

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

“Санкт-Петербургская государственная лесотехническая
академия им. С.М.Кирова”

А.С.Миляев

доктор технических наук, профессор

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
СТАТИЧЕСКИЕ ПРОЧНОСТНЫЕ РАСЧЕТЫ

П р а к т и к у м

Для студентов, обучающихся по направлениям
150400 – Технологические машины и оборудование, 190500 –
Эксплуатация транспортных средств, 250300 – Технология
лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств.

Санкт-Петербург
2009

Практикум рассмотрен и рекомендован к изданию
учебно-методической комиссией лесомеханического факультета
Санкт-Петербургской государственной лесотехнической академии
21 сентября 2009г.

Р е ц е н з е н т ы

кафедра сопротивления материалов
С-Петербургского государственного политехнического университета
(заведующий кафедрой – доктор технических наук, профессор
Б.Е.Мельников),

кандидат технических наук, доцент В.А. Процентов;
кандидат технических наук, доцент К.М. Степанов
(*кафедра Строительных конструкций и механики твердого
деформируемого тела*
Военного инженерно–технического университета),

доктор технических наук, профессор В.С.Постоев
(*кафедра теоретической и строительной механики СПбГЛТА*).

УДК 624.04

Миляев А.С. Сопротивление материалов. Статические прочностные
расчеты: п р а к т и к у м / А.С. Миляев. СПб.: СПбГЛТА, 2009. – 326 с.

Представлено кафедрой теоретической и строительной механики СПбГЛТА.

Практикум состоит из тринадцати заданий, которые можно использовать в качестве заданий для выполнения расчетно-графических работ; комплексы заданий можно использовать в качестве заданий для выполнения курсовых работ.

В заданиях имеются необходимые сведения из теории и примеры расчетов. Необходимые справочные данные содержатся в тринадцати приложениях к основному тексту.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по направлениям 150400 – Технологические машины и оборудование, 190500 – Эксплуатация транспортных средств, 250300 – Технология лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств.

Табл. 29. Ил.166.

Темплан 2009 г. Изд.№ 104 .
JSBN 978-5-9239-0187-0.

© СПбГЛТА, 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задание № 1. Стержень с коническими вставками при осевой нагрузке...	5
Задание № 2. Расчет весомого бруса при осевом сжатии.....	14
Задание № 3. Проектировочный расчет балки по допускаемым напряжениям.....	28
Задание № 4. Определение несущей способности составной деревянной балки по допускаемым напряжениям.....	48
Задание № 5. Проектировочный расчет балок требуемой (заданной) жесткости.....	73
Задание № 6. Расчет центрально сжатых стержней на устойчивость...	91
Задание № 7. Проектировочный расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой конструкции.....	117
Задание № 8. Проектировочный расчет стержневых систем по предельному равновесию.....	141
Задание № 9. Предельная несущая способность статически неопределимых балок.....	163
Задание № 10. Трёхмерное напряжённо-деформированное состояние и локальная прочность твёрдых тел.....	186
Задание № 11. Расчеты статически неопределимых балок.....	206
Задание № 12. Расчет плоских статически определимых рам.....	240
Задание № 13. Расчеты плоских статически неопределимых рам.....	258
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Геометрические характеристики плоских фигур...	289
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Метод начальных параметров для определения перемещений в балках со ступенчато изменяющейся жесткостью.....	290
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Сортамент двутавровых балок (ГОСТ 8239-72*)..	306
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Сортамент швеллеров (ГОСТ 8240-72*).....	307
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Трубы стальные электросварные прямошовные (ГОСТ 10704-91).....	308
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Профили гнутые замкнутые сварные квадратные (ТУ 36-2287).....	309
ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Сталь круглая (ГОСТ 2590-71*).....	310
ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Неравнополочные уголки (ГОСТ 8510-72*).....	311
ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Равнополочные уголки (ГОСТ 8509- 86).....	313
ПРИЛОЖЕНИЕ 10. Коэффициенты φ продольного изгиба центрально сжатых элементов.....	315
ПРИЛОЖЕНИЕ 11. Вычисление определенных интегралов от произведения двух функций по формуле Симпсона.....	316
ПРИЛОЖЕНИЕ 12. Графоаналитический способ вычисления определенных интегралов от произведения двух функций (способ Верещагина)..	318
ПРИЛОЖЕНИЕ 13. Пластический момент сопротивления сечения в форме равнобокой трапеции.....	321
Библиографический список.....	325

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум имеет целью обеспечение проработанными заданиями для выполнения расчетно-графических и курсовых работ по сопротивлению материалов студентов, обучающихся по направлениям 150400 – Технологические машины и оборудование, 190500 – Эксплуатация транспортных средств, 250300 – Технология лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств.

Практикум состоит из тринадцати заданий, которые можно использовать в качестве заданий для выполнения расчетно-графических работ; комплексы заданий можно использовать в качестве заданий для выполнения курсовых работ.

Например, комплексы заданий 2, 3, 5, 6 можно использовать в качестве задания для выполнения курсовой работы на тему *Прочностные расчеты элементов несущих конструкций зданий и сооружений лесопромышленного комплекса*; комплексы заданий 1, 9, 10, 13 можно использовать в качестве задания для выполнения курсовой работы на тему *Прочностные расчеты элементов конструкций механизмов и лесных машин*.

В заданиях предлагается решить одну из трех задач сопротивления материалов: а) выполнить проверочный расчет (проверить прочность, жесткость, устойчивость); б) выполнить проектировочный расчет (подобрать размеры поперечных сечений по условиям прочности, жесткости, устойчивости); в) определить несущую способность конструкции по условиям прочности.

Практикум предназначен для первоначального знакомства и освоения научных основ, принципов и методов расчета элементов строительных и машиностроительных конструкций по допускаемым напряжениям и по предельному равновесию (по предельным нагрузкам). В качестве объектов для разъяснения научных основ, принципов и методов прочностных расчетов выбраны стержневые, шарнирно-стержневые и балочные конструкции.

В тексте каждого задания имеются необходимые сведения из теории и примеры расчетов. Необходимые справочные данные содержатся в тринадцати приложениях к основному тексту.

Некоторые задания связаны между собой расчетными схемами или текстом теории, что облегчает выполнение заданий.

В заданиях по расчетам статически неопределимых конструкций использованы только один раз статически неопределимые системы, поскольку многократно статически неопределимые системы изучаются в курсах строительной механики.

Раскрывать статическую неопределимость предлагается методом сил, с помощью теоремы Кастильяно и – в случае балок – с помощью метода начальных параметров.

Задание № 1. Стержень с коническими вставками при осевой нагрузке.

Прямой стальной стержень, состоящий из цилиндрических и конических элементов, жестко заделан одним концом и нагружен сосредоточенными силами F_1, F_2, F_3 вдоль своей оси. Длина элементов – l_1, l_2, l_3 ; радиусы поперечных сечений цилиндрических элементов – r, R ; радиусы меньших оснований конических элементов – r_k, R_k , угол конусности – α .

Требуется построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений w сечений стержня. Модуль упругости стали $E = 200 \text{ ГПа}$.

Расчетные схемы стержней приведены на рис.1, исходные данные – в таблице 1.

Номер расчетной схемы и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $n_2 n_1 n_0$, выданному преподавателем; n_2, n_1, n_0 – три цифры кода студента: n_2 – первая слева цифра, n_1 – вторая слева цифра, n_0 – последняя цифра кода.

Пример расчета стержня с коническими вставками

Рассматривается прямой стальной стержень, состоящий из одного цилиндрического элемента с радиусом поперечного сечения $r = 10 \text{ мм}$ и длиной $l_1 = 300 \text{ мм}$ и двух конических элементов, радиусы меньших оснований которых $r_k = 10 \text{ мм}$, $R_k = 20 \text{ мм}$, а длины $l_2 = 400 \text{ мм}$, $l_3 = 200 \text{ мм}$; угол конусности $\alpha = 20^\circ$. Модуль упругости стали $E = 200 \text{ ГПа}$. Стержень жестко заделан левым концом и нагружен сосредоточенными силами $F_1 = 20 \text{ кН}$, $F_2 = 30 \text{ кН}$, $F_3 = 40 \text{ кН}$ вдоль своей оси, как показано на рис.2,а.

Требуется построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений w сечений стержня.

Полагаем, что устойчивость сжатых элементов стержня обеспечена.

Используем систему координат Oyz с началом в заделке и осью Oz , направленной вдоль оси стержня.

При осевом растяжении-сжатии стержней все внутренние усилия в поперечных сечениях, кроме продольной силы N , равны нулю.

1. Определение продольных сил в сечениях.

Для определения продольной силы N используется метод сечений.

Предварительно определяем опорную реакцию R_0 . Отбрасываем заделку и прикладываем опорную реакцию R_0 ; так как заранее неизвестно направление R_0 , то принимаем направление R_0 влево, что соответствует растяжению стержня. Если в результате расчета окажется, что R_0 имеет знак “–”, то правильное направление R_0 – направо, и R_0 сжимает стержень.

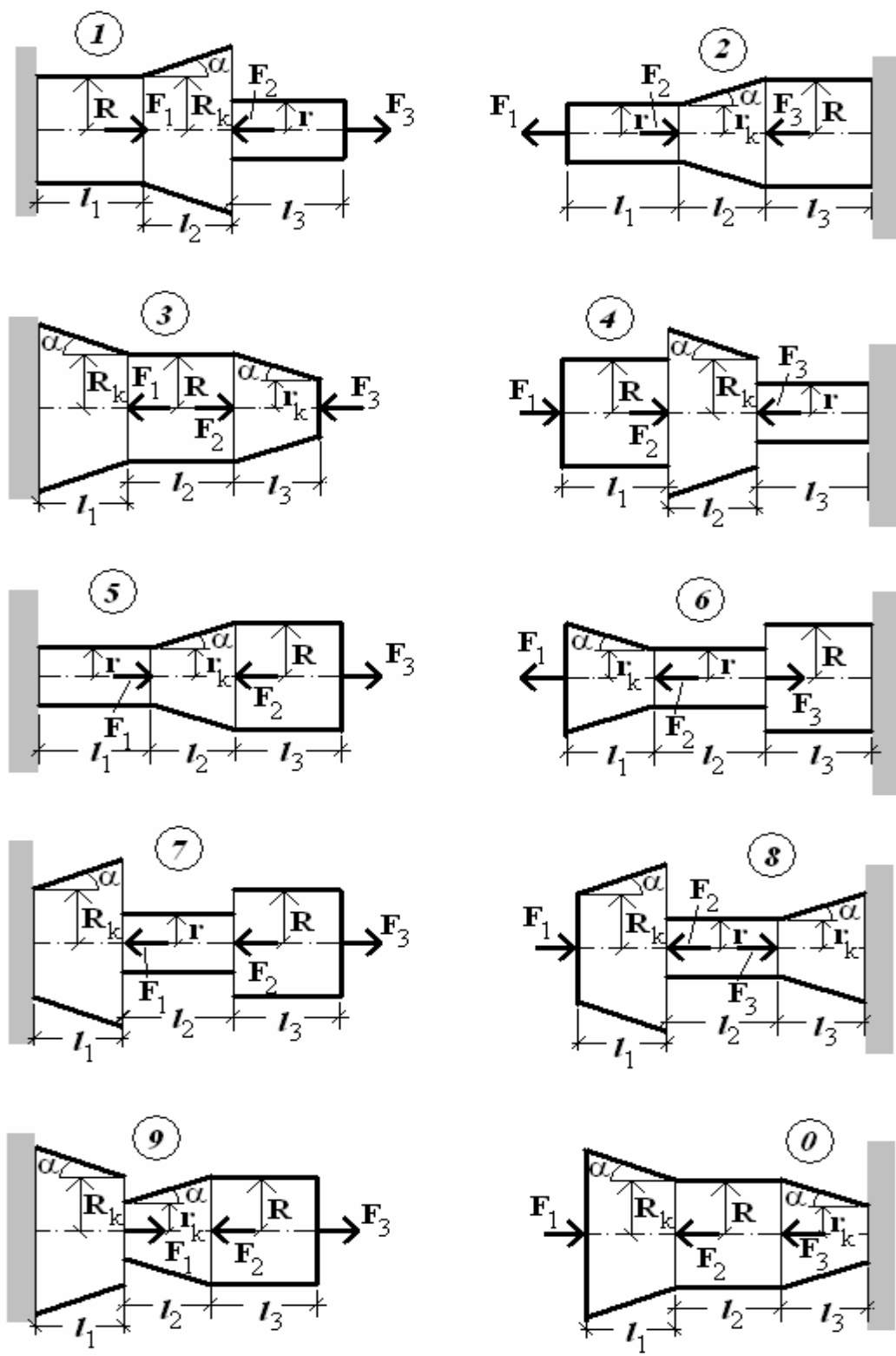


Рис.1. Расчетные схемы стержней с коническими вставками.

Таблица 1

Исходные данные к расчету стержня

n ₀	№ схемы	мм				n ₁	кН			n ₂	град	мм		
		r	R	r _к	R _к		F ₁	F ₂	F ₃			l ₁	l ₂	l ₃
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	10	20	-	20	1	40	60	20	1	15	200	300	100
2	2	12	-	12	-	2	20	60	40	2	20	300	100	300
3	3	-	-	12	-	3	60	80	40	3	12	100	200	100
4	4	12	24	-	24	4	80	40	60	4	10	300	100	100
5	5	10	-	10	-	5	40	80	20	5	12	100	100	300
6	6	12	24	12	-	6	60	40	80	6	20	100	300	100
7	7	10	20	-	20	7	20	80	40	7	15	300	100	100
8	8	12	-	12	24	8	60	100	20	8	20	200	100	100
9	9	-	-	10	24	9	100	20	60	9	12	100	200	100
0	0	-	-	12	-	0	20	60	100	0	10	200	100	200

Примечание:

Размеры радиусов r , R , r_k , R_k , не указанные в таблице, вычисляются по заданным размерам радиусов и величинам α , l_1 , l_2 , l_3 .

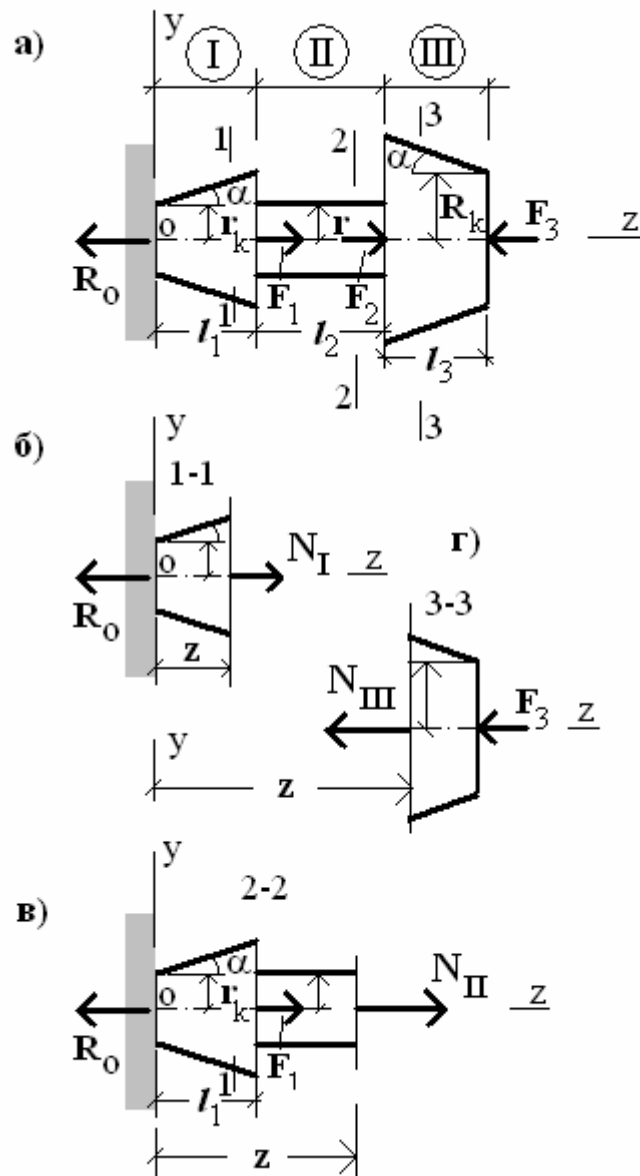


Рис.2. Определение продольных сил.

Стержень находится в равновесии под действием сил F_1, F_2, F_3 и опорной реакции R_0 , направленных вдоль оси Oz стержня. Составляем уравнение равновесия и определяем R_0 :

$$\sum F_z = 0; -R_0 + F_1 + F_2 - F_3 = 0, R_0 = F_1 + F_2 - F_3 = 20 + 30 - 40 = 10 \text{ кН.}$$

Строим аналитические выражения продольной силы $N = N(z)$ вдоль оси стержня.

Разбиваем стержень по его длине на участки, в пределах которых не изменяются внешние силы, и нумеруем их числами I, II, III.

Используя метод сечений, рассекаем брус по I-му участку (рис.2,б) и отбрасываем правую часть. Прикладываем к оставшейся части реакцию отброшенной части – продольную силу N_I , а также внешнюю силу – R_0 . Составляем уравнение равновесия выделенной части и из него находим выражение $N = N(z)$ на I-ом участке:

$$\text{участок I: } 0 \leq z < l_1; \quad \sum F_z = 0;$$

$$N_I - R_0 = 0, N_I = R_0 = 10 \text{кН.} \quad (1)$$

Аналогично, используя метод сечений, рассекаем брус по II-му участку (рис.2,в) и отбрасываем правую часть. Прикладываем к оставшейся части реакцию отброшенной части – продольную силу N_{II} , а также внешние силы – R_0 и F_1 . Составляем уравнение равновесия оставшейся части и из него находим выражение $N = N(z)$ на II-ом участке:

$$\text{участок II: } l_1 \leq z < (l_1+l_2); \quad \sum F_z = 0;$$

$$N_{II} - R_0 + F_1 = 0, N_{II} = R_0 - F_1 = 10 - 20 = -10 \text{кН.} \quad (2)$$

Рассекаем брус по III-му участку (рис.2,г) и отбрасываем левую часть. Прикладываем к оставшейся правой части реакцию отброшенной левой части – продольную силу N_{III} , а также внешнюю силу – F_3 . Составляем уравнение равновесия оставшейся части и из него находим выражение $N = N(z)$ на III-ем участке:

$$\text{участок III: } (l_1 + l_2) \leq z < (l_1+l_2+l_3); \quad \sum F_z = 0;$$

$$-N_{III} - F_3 = 0, N_{III} = -F_3 = -40 \text{кН.} \quad (3)$$

По выражениям (1) ÷ (3) строим эпюру $N = N(z)$ (рис.3).

Эпюра N имеет скачки ΔN продольной силы в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы F_1 , F_2 , F_3 . Величина скачков равна величине приложенной в сечении сосредоточенной силы.

2. Определение напряжений в сечениях.

Определение напряжений в прямых стержнях при осевом растяжении-сжатии производят с использованием гипотезы *плоских сечений*, которую можно сформулировать следующим образом: *при осевом растяжении-сжатии прямых стержней плоские поперечные сечения, нормальные к оси стержня до его деформации, остаются плоскими и нормальными к оси стержня и после его деформации; при этом ось стержня остается прямой.*

В соответствии с гипотезой *плоских сечений* в данном сечении удлинение оси стержня $\Delta l = \text{const}$, следовательно, относительные

продольные деформации $\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l_0} = \text{const}$, нормальные напряжения $\sigma_z = \text{const}$. Таким образом, при осевом растяжении-сжатии прямых стержней σ_z и ε_z равномерно распределены по поперечному сечению.

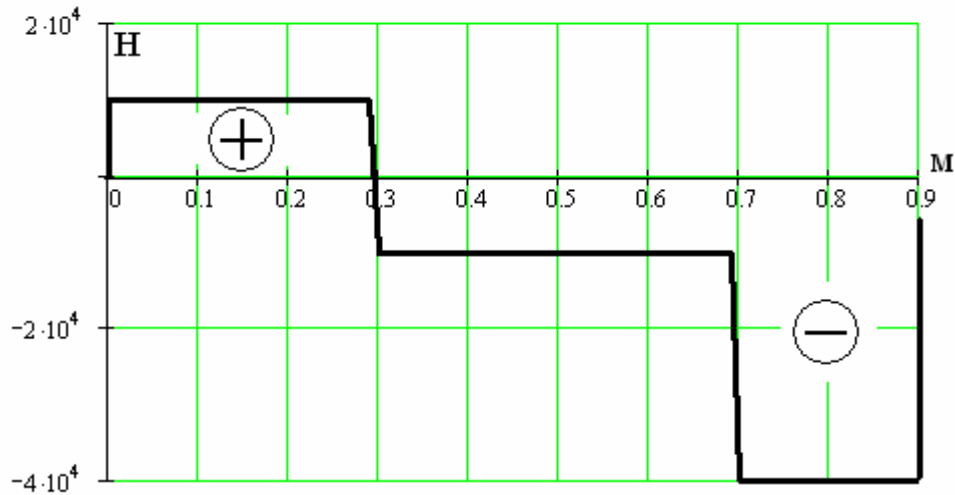


Рис.3. Эпюра продольных сил.

Зная продольные силы $N(z)$ в сечениях стержня нормальные напряжения σ_z можно определить по формуле:

$$\sigma_z = N(z)/A(z), \quad (4)$$

где $A(z)$ – площадь поперечного сечения стержня.

Площади поперечных сечений стержня по участкам можно определить по формулам:

$$\text{участок I: } 0 \leq z < l_1; \quad A_I = \pi(r_k + \text{tg } \alpha \cdot z)^2; \quad (5)$$

$$\text{участок II: } l_1 \leq z < (l_1+l_2); \quad A_{II} = \pi r^2; \quad (6)$$

$$\text{участок III: } (l_1+l_2) \leq z \leq (l_1+l_2+l_3); \quad A_{III} = \pi(R_k + \text{tg } \alpha(L - z))^2, \quad (7)$$

где $L = (l_1+l_2+l_3)$.

На рис.4 представлена эпюра нормальных напряжений σ_z .

3. Определение перемещений сечений.

На участках стержня, где не изменяются продольные силы N и площадь поперечного сечения A , перемещение одного конца участка относительно другого Δw можно определить по закону Гука:

$$\Delta w = \frac{Nl}{EA}, \quad (8)$$

где l = длина участка.

На участках стержня, где изменяется площадь поперечного сечения A , перемещение одного конца участка относительно другого Δw можно определить следующим образом.

По определению относительной продольной деформации на участке стержня длиной dz :

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}, \quad (9)$$

следовательно $\Delta(dz) = \alpha dz$.

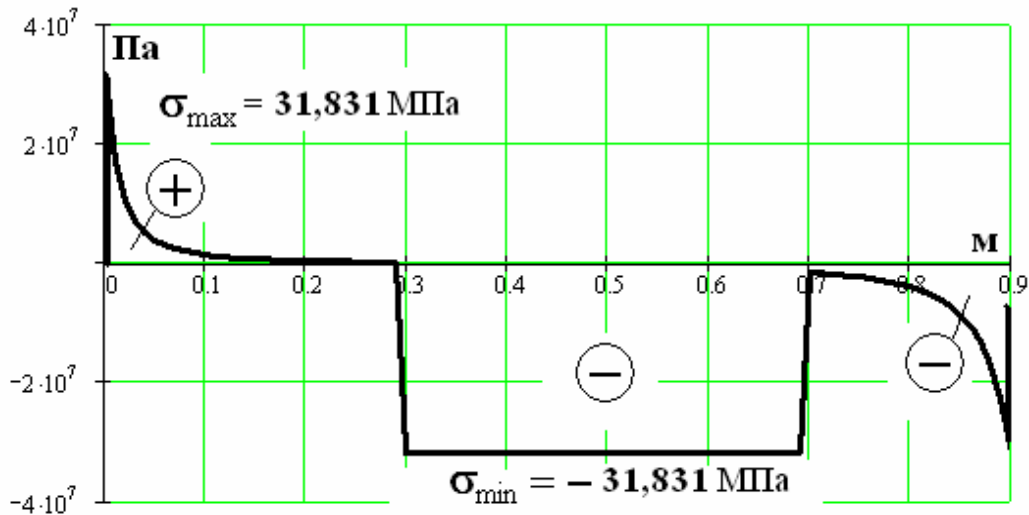


Рис.4. Эпюра нормальных напряжений.

Величина $\Delta(dz)$ – это изменение расстояния между двумя соседними сечениями. Если в сечении при $z = z_b$ перемещения w_b известны, то перемещение сечения с координатой $z = z_e$ относительно сечения с координатой z_b можно найти суммированием $\Delta(dz)$:

$$w_e = w_b + \int_{z_b}^{z_e} \alpha dz. \quad (10)$$

Таким образом, приращение перемещений Δw на участках стержня, где изменяется площадь поперечного сечения A (а также и продольная сила N) можно определить по формуле:

$$\Delta w = \int_{z_b}^{z_e} \alpha dz. \quad (11)$$

В случае конической вставки длиной l и радиусом основания при $z = 0$ равным r_0 , а при $z = l$ равным R_l ($R_l > r_0$), приращение перемещений Δw (11) вычисляется следующим образом.

Радиус поперечного сечения конической вставки с координатой z :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + z \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (12)$$

где α – угол конусности: $\operatorname{tg} \alpha = (\mathbf{R}_l - \mathbf{r}_0)/l$.

Относительная продольная деформация в сечении с координатой z :

$$\varepsilon = \frac{N}{\pi E (r_0 + z \operatorname{tg} \alpha)^2}; \quad (13)$$

приращение перемещений Δw :

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{N}{\pi E} \int_0^l \frac{dz}{(r_0 + z \operatorname{tg} \alpha)^2} = \frac{N}{\pi E} \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha (r_0 + l \operatorname{tg} \alpha)} + \frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \alpha} \right) = \\ &= \frac{N}{\pi E r_0 R_l}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае конической вставки длиной l и радиусом основания при $z = 0$ равным \mathbf{R}_l , а при $z = l$ равным \mathbf{r}_0 ($\mathbf{R}_l > \mathbf{r}_0$), радиус поперечного сечения конической вставки с координатой z определяется как $\mathbf{r} = \mathbf{R}_l - z \operatorname{tg} \alpha$, а приращение перемещений Δw (11) вычисляется по той же формуле (14).

Из формулы (13) вытекает, что на каждом участке, где имеется коническая вставка, перемещение w изменяется по закону кубической кривой, а на границе между участками касательная к эпюре перемещений может иметь излом.

Если на каждом участке стержня продольная сила N_k – постоянная величина, а площадь поперечного сечения A_k изменяется по закону квадратной параболы, то перемещение w_n сечения с координатой z_n относительно сечения с координатой z_0 можно найти суммированием приращений перемещений Δw_k , вычисленных по формуле (11):

$$w_n = \sum_{k=1}^n \Delta w_k. \quad (15)$$

В рассматриваемом примере на первом участке $N_I = 10 \text{ кН}$; $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_k = 10 \text{ мм}$, $\operatorname{tg} \alpha = 0,364$, $l = l_1 = 300 \text{ мм}$, $\mathbf{R}_l = 119,2 \text{ мм}$; по формуле (14) получается $\Delta w_I = 0,004 \text{ мм}$.

На втором участке $N_{II} = -10 \text{ кН}$; $\mathbf{r} = 10 \text{ мм}$, $\mathbf{A} = 314 \text{ мм}^2$; $l = l_2 = 400 \text{ мм}$; по формуле (8) получается $\Delta w_{II} = -0,064 \text{ мм}$.

На третьем участке $N_{III} = -40 \text{ кН}$; $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}_k = 20 \text{ мм}$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,364$, $l = l_3 = 200 \text{ мм}$, $\mathbf{r}_0 = 92,8 \text{ мм}$; по формуле (14) получается $\Delta w_{III} = -0,007 \text{ мм}$.

Сумма приращений $\Sigma \Delta w_k$ дает перемещение правого конца стержня $w(L) = -0,067 \text{ мм}$ и одновременно является приращением длины бруса ΔL .

Эпюра перемещений $w(z)$ сечений стержня, вычисленных по формуле (10), представлена на рис.5.

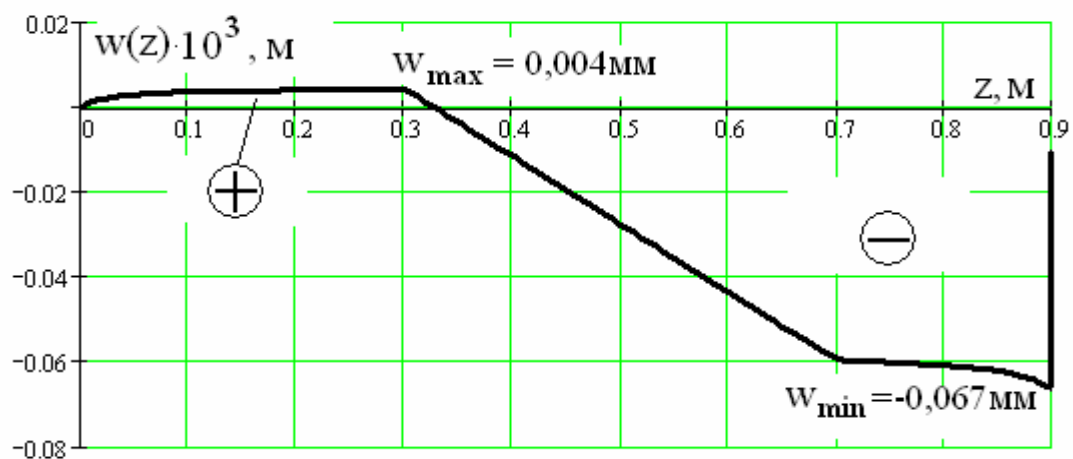
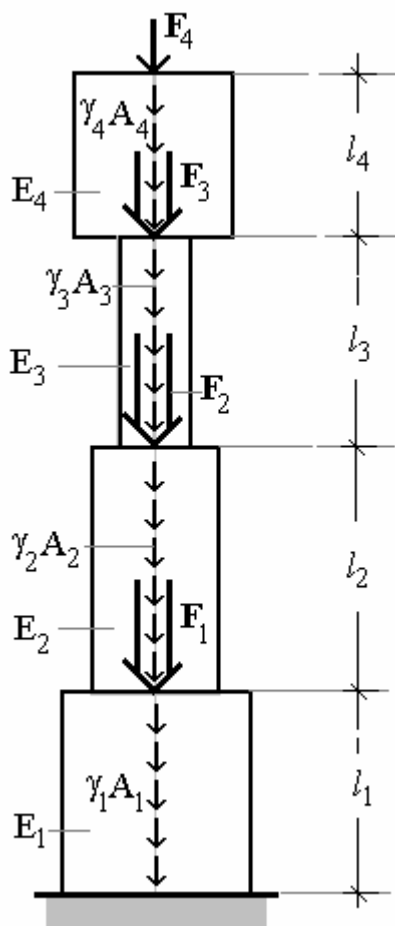


Рис.5. Эпюра осевых перемещений.

Как следует из рассмотрения рис.5, наибольший вклад в перемещения сечений стержня вносит удлинение цилиндрической части стержня.

Расчет закончен.

Задание № 2. Расчет весомого бруса при осевом сжатии



Прямой брус, состоящий из призматических элементов длиной l_k , жестко заделан нижним концом в основание и нагружен вдоль своей оси равномерно распределенными силами $\gamma_k A_k$, равными силам тяжести участков бруса длиной 1м, и сосредоточенными силами F_k (γ_k – удельный вес материала, A_k – площадь поперечного сечения бруса, $k = 1, 2, 3, 4$), как показано на рис.1.

Требуется проверить прочность и жесткость бруса. Числовые значения модулей упругости материалов E_k заданы.

Расчетные схемы брусев приведены на рис.2,а,б; исходные данные – в таблице 1.

Номер расчетной схемы и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $p_2 p_1 p_0$, выданному преподавателем; p_2 , p_1 , p_0 – три цифры кода студента: p_2 – первая слева цифра, p_1 – вторая слева цифра, p_0 – последняя цифра кода.

Рис.1. Схема бруса.

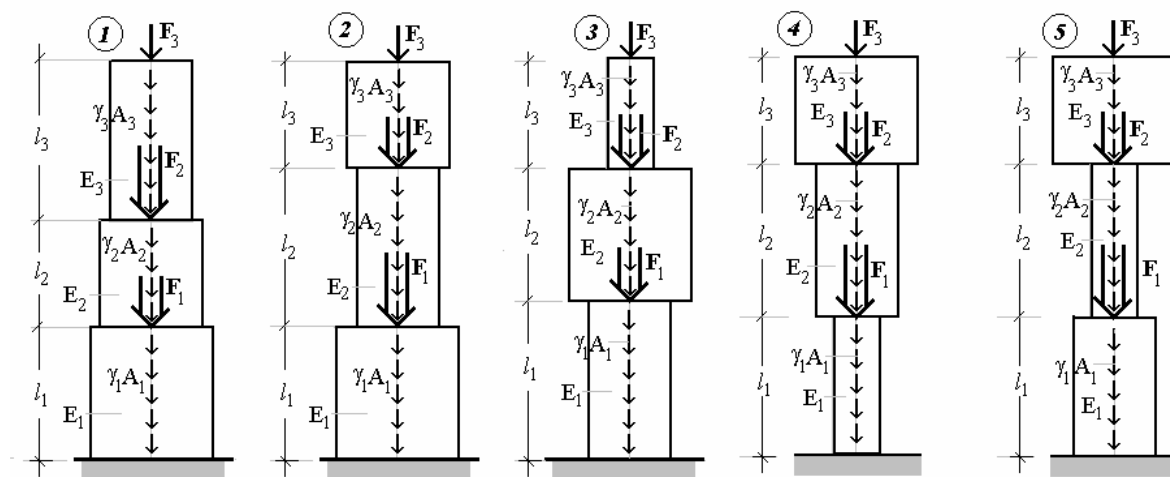


Рис.2,а. Расчетные схемы брусев.

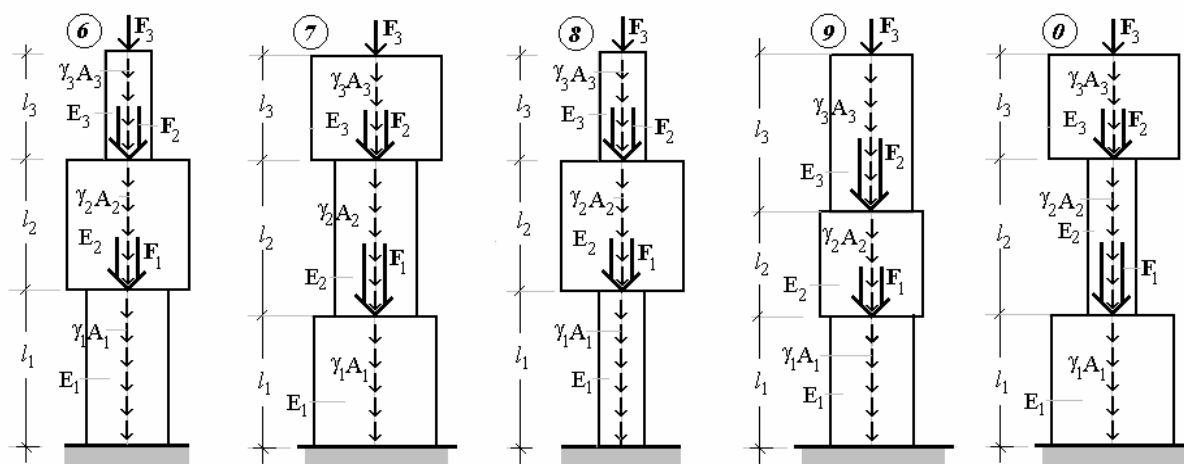


Рис.2,б. Расчетные схемы брусев.

Пример расчета весомого бруса

1. Некоторые теоретические предпосылки расчетов. Весомыми называются брусья, для которых при расчете на прочность или устойчивость необходимо учитывать их собственный вес. Брусья при действии сжимающих осевых сил рассчитывают на устойчивость, прочность и жесткость. В этом задании будем полагать, что условие устойчивости выполнено.

В расчетах на прочность брусев, изготовленных из однородных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, можно использовать условие прочности по допускаемым напряжениям:

$$\sigma_{\max} = N_{\max} / A \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (1)$$

где N_{\max} – максимальное значение продольной силы; A – площадь поперечного сечения; σ_{adm} – допускаемое напряжение.

В расчетах на жесткость при осевом растяжении или сжатии необходимо, чтобы продольное перемещение заданного сечения бруса w не превышало заданной величины w_{adm} :

$$w \leq w_{\text{adm}} \quad (2)$$

Выражение (2) называется условием жесткости.

Условия прочности (1) и жесткости (2) позволяют:

- производить проверочные расчеты;
- подбирать размеры поперечных сечений;
- определять допускаемую нагрузку на брус.

Для решения любой из перечисленных задач необходимо располагать эпюрами продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений w сечений бруса, поэтому эта часть расчета является общей и рассматривается отдельно.

Таблица 1

Исходные данные к расчету весомого бруса

n_0	Но- мер схе- мы	$A_1,$ м^2	γ_1 $\frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$	$l_1,$ м	$\sigma_{\text{adm}}^{(1)}$ МПа	$E,$ ГПа	$F_1,$ кН	n_1	$\frac{A_2}{A_1}$	$\frac{A_3}{A_1}$	$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$	$\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{E_3}{E_1}$	n_2	$\frac{l_2}{l_1}$	$\frac{l_3}{l_1}$	$\frac{F_2}{F_1}$	$\frac{F_3}{F_1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0,25	12	3	15	16	200	1	0,8	0,6	1,2	1,5	1,2	1,5	1	0,8	0,6	1,2	1,5
2	2	0,35	14	2,4	18	20	250	2	0,6	0,8	1,3	1,8	1,1	1,3	2	1,25	1,67	1,4	1,2
3	3	0,4	15	1,8	20	10	300	3	1,6	1,2	1,6	0,8	1,3	1,5	3	1,67	1,33	0,67	0,5
4	4	0,2	18	2,7	25	30	400	4	1,2	1,6	0,75	0,9	0,8	0,6	4	1,11	1,22	0,5	0,3
5	5	0,4	20	2,1	20	40	300	5	0,8	1,25	0,6	0,8	0,5	0,6	5	1,43	1,29	0,5	0,67
6	6	0,35	22	2,7	22	30	250	6	1,25	0,8	0,75	0,9	0,8	0,7	6	1,22	1,11	1,2	1,4
7	7	0,25	15	1,8	12	10	200	7	0,6	1	1,1	1,8	1,2	1,5	7	1,33	1,67	1,5	1,2
8	8	0,2	18	2,4	14	18	150	8	1,6	1	1,2	1,9	0,9	1,6	8	1,67	1,25	1,2	2
9	9	0,4	16	1,5	10	10	100	9	1,25	1	1,5	2	1,5	2	9	2	1,2	1,4	1,8
0	0	0,3	14	1,2	16	15	250	0	0,8	1	2	3	1,5	2	0	2	3	3	2

Примечания.

1. Нумерация участков начинается от опоры.
2. $\sigma_{\text{adm}}^{(1)}$ – допускаемое напряжение на первом участке.
3. Соотношения между допускаемыми напряжениями на участках такие же, как между модулями упругости:

$$\frac{\sigma_{\text{adm}}^{(2)}}{\sigma_{\text{adm}}^{(1)}} = \frac{E_2}{E_1}, \quad \frac{\sigma_{\text{adm}}^{(3)}}{\sigma_{\text{adm}}^{(1)}} = \frac{E_3}{E_1}.$$

4. Допускаемое перемещение верхнего конца бруса $w_{\text{adm}} = 0,001\text{Н}$, где Н – высота бруса:

$$H = l_1 + l_2 + l_3.$$

2. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений. Для бруса, показанного на рис.3,а построим эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и осевых перемещений w . При проведении расчетов, вплоть до оценки прочности бруса, будем использовать символичные обозначения величин. Примем следующие соотношения между входными величинами:

$$\begin{aligned}
 & - l_1 = l, \quad l_2 = 2l, \quad l_3 = 3l, \quad l_4 = l; \\
 & - F_1 = F, \quad F_2 = 3F, \quad F_3 = 2F, \quad F_4 = F; \\
 & - \gamma_1 = \gamma, \quad \gamma_2 = 0,8\gamma, \quad \gamma_3 = 1,2\gamma, \quad \gamma_4 = \gamma; \\
 & - A_1 = A, \quad A_2 = 0,8A, \quad A_3 = 0,5A, \quad A_4 = 0,9A; \\
 & - E_1 = E, \quad E_2 = 0,8E, \quad E_3 = 1,2E, \quad E_4 = E;
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

2.1. Построение аналитических выражений для продольных сил.

Обозначим: a_k – расстояния от начала координат до границы участка ($a_0 = 0, a_1 = l_1, a_2 = a_1 + l_2, a_3 = a_2 + l_3, a_4 = a_3 + l_4$; $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$); z – расстояние от начала координат до рассматриваемого сечения бруса; R_0 – опорная реакция; I, II, III, IV – номера участков.

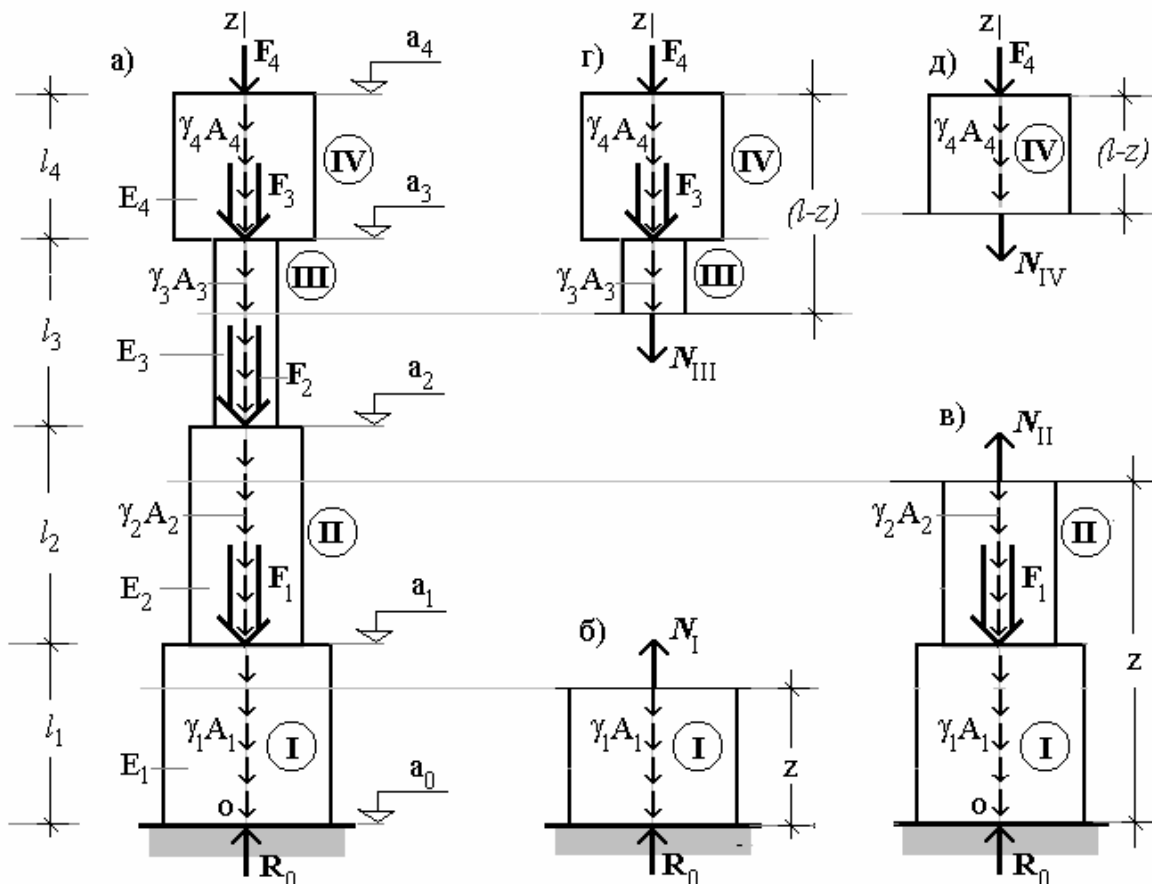


Рис.3. Применение метода сечений.

Полагая, что брус достаточно жесткий и деформации его подчиняются закону Гука, используем принцип независимости действия сил.

Из уравнения равновесия всего бруса найдем опорную реакцию:

$$\sum F_z = 0; \quad R_0 = \sum_k F_k + \sum_k \gamma_k A_k l_k \quad (3)$$

Для определения продольных сил N используем метод сечений, как показано на схемах 3,б; ... 3,д.

Участок I. Рассматриваем нижнюю отсеченную часть: схема 3,б. Координата z изменяется в интервале $0 \leq z < a_1$.

$$\sum F_z = 0: \quad N_I = -R_0 + \gamma_1 A_1 z. \quad (4)$$

Участок II. Рассматриваем нижнюю отсеченную часть: схема 3,в. Координата z изменяется в интервале $a_1 \leq z < a_2$.

$$\sum F_z = 0: \quad N_{II} = -R_0 + F_1 + \gamma_1 A_1 l_1 + \gamma_2 A_2 (z - a_1). \quad (5)$$

Участок III. Рассматриваем верхнюю отсеченную часть: схема 3,г. Координата z изменяется в интервале $a_2 \leq z < a_3$.

$$\sum F_z = 0: \quad N_{III} = -F_3 - F_4 - \gamma_4 A_4 l_4 - \gamma_3 A_3 (a_3 - z). \quad (6)$$

Участок IV. Рассматриваем верхнюю отсеченную часть: схема 3,д. Координата z изменяется в интервале $a_3 \leq z \leq a_4$.

$$\sum F_z = 0: \quad N_{IV} = -F_4 - \gamma_4 A_4 (a_4 - z). \quad (7)$$

2.2. Построение эпюры продольных сил.

Выражения (4)-(7) для продольных сил N_I, \dots, N_{IV} представляют собой линейные функции, поэтому для построения эпюры N достаточно на каждом участке бруса вычислить по два числовых значения N :

при $z = a_{k-1} + 0$ и при $z = a_k - 0$, т.е. справа от левой границы и слева от правой границы участка.

Записи $z = a_{k-1} + 0$ и $z = a_k - 0$ означают, что координаты z должны быть взяты равными a_{k-1} и a_k плюс или минус малая величина, эквивалентная нулю. В рассматриваемом примере получим:

$$\text{— участок I: } N_I \Big|_{z=+0} = -R_0; \quad N_I \Big|_{z=a_1-0} = -R_0 + \gamma_1 A_1 l_1; \quad (8)$$

$$\text{– участок II: } N_{\text{II}} \Big|_{z=a_1+\theta} = -R_0 + F_1 + \gamma_1 A_1 l_1; \quad (9)$$

$$N_{\text{II}} \Big|_{z=a_2-\theta} = -R_0 + F_1 + \gamma_1 A_1 l_1 + \gamma_2 A_2 l_2$$

$$\text{– участок III: } N_{\text{III}} \Big|_{z=a_2+\theta} = -F_3 - F_4 - \gamma_4 A_4 l_4 - \gamma_3 A_3 l_3; \quad (10)$$

$$N_{\text{III}} \Big|_{z=a_3-\theta} = -F_3 - F_4 - \gamma_4 A_4 l_4;$$

$$\text{– участок IV: } N_{\text{IV}} \Big|_{z=a_3+\theta} = -F_4 - \gamma_4 A_4 l_4; \quad (11)$$

$$N_{\text{IV}} \Big|_{z=a_4-\theta} = -F_4.$$

Из выражений (8),..., (11) видно, что продольная сила $N = N(z)$ на границах участка изменяется "скачками", величина которых равна приложенной в сечении сосредоточенной силе (включая и опорную реакцию R_0).

Для выбранных выше соотношений между входными величинами (а) получим:

– опорную реакцию R_0 по (3):

$$R_0 = F + 3F + 2F + F + \gamma A l + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 2\gamma A l + 1,2 \cdot 0,5 \cdot 3\gamma A l + 0,9\gamma A l = \\ = 7F + 4,98\gamma A l; \quad (б)$$

– выражения для продольных сил $N(z)$ по (4), ..., (7):

$$N_{\text{I}} = -7F - 4,98 \gamma A l + \gamma A z;$$

$$N_{\text{II}} = -6F - 3,98 \gamma A l + 0,64\gamma A(z - l); \quad (в)$$

$$N_{\text{III}} = -3F - 0,9 \gamma A l + 0,6\gamma A(z - 6l);$$

$$N_{\text{IV}} = -F + 0,9\gamma A(z - 7l);$$

– значения продольных сил $N(z)$ слева и справа от границ участков по (8), ..., (11):

$$\begin{aligned}
N_{\text{I}}|_{z=+0} &= -7F - 4,98 \gamma A l; & N_{\text{I}}|_{z=1-0} &= -7F - 3,98 \gamma A l; \\
N_{\text{II}}|_{z=1+0} &= -6F - 3,98 \gamma A l; & N_{\text{II}}|_{z=3l-0} &= -6F - 2,7 \gamma A l; \\
N_{\text{III}}|_{z=3l+0} &= -3F - 2,7 \gamma A l; & N_{\text{III}}|_{z=6l-0} &= -3F - 0,9 \gamma A l; \\
N_{\text{IV}}|_{z=6l+0} &= -F - 0,9 \gamma A l; & N_{\text{IV}}|_{z=7l-0} &= -F
\end{aligned}
\tag{Г}$$

Выбрав масштабы сил F и $\gamma A l$, по значениям $N(z)$ слева и справа от границ участков строим эпюру продольных сил $N = N(z)$ по участкам – рис.4,б. Пунктирной линией на рис. 4,б показана эпюра продольных сил, соответствующая действию на брус только сосредоточенных сил.

2.3. Построение эпюры нормальных напряжений.

Общие (номинальные) нормальные напряжения $\sigma = \sigma(z)$ определяются на основе гипотезы плоских сечений

$$\sigma = N / A . \tag{12}$$

В рассматриваемом примере по формуле (12) вычисляем нормальные напряжения по участкам:

$$0 \leq z < a_1: \quad \sigma_{\text{I}} = N_{\text{I}} / A_1 = -R_0 / A_1 + \gamma_1 z \tag{13}$$

$$a_1 \leq z < a_2: \quad \sigma_{\text{II}} = N_{\text{II}} / A_2 = (-R_0 + F_1 + \gamma_1 A_1 l_1) / A_2 + \gamma_2 (z - a_1) \tag{14}$$

$$a_2 \leq z < a_3: \quad \sigma_{\text{III}} = N_{\text{III}} / A_3 = -(F_3 + F_4 + \gamma_4 A_4 l_4) / A_3 + \gamma_3 (z - a_3) \tag{15}$$

$$a_3 \leq z < a_4: \quad \sigma_{\text{IV}} = N_{\text{IV}} / A_4 = -F_4 / A_4 + \gamma_4 (z - a_4) \tag{16}$$

Из выражений (13), ..., (16) видно, что нормальные напряжения $\sigma(z)$ изменяются на каждом участке по линейному закону, а на границах участков изменяются "скачками", величина которых определяется аналогично "скачкам" продольной силы, то есть путем вычисления значений σ слева и справа от границы участка.

Для выбранных выше соотношений между входными величинами, используя выражения (13), ..., (16), вычисляем значения нормальных напряжений $\sigma(z)$ слева и справа от границ участков:

$$\sigma_{\text{I}}|_{z=+0} = -\frac{7F}{A} - 4,98 \gamma; \quad \sigma_{\text{I}}|_{z=1-0} = -\frac{7F}{A} - 3,98 \gamma;$$

$$\sigma_{II}|_{z=1+\emptyset} = -\frac{7,5F}{A} - 4,98 \gamma l; \quad \sigma_{II}|_{z=3l-\emptyset} = -\frac{7,5F}{A} - 3,38 \gamma l; \quad (д)$$

$$\sigma_{III}|_{z=3l+\emptyset} = -\frac{6F}{A} - 5,4 \gamma l; \quad \sigma_{III}|_{z=6l-\emptyset} = -\frac{6F}{A} - 1,8 \gamma l;$$

$$\sigma_{IV}|_{z=6l+\emptyset} = -\frac{1,11F}{A} - \gamma l; \quad \sigma_{IV}|_{z=7l-\emptyset} = -\frac{1,11F}{A}.$$

Выбрав масштабы напряжений F/A и γl , строим эпюру нормальных напряжений $\sigma = \sigma(z)$ по участкам – рис.4,в.

Пунктирной линией на рис. 4,в показана эпюра нормальных напряжений, соответствующая действию на брус только сосредоточенных сил.

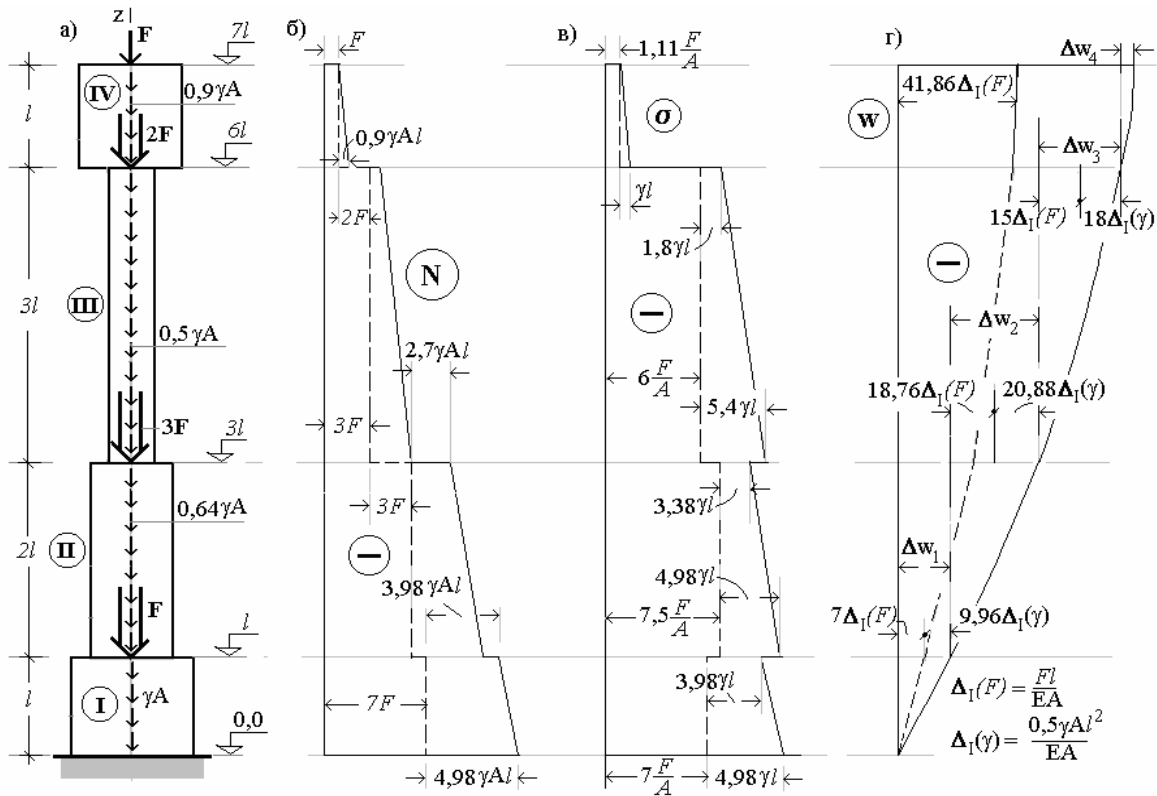


Рис.4. Эпюры продольных сил (б), нормальных напряжений (в) и перемещений сечений бруса (г).

2.4. Построение эпюры перемещений сечений бруса.

В общем случае перемещение одного конца участка бруса Δw относительно другого можно определить следующим образом.

По определению относительной продольной деформации на участке бруса длиной dz :

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}, \quad (е)$$

следовательно $\Delta(dz) = \alpha dz$.

Величина $\Delta(dz)$ – это изменение расстояния между двумя соседними сечениями. Если в сечении при $z = z_b$ перемещения w_b известны, то перемещение сечения с координатой $z = z_e$ относительно сечения с координатой z_b можно найти суммированием $\Delta(dz)$:

$$w_e = w_b + \int_{z_b}^{z_e} \alpha dz. \quad (\text{ж})$$

Таким образом, приращение перемещений Δw на участках бруса, где изменяется площадь поперечного сечения A и продольная сила N можно определить по формуле:

$$\Delta w = \int_{z_b}^{z_e} \alpha dz. \quad (17)$$

Относительные продольные деформации $\varepsilon = \varepsilon(z)$ определяются по закону Гука:

$$\varepsilon = \sigma / E,$$

где E – модуль продольной деформации материала (модуль Юнга).

В рассматриваемом примере:

$$\varepsilon_I = -R_0 / E_1 A_1 + \gamma_1 z / E_1; \quad (18)$$

$$\varepsilon_{II} = (-R_0 + F_1 + \gamma_1 A_1 l_1 - \gamma_2 A_2 a_1) / E_2 A_2 + \gamma_2 z / E_2; \quad (19)$$

$$\varepsilon_{III} = -(F_3 + F_4 + \gamma_4 A_4 l_4 + \gamma_3 A_3 a_3) / E_3 A_3 + \gamma_3 z / E_3; \quad (20)$$

$$\varepsilon_{IV} = -(F_4 + \gamma_4 A_4 a_4) / E_4 A_4 + \gamma_4 z / E_4; \quad (21)$$

Как следует из формул (18), ..., (21), деформации $\varepsilon(z)$ изменяются "скачками" на границах участков, а внутри участков $\varepsilon(z)$ – непрерывные линейные функции вида:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + cz, \quad (22)$$

где ε_0 – деформация на левой границе участка, c – постоянное в пределах участка число.

Внутри участка, на бесконечно малом интервале dz его длины, условные относительные продольные деформации $\varepsilon(z)$ определяются по выражению (е):

$$\varepsilon(z) = \Delta(dz) / dz, \quad (23)$$

где $\Delta(dz)$ – приращение длины участка бруса:

$$\Delta(dz) = \varepsilon dz = (\varepsilon_0 + cz)dz. \quad (24)$$

Если зафиксировать, например, левую границу интервала, то перемещение Δw правой границы будет равно $\Delta(dz)$; при фиксации правой границы перемещение левой будет равно $\Delta(dz)$. Внутри каждого участка относительное перемещение можно вычислить, интегрируя (24) в пределах интервалов $a_{k-1} \leq z < a_k$:

$$w_k = \int_{a_{k-1}}^z \varepsilon_k dz = \int_{a_{k-1}}^z \left(\varepsilon_0^{(k-1)} + c_k \cdot z \right) dz, \quad (25)$$

где a_{k-1} – левая граница участка; $\varepsilon_0^{(k-1)}$ – деформация на левой границе участка; c_k – постоянное в пределах участка число.

С учетом принятых обозначений, после интегрирования (25), выражение для относительного перемещения внутри каждого участка с номером k получает вид:

$$w_k = \varepsilon_0^{(k-1)}(z - a_{k-1}) + \frac{1}{2}c_k(z^2 - a_{k-1}^2). \quad (26)$$

Выражение (26) показывает, что внутри каждого участка относительные перемещения w_k изменяются по закону квадратичной функции, а на границах участков функция перемещений имеет разрывы производных, следовательно, касательная к кривой $w(z)$ на границах имеет изломы.

На левой границе (в заделке) выражение для w_k (26) обращается в ноль:

$$w_k|_{z=a_{k-1}} = 0,$$

поэтому при построении эпюры $w(z)$ необходимо ординаты $w_k(z)$ на k -ом участке суммировать со значением ординаты $w_{k-1}(a_{k-1})$, которое получает функция w_{k-1} на правой границе $(k-1)$ -го участка.

Иными словами, ординаты $w_k(z)$ на k -ом участке необходимо откладывать от уровня, достигнутого эпюрой $w(z)$ на левой границе k -го участка. При этом целесообразно строить эпюру $w(z)$ последовательно продвигаясь от защемленного конца бруса к его свободному концу.

Коэффициенты $\varepsilon_0^{(k-1)}$, c_k в рассматриваемом примере получают из сравнения выражений (18),... , (21) с выражением (22):

$$\text{– участок I: } \varepsilon_0^{(0)} = -R_0/E_1A_1; \quad \tilde{n}_1 = \gamma/E_1, \quad a_0 = 0; \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
& \text{– участок II: } \xi_0^{(1)} = (-R_0 + F_1 + \gamma_1 A_1 l_1 - \gamma_2 A_2 a_1) / E_2 A_2; \\
& \tilde{n}_2 = \gamma_2 / E_2; \quad a_1 = l_1;
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
& \text{– участок III:} \\
& \xi_0^{(2)} = -(F_3 + F_4 + \gamma_4 A_4 l_4 + \gamma_3 A_3 a_3) / E_3 A_3; \quad \tilde{n}_3 = \gamma_3 / E_3; \quad a_2 = l_1 + l_2;
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
& \text{– участок IV:} \\
& \xi_0^{(3)} = -(F_4 + \gamma_4 A_4 a_4) / E_4 A_4; \quad \tilde{n}_4 = \gamma_4 / E_4; \quad a_3 = l_1 + l_2 + l_3, \quad a_4 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4.
\end{aligned} \tag{30}$$

Для вычисления приращения перемещений Δw_k по участкам воспользуемся выражением (26). Вычисляем постоянные $\xi_0^{(k-1)}$ и c_k по выражениям (27), ..., (30) с учетом выбранных выше соотношений (а) между входными величинами:

$$\begin{aligned}
\xi_0^{(0)} &= -7F/EA - 4,98 \gamma/E; & c_1 &= \gamma/E; \\
\xi_0^{(1)} &= -9,38F/EA - 7,22 \gamma/E; & c_2 &= \gamma/E; \\
\xi_0^{(2)} &= -5F/EA - 7,5 \gamma/E; & c_3 &= \gamma/E; \\
\xi_0^{(3)} &= -1,11F/EA - 7 \gamma/E; & c_4 &= \gamma/E.
\end{aligned} \tag{3}$$

Выражение (26) представляет перемещения на правых границах участков относительно их левых границ, т.е. приращения перемещений:

$$\begin{aligned}
\Delta w_1 &= -\left(\frac{7F}{EA} + \frac{4,98 \gamma}{E}\right) \cdot 1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{E} l_1^2 = -\frac{7Fl}{EA} - \frac{4,48 \gamma Al^2}{EA}; \\
\Delta w_2 &= -\left(\frac{9,38F}{EA} + \frac{7,22 \gamma}{E}\right) \cdot 2l + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{E} 8l^2 = -\frac{18,76Fl}{EA} - \frac{10,44 \gamma Al^2}{EA}; \\
\Delta w_3 &= -\left(\frac{5F}{EA} + \frac{7,5 \gamma}{E}\right) \cdot 3l + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{E} 27l^2 = -\frac{15Fl}{EA} - \frac{9 \gamma Al^2}{EA}; \\
\Delta w_4 &= -\left(\frac{1,11F}{EA} + \frac{7 \gamma}{E}\right) \cdot 1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{E} 13l^2 = -\frac{1,11Fl}{EA} - \frac{0,5 \gamma Al^2}{EA}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Первые слагаемые в правых частях (31) пропорциональны уменьшению длины участка бруса под действием силы F : $\Delta(F) = Fl/EA$; вторые – под действием собственного веса $\gamma A l$: $\Delta(\gamma A) = 0,5\gamma A l^2/EA$.

Перемещения сечений бруса по участкам выражаются в виде:

$$w_I = \xi_0^{(0)} \cdot z + 0,5c_1 z^2; \quad (32)$$

$$w_{II} = \Delta w_I + \xi_0^{(1)} (z-1) + 0,5c_2 (z^2 - 1^2); \quad (33)$$

$$w_{III} = \Delta w_I + \Delta w_2 + \xi_0^{(2)} (z-3l) + 0,5c_3 (z^2 - 9l^2); \quad (34)$$

$$w_{IV} = \Delta w_I + \Delta w_2 + \Delta w_3 + \xi_0^{(3)} (z-6l) + 0,5c_4 (z^2 - 36l^2), \quad (35)$$

где Δw_k – приращения перемещений на правых границах участков, определяемые по формулам (31); $\xi_0^{(k-1)}$, c_k – постоянные, определяемые по формулам (3).

Полное укорочение бруса Δw можно определить, суммируя укорочения по участкам: $\Delta w = \sum_k \Delta w_k$.

Эпюра перемещений $w(z)$, построенная по выражениям (32),..., (35), показана на рис. 4,г.

Пунктирной линией на рис.4,г показана эпюра перемещений, соответствующая действию на брус только сосредоточенных сил.

3. Проверочный расчёт бруса на прочность.

Для рассматриваемой расчетной схемы (рис.4,а) примем: $A = 0,4\text{м}^2$; $F = 100\text{кН}$; $\gamma = 18\text{кН/м}^3$. Допускаемое напряжение на первом участке возьмем равным $\sigma_{adm}^{(1)} = 10\text{МПа}$; допускаемые напряжения на остальных участках: $\sigma_{adm}^{(2)} = 1,2\sigma_{adm}^{(1)} = 1,2 \cdot 10 = 12\text{МПа}$; $\sigma_{adm}^{(3)} = 1,5\sigma_{adm}^{(1)} = 1,5 \cdot 10 = 15\text{МПа}$; $\sigma_{adm}^{(4)} = 0,8\sigma_{adm}^{(1)} = 0,8 \cdot 10 = 8\text{МПа}$.

Проверяем выполнение условия прочности (1) по участкам:
– первый участок

$$\max \sigma_I = \frac{7F}{A} + 4,98 \gamma l = \frac{700 \cdot 10^3}{0,4} + 4,98 \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot 3 = 2,015 \cdot 10^6 \text{Па};$$

$$\max \sigma_I < \sigma_{adm}^{(1)} = 10\text{МПа};$$

условие прочности на первом участке выполнено;

– второй участок

$$\max\sigma_{II} = \frac{7,5F}{A} + 4,98\gamma l = \frac{750 \cdot 10^3}{0,4} + 4,98 \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot 3 = 2,144 \cdot 10^6 \text{Па};$$

$$\max\sigma_{II} < \sigma_{adm}^{(2)} = 12 \text{МПа};$$

условие прочности на втором участке выполнено;

– третий участок

$$\max\sigma_{III} = \frac{6F}{A} + 5,4\gamma l = \frac{600 \cdot 10^3}{0,4} + 5,4 \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot 3 = 1,792 \cdot 10^6 \text{Па};$$

$$\max\sigma_{III} < \sigma_{adm}^{(3)} = 15 \text{МПа};$$

условие прочности на третьем участке выполнено;

– четвёртый участок

$$\max\sigma_{IV} = \frac{1,11F}{A} + \gamma l = \frac{111 \cdot 10^3}{0,4} + 18 \cdot 10^3 \cdot 3 = 0,332 \cdot 10^6 \text{Па};$$

$$\max\sigma_{IV} < \sigma_{adm}^{(4)} = 8 \text{МПа};$$

условие прочности на четвёртом участке выполнено.

Как видим, условие прочности (1) выполнено на всех участках.

4. Проверочный расчёт бруса на жёсткость

В проверочном расчёте бруса на жёсткость необходимо убедиться в том, что выполнено условие жёсткости (2), а именно, что перемещение верхнего конца бруса Δw не превосходит допускаемого значения w_{adm} .

В дополнение к уже принятым исходным данным принимаем: $l=3\text{м}$; $E = 10 \cdot 10^9 \text{Па}$.

Высота бруса $H=l_1+l_2+l_3+l_4=l+2l+3l+l=7l=7 \cdot 3=21\text{м}$. Допускаемое перемещение верхнего конца бруса $w_{adm}=0,001 \cdot H=0,001 \cdot 21=0,021\text{м}=21\text{мм}$.

Перемещение верхнего конца бруса Δw включает в себя два слагаемых: перемещение $\Delta w(F)$, зависящее только от сосредоточенных сил, и перемещение $\Delta w(\gamma)$, зависящее только от собственного веса.

Используя выражения (31), находим абсолютные значения $\Delta w(F)$, $\Delta w(\gamma)$:

$$\Delta w(F) = \frac{7Fl}{EA} + \frac{18,76Fl}{EA} + \frac{15Fl}{EA} + \frac{1,11Fl}{EA} = 41,86 \frac{Fl}{EA}; \quad (36)$$

$$\Delta w(\gamma) = \frac{4,48 \gamma Al^2}{EA} + \frac{10,44 \gamma Al^2}{EA} + \frac{9 \gamma Al^2}{EA} + \frac{0,5 \gamma Al^2}{EA} = 48,84 \frac{0,5 \gamma Al^2}{EA}. \quad (37)$$

Перемещение верхнего конца бруса

$$\begin{aligned} \Delta w &= 41,86 \frac{Fl}{EA} + 48,84 \frac{0,5 \gamma Al^2}{EA} = 41,86 \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 3}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,4} + 48,84 \frac{0,5 \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 3^2}{10 \cdot 10^9 \cdot 0,4} = \\ &= 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,27 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Так как $\Delta w < w_{\text{adm}} = 21 \text{ мм}$, то условие жёсткости выполнено.

Расчеты закончены.

Задание № 3. Проектировочный расчет балки по допускаемым напряжениям

1. **Постановка задачи.** В качестве расчетной схемы подкрановых балок, плит перекрытий и покрытий зданий и сооружений, а также несущих конструкций мостов может служить двухконсольная балка переменного сечения, показанная на рис.1, где использованы следующие обозначения: F , q , M – сосредоточенная сила, распределенная нагрузка, сосредоточенный момент (момент пары сил); EJ – изгибная жесткость поперечного сечения (E – модуль упругости, J – осевой момент инерции).

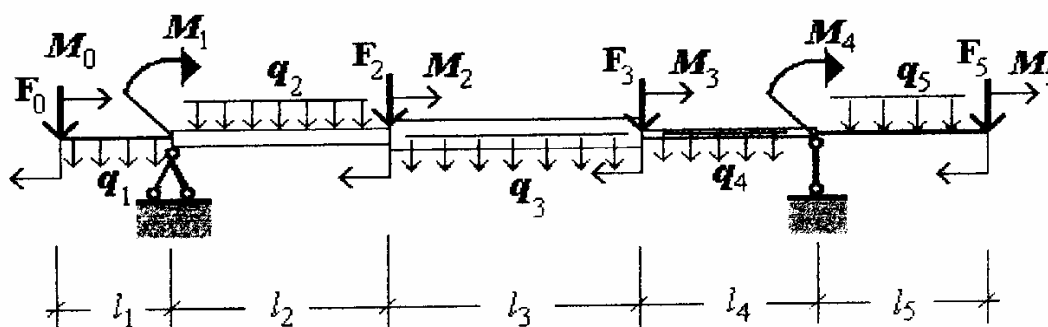


Рис. 1. Расчетная схема балочной конструкции.

В проектировочном расчете требуется подобрать размеры поперечного сечения балки при известных нагрузках, длине балки и заданной форме поперечного сечения. Зададим, например, форму поперечного сечения балки в виде двутавра с неравными полками, как показано на рис.2.

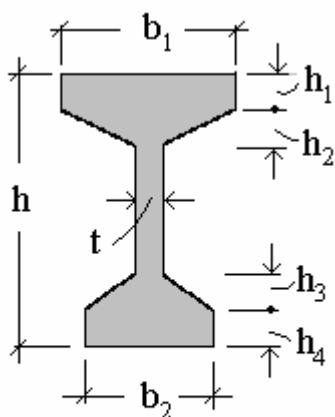


Рис.2. Поперечное сечение балки

Примем следующие соотношения между размерами двутавра:

$$h_1 = h_4 = t; \quad h_2 = 0,5t; \quad h_3 = 0,3t; \quad b_1 = 5t; \quad b_2 = 3t; \\ t = 0,1h, \quad \text{где } t \text{ – толщина стенки.} \quad (1)$$

Геометрические характеристики поперечного сечения (площадь поперечного сечения балки A , статические моменты S , моменты инерции J) можно выразить через параметр t , который определяется после вычислений необходимых геометрических характеристик поперечного сечