k^{n+p}| < \varepsilon$, которое следует из неравенства (15), перейдем к пределу при $p \to \infty$. В результате для любого k получим неравенство

$$|\xi_k^n - \xi_k| \leq \varepsilon \ \ \forall n \geq N.$$

Отсюда следует, что,

$$\sup_k |\xi_k^n - \xi_k| \leq \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x = \{\xi_k\}$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что $\|x\| < +\infty$. Действительно,

$$\|x\| \leq \|x - x_N\| + \|x_N\| < \infty.$$

Таким образом, пространство m ограниченных числовых последовательностей банахово.[4]

Пример 3.2. [6, С. 56—58] Пространство l_p также полное. Докажем это.

Пусть последовательность $\{x_n\} \in l_p$ $(p \geq 1)$ — фундаментальная, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \;\; \forall n, m \geq N \;\; \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon. \tag{16}$$

Из неравенства (16) для $x_n = \{\xi_k^n\}$ имеем

$$|\xi_k^n - \xi_k^m| < \varepsilon \;\; \forall k.$$

Следовательно, при каждом фиксированном k числовая последовательность $\{\xi_k^n\}$ фудаментальна, а значит имеет предел. Пусть $\xi_k^n \to \xi_k$ при $n \to \infty$, и пусть $x = \{\xi_k\}$.

Из неравенства (16) следует, что для любого $M \in \mathbb{N}$ и любых $n, m \geq N$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k^m|^p < \varepsilon^p.$$

Устремляя здесь $m \to \infty$, в пределе получаем

$$\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k|^p \leq \varepsilon^p \;\; \forall n \geq N,$$

[4] **Замечание** по решению задач на полноту и пополнение пространств. Задача о полноте пространства обычно решается в два этапа.

1 этап. Каким-либо образом отыскивается предельная точка:

- в функциональном пространстве это обычно процедура поточечного предельного перехода;
- в пространстве последовательностей это предельный переход при фиксированном индексе последовательности.

2 этап. В неравенстве описывающем норму разности оценивается норма полученного предельного элемента и далее в том же неравенстве предельным переходом доказывается сходимость к найденному предельному элементу.

затем устремляя $M \to \infty$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n - \xi_k|^p \le \varepsilon^p \quad \forall n \ge N,$$

т.е. $\|x_n - x\|_p \le \varepsilon \quad \forall n \ge N$. Наконец заметим, что $\|x\|_p < \infty$, т.к.

$$\|x\|_p \le \|x - x_N\|_p + \|x_N\|_p \le \varepsilon + \|x_N\|_p.$$

Таким образом l_p является банаховым.

Ключевыми фактами теории банаховых пространств являются следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Каждое л.н.п. $(L, \|\cdot\|_L)$ имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрического отображения, переводящего L в себя.*

Теорема 3.2. *Пусть в банаховом пространстве $(L, \|\cdot\|_L)$ дана последовательность шаров $\bar{\mathrm{S}}_{r_n}(x_n)$ вложенных друг в друга $(\bar{\mathrm{S}}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \bar{\mathrm{S}}_{r_n}(x_n))$, причем $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в L существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем шарам.*

Использованные литературные источники: [6, §3 , пп 3.1—3.4 С. 39—59], [7, Гл. 3, § 1—3, С. 139—166], [8, Гл. 2, §3, С. 235—242]

Задачи[5]

60. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность в линейном нормированном пространстве ограничена.

61. Пусть $x_n \in X$ — фундаментальная последовательность и подпоследовательность x_{n_k} сходится. Доказать, что вся последовательность x_n сходится.

62. Какие из пространств задач 16,17 являются банаховыми?

63. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X — банахово пространство. Доказать, что X является банаховым и в другой норме.

[5] Подобранные в этом пункте задачи взяты из [1, Гл. 1, § 2, С. 19—23]

64. Будут ли эквивалентны на линейном пространстве непрерывных на $[a,b]$ функций нормы $\|x\|_{C[a,b]}$ и $\|x\|_{\mathcal{L}_2[a,b]}$?

65. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $C[a,b]$ в пространство $\mathcal{L}_2[a,b]$.

66. Доказать, что тождественное отображение $Jx = x$ осуществляет вложение пространства $C^k[a,b]$ в пространство $C[a,b]$ при любом натуральном k.

67. Доказать, что в банаховом пространстве последовательность непустых замкнутых вложенных множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет, и притом единственную общую точку.

68. Пусть в линейном нормированном пространстве X любая последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение. Доказать, что X — банахово пространство.

69. Доказать, что в банаховом пространстве любая последовательность непустых замкнутых вложенных шаров имеет общую точку.

70. Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных?

4. Гильбертовы пространства

Скалярным произведением на вещественном линейном пространстве H называется невырожденая симметричная положительно определенная билинейная форма $(x,y) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, т.е. функция (x,y) удовлетворяющая следующим аксиомам:

a) $(x,x) \geqslant 0 \ \forall x \in H$;

b) $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

c) $(x,y) = (y,x) \ \forall x,y \in H$;

d) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \ \forall x,y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

e) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \ \forall x,y,z \in H$.

Вещественное линейное пространство H с заданным на нем скалярным произведением называется *евклидовым.*

Пусть теперь H комплексное линейное пространство. В этом случае на H можно определить скалярное произведение как функцию $(x, y) : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяющую аксиомам:

a) $(x, x) \geqslant 0 \ \forall x \in H$;

b) $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

c) $(x, y) = \overline{(y, x)} \ \forall x, y \in H$ (где черта означает комплексное сопряжение);

d) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \ \forall x, y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}$;

e) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \ \forall x, y, z \in H$.

Комплексное линейное пространство с заданным на нем таким образом скалярным произведением называется *унитарным.*

Упражнение 4.1. *Доказать, что если H евклидово или унитарное пространство, то $\forall x, y \in H$ будет выполнено неравенство* Коши—Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

Из неравенства Коши—Буняковского нетрудно получить, что величина $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ обладает свойствами нормы. Покажем, например, что для нее справедливо неравенство треугольника. Имеем

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) =$$

$$= (x, x) + (x, y) + \overline{(x, y)} + (y, y) = (x, x) + 2\,\mathrm{Re}(x, y) + (y, y) \leqslant$$

$$(\text{ воспользуемся тем, что } \mathrm{Re}(x, y) \leqslant |(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \ )$$

$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Остальные аксиомы нормы устанавливаются еще проще и остаются для самостоятельной проверки.

Норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ называется согласованной со скалярным произведением в H. Если относительно нее пространство H является банаховым, то это пространство называется *гильбертовым.*

По аналогии с конечномерным случаем, число φ, $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ определенное равенством

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$

называется *углом* между векторами x и y.

Элементы $x, y \in H$ для которых $(x, y) = 0$ называются *ортогональными.* Факт ортогональности x и y обычно записывают в виде $x \perp y$.

Определение 4.1. Для произвольного множества $F \in H$ обозначим через $F^\perp$ его *ортогональное дополнение* в H, т.е. множество

$$F^\perp \overset{\text{def}}{=} \{z : \ z \in H, \ z \perp x \ \forall x \in F\}.$$

Определение 4.2. Система ненулевых элементов $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в H называется *ортогональной*, если $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Если к тому же для всех α $\|\varphi_\alpha\| = 1$, то система называется *ортонормированной.*

Определение 4.3. Ортогональная система $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется *полной* в H, если наименьшее подпространство содержащее эту систему есть H. Полная ортогональная система элементов также называется ортогональным *базисом* в H. Это означает что любой элемент из H можно приблизить линейной комбинацией $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$

Особую роль в практических приложениях играют гильбертовы пространства в которых существуют счетные ортогональные базисы.

Известно (см., например, [7]), что в гильбертовом пространстве H существует счетный ортогональный базис тогда и только тогда, когда это пространство *сепарабельно* (т.е. в пространстве существует счетное всюду плотное множество).

Определение 4.4. Если

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in H \tag{17}$$

произвольный ортогональный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то любой элемент $x \in H$ можно представить в виде ряда *Фурье*:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

где $c_k = \frac{(x,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$, $(k \in \mathbb{N})$, а сходимость понимается в смысле метрики H. Числа c_k называются *коэффициентами Фурье* элемента x по ортогональной системе (17).

Для произвольной счетной ортонормированной системы (17) справедливо *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{18}$$

Ортонормированная система (17) называется *замкнутой*, если для любого $x \in H$ справедливо *равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2. \tag{19}$$

Теорема 4.1. *В сепарабельном гильбертовом пространстве H всякая полная ортонормированная система является замкнутой, и обратно, всякая замкнутая ортонормированная система является полной.*

Равенство Парсеваля удобно для практической проверки полноты ортонормированной системы (17). Кроме того, часто бывает полезным следующий факт.

Теорема 4.2. *Для того, чтобы ортонормированная система (17) в сепарабельном гильбертовом пространстве H была полна, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам этой системы.*

Теорема 4.3. *Пусть $L \subset H$ — подпространство. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$, т.е. любой элемент $x \in H$ допускает единственное представление в виде $x = u + v$, где $u \in L$, $v \in L^{\perp}$. При этом $\rho(x, L) = \|x - u\| = \|v\|$.*

Элемент $u \in L$ из последней теоремы называется *проекцией* элемента x на подпространство L.

В заключение сформулируем еще одно простое утверждение, которое может оказаться полезным для решения данных ниже задач.

Теорема 4.4. *Для того, чтобы линейное многообразие L было всюду плотно в гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало ненулевого элемента ортогонального всем элементам многообразия L.*

Использованные литературные источники: [6, §5 , пп 5.1—5.3, С. 77—86], [7, Гл. 3, § 4, С. 166—193], [8, Гл. 2, §3, С. 280—307]

Задачи[6]

71. Доказать, что в евклидовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.
72. Доказать, что в унитарном пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
73. Пусть X — вещественное нормированное пространство и для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\}.$$

Доказать, что формула

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\}$$

задает в X скалярное произведение, согласующееся с нормой в X, т.е. такое, что $(x, x) = \|x\|^2$.
74. Пусть X — комплексное нормированное пространство и для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\}.$$

Доказать, что формула

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\} + \frac{i}{4}\{\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\}$$

задает в X скалярное произведение, согласующееся с нормой в X.

[6]Подобранные в этом пункте задачи взяты из [1, Гл. 1, § 3, С. 24—29]

75. Доказать, что в пространстве $C[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

76. В линейном пространстве $L_2[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций положим

$$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt.$$

Является ли это пространство гильбертовым?

77. В линейном пространстве $\tilde{H}_1[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций положим

$$(x,y) = \int\limits_a^b [x(t)y(t) + x'(t)y'(t)]dt.$$

Является ли пространство $\tilde{H}_1[a,b]$ гильбертовым?

78. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве H, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Доказать, что $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

79. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве H. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в H тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$.

80. Пусть x_n, y_n принадлежат замкнутому единичному шару $\overline{S}$ в гильбертовом пространстве H и $(x_n, y_n) \to 1$ при $n \to +\infty$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to +\infty$.

81. Доказать, что для того чтобы элемент x гильбертова пространства H был ортогонален подпространству $L \subset H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство

$$\|x\| \leq \|x - y\|.$$

82. Доказать, что для произвольного множества M в гильбертовом пространстве H множество $M^\perp$ является подпространством.

83. Доказать, что для любого множества M в гильбертовом пространстве H имеет место включение $M \subset (M^\perp)^\perp$. Возможно ли здесь строгое включение?

84. Доказать, что для множества M в гильбертовом пространстве H равенство $M = (M^{\perp})^{\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда M — подпространство H.

85. Пусть M, N — такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

86. В пространстве l_2 рассмотрим множество

$$M = \left\{ x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}.$$

Доказать, что M — линейное многообразие, всюду плотное в l_2.

Указание. Воспользоваться тем, что если вектор a из гильбертова пространства H ортогонален всюду плотному подмножеству $M_0 \subset H$, то $a = 0$.

87. Доказать, что в гильбертовом пространстве любая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение.

88. В пространстве $C[0,1]$ построить последовательность непустых вложенных замкнутых ограниченных множеств, имеющих пустое пересечение.

89. Пусть M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H. Доказать, что в M существует единственный элемент с наименьшей нормой.

90. В пространстве l_2 построить замкнутое множество, в котором нет элемента с наименьшей нормой.

91. Пусть M замкнутое выпуклое множество в вещественном гильбертовом пространстве H. Доказать, что элемент $y \in M$ удовлетворяет условию $\rho(x, M) = \|x - y\|$ тогда и только тогда, когда для любого $z \in M$ выполняется неравенство $(x - y, y - z) \geq 0$.

92. Доказать, что в гильбертовом пространстве любая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение.

93. В пространстве $C[0,1]$ построить последовательность непустых вложенных замкнутых выпуклых ограниченных множеств, имеющую пустое пересечение.

5. Компактные множества в нормированных пространствах

Определение 5.1. *Множество $K \subset X$ ($\mathcal{X} = (X, \tau)$ — топологическое пространство) называется* компактным, *если из любого покрытия этого множества открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, $K \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, можно выделить его конечное подпокрытие $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}$:*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

Данное определение является наиболее общим, выражающим важнейшее свойство множеств в общих топологических пространствах. В метрических пространствах вместо данного определения часто используют следующее.

Определение 5.2. *Множество $K \subset X$ ($\mathcal{X} = (X, \rho)$ — метрическое пространство) называется* компактным, *если из любой последовательности элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пределы этих последовательностей могут как принадлежать K, так и не принадлежать. Если все такие пределы лежат в K, то K называется* компактным в себе, *в противном случае K называется* относительно компактным *или* предкомпактным[7].

Очевидно, чтобы K было компактно в себе, необходимо и достаточно, чтобы оно было предкомпактно и замкнуто.

Метрическое пространство $\mathcal{X} = (X, \rho)$ в котором любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, называют *компактом.*

Замечание 4. Очевидно, что всякий компакт является полным метрическим пространством.

Теорема 5.1. *Пусть K компактное в себе множество пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$ и $f(x)$ — непрерывный функционал заданный на этом множестве. Тогда*

[7] По другой терминологии [1] вместо слов "компактность в себе" и "предкомпактность" употребляются термины "бикомпактность" и "компактность" соответственно.

a) функционал $f(x)$ ограничен на K;

b) функционал $f(x)$ достигает на K своих точных верхней и нижней границ.

Критерий компактности множества в метрическом пространстве. Существует общий критерий компактности множества расположенного в метрическом пространстве. Для того, чтобы его сформулировать, нам потребуется ввести следующее понятие.

Определение 5.3. Множество N метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$ называется ε-сетью для множества M этого же пространства, если для всякой точки $x \in M$ найдется точка $x_\varepsilon \in N$ такая, что $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$. Множества M и N, при этом, могут как пересекаться, так и не пересекаться. Возможно также $M = X$.

Критерий компактности выражается следующей теоремой Хаусдорфа.

Теорема 5.2. *Для компактности множества K метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$ необходимо, а в случае полноты $\mathcal{X} = (X, \rho)$ и достаточно, чтобы для всякого числа $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть для множества K.*

Следствие 5.2.1. *Для того чтобы множество K полного метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$ было компактным, достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала компактная ε-сеть.*

Следствие 5.2.2. *Компактное пространство $\mathcal{X} = (X, \rho)$ сепарабельно.*

Следствие 5.2.3. *Компактные множества в метрических пространства ограничены.*

Приведем еще один признак компактности множества в себе. Этот признак может быть также взят за определение.

Теорема 5.3. *Для того, чтобы замкнутое множество K в метрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$ было компактно в себе, необходимо и достаточно, чтобы из любого покрытия этого множества системой открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ можно было выбрать конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,n}$.*

Критерии компактности в пространствах l_p, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$. В заключение сформулируем критерии компактности в некоторых конкретных пространствах.

Теорема 5.4. *Множество $K \subset l_p$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограниченно и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n(\varepsilon)$, такой, что*

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in K.$$

Для того, чтобы сформулировать критерий компактности в $C[a,b]$ нам понадобятся следующие понятия.

Определение 5.4. Множество (семейство) функций $M \subset C[a,b]$ называется *равномерно ограниченным*, если существует константа $c > 0$, такая, что $\forall x(t) \in M$ выполнено

$$|x(t)| < c \quad \forall t \in [a,b].$$

Замечание 5. *Очевидно, что равномерная ограниченность множества M равносильна ограниченности этого множества по норме пространства $C[a,b]$.*

Определение 5.5. Семейство функций $M \subset C[a,b]$ называется *равностепенно непрерывным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое,что для всяких $t_1, t_2 \in [a,b]$ выполнено

$$|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon \quad \forall x(t) \in M.$$

Теорема 5.5 (Арцела). *Для того, чтобы множество функций $M \subset C[a,b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Сформулируем теперь критерий компактности в пространстве $L_p[a,b]$, где $p \geqslant 1$, $a < b$ — конечные числа.

Договоримся предполагать, что любая функция $x(t) \in L_p[a,b]$ продолжена нулем за пределы отрезка $[a,b]$, и тем самым для любых чисел $A < B$ имеют

смысл интегралы
$$\int\limits_A^B |x(t)|dt, \quad \int\limits_A^B |x(t)|^p dt.$$

Теорема 5.6 (Призак компактности в $L_p[a,b]$ М. Рисса). *Для того, чтобы семейство функций $K \subset L_p[a,b]$ было компактно, необходимо м достаточно, чтобы это семейство было ограничено по норме $L_p[a,b]$ и равностепенно непрерывны в L_p-среднем, т.е. чтобы выполнялись условия.*

a) *Найдется константа $c > 0$ такая, что $\int\limits_a^b |x(t)|^p dt \leqslant c^p$ для всех функций $x(t) \in K$;*

b) *Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\int\limits_a^b |x(t+h) - x(t)|^p dt < \varepsilon^p$ при любом $0 < h < \delta$ сразу для всех $x(t) \in K$.*

Использованные литературные источники: [2, Гл. 5, § 19, С. 200—212], [7, Гл. 2, § 6, 7, С. 115—134], [8, Гл. 2, §1, С. 195—196]

Задачи[8]

94. Доказать, что замкнутое подмножество компактного множества в метрическом пространстве снова компактное множество.

95. Доказать, что множество $\{f_n(x) = \sin nx\} \subset L_2[-\pi,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ замкнуто и ограничено, но не компактно.

96. Пусть A и B — компактные множества в метрическом пространстве (X,ρ). Доказать, что найдется пара точек: $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$, для которых выполнено
$$\rho(a,b) \geq \rho(a_0,b_0), \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

97. Доказать, что во всяком компактном подмножестве A метрического пространства (X,ρ) найдется пара точек $a_i \in A$, $i = 1,2$ таких, что
$$\rho(a_1,a_2) \geq \rho(x,y), \quad \forall x,y \in A.$$

[8]Подобранные в этом пункте задачи взяты из [1, Гл. 4, § 15, С. 75—80]

98. Пусть L — банахово пространство, $M \subset L$ — такое замкнутое множество, что для любого $\varepsilon > 0$ в L существует для M конечная ε-сеть. Доказать, что M — компактно в себе.

99. Доказать, что всякое подмножество компактного множества предкомпактно.

100. Пусть M компактное множество в банаховом пространстве L, $x_n \in M$ $(n \in \mathbb{N})$, x_0 — единственная предельная точка последовательности x_n. Доказать, что $x_n \to x_0$ $(n \to +\infty)$.

101. Доказать, что множество $x_n = \sin nt \in L_2[-\pi, \pi]$ $(n \in \mathbb{N})$ замкнуто и ограничено, но не компактно.

102. Пусть A — компактное множество в банаховом пространстве L. Доказать, что для любого $x \in L$ найдется такое $y \in A$, что $\rho(x, A) = \|x - y\|$.

103. Доказать, что компактное множество нельзя изометрично отобразить на свою часть.

104. В пространстве E^2 построить предкомпактное множество, изометричное своей части.

105. Пусть L — банахово пространство, $M \subset L$ — компактное множество, $\Phi : M \to M$ — такое отображение, что для любых $x, y \in M$ выполняется неравенство $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \geq \|x - y\|$. Доказать, что Φ есть изометрическое отображение M на себя.

106. Доказать, что в банаховом пространстве всякая система не пустых вложенных компактных множеств имеет непустое пересечение.

107. Пусть M_n — такая последовательность компактных множеств в банаховом пространстве L, пересечение любого конечного числа этих множеств не пусто. Доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ непустое.

108. Пусть L — банахово пространство, $A, B \subset L$ и:

а) A, B компактны; доказать, что множество $A + B$ компактно;

б) A компактно, B замкнуто; доказать, что множество $A + B$ замкнуто;

с) A, B предкомпактны; доказать, что множество $A + B$ предкомпактно;

г) A, B замкнуты; верно ли, что $A + B$ замкнуто множество?

109. Пусть $M \subset C[a, b]$ — множество функций и известно, что для любого

$\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \in [a,b]$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, что если $|t - t_0| < \delta$, то для любого $x(t) \in M$ выполняется неравенство $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$. Будет ли множество M равностепенно непрерывным?

110. Пусть M — равномерно ограниченное множество функций в пространстве $C[a,b]$. Доказать, что множество N функций вида

$$y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau,$$

где $x(t) \in M$, предкомпактно.

111. Доказать, что равномерно ограниченное множество функций $M \subset C[a,b]$, удовлетворяющих условию Липшица с общей постоянной, компактно в пространстве $C[a,b]$.

112. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$|x(0)| \leq k_1, \quad \int\limits_a^b |x'(t)|^2 dt \leq k_2$$

(постоянная $k_1 \geq 0$, постоянная $k_2 > 0$) предкомпактно в пространстве $C[a,b]$.

113. Пусть M — множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любого $t \in [a,b]$ и любой $x(t) \in M$ выполняется неравенство $|x'(t)| < k$, где постоянная $k > 0$.

2) для любой $x(t) \in M$ уравнение $x(t) = 0$ имеет на $[a,b]$ хотя бы один корень. Доказать, что M — компактное множество в пространстве $C[a,b]$.

114. Предкомпактны ли следующие множества функций в пространстве $C[0,1]$: а) $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$; б) $x_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbb{N}$; в) $x_n(t) = \sin(t+n)$, $n \in \mathbb{N}$; г) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$; д) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t$, $\alpha \in [1,2]$; е) $x_\alpha(t) = \operatorname{arctg} \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$; ж) $x_\alpha(t) = \mathrm{e}^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$?

Список литературы

[1] *В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Физматлит, 2002, 240 С.

[2] *В.А. Треногин* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980, 495 С.

[3] *Ю.С. 0чан* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций. М.: Просвещение, 1981, 271 С.

[4] *Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. Санкт-Петербург: ИЧП "Кристалл", 1994, 496 С.

[5] *Л.Д. Кудрявцев* Курс математического анализа. Т.3. М.: Высшая школа. 1989, 352 С.

[6] *Г.Н. Яковлев,* Функциональные пространства. *(В электронном виде с адреса http://math.fizteh.ru/study/literature/yakovlev_fs.pdf)* М.: Московский физико-технический институт. 2000, 128 С.

[7] *А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989, 624 С.

[8] *В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев* Методы решения задач по функциональному анализу. Киев. Выща школа. 1990, 479 С.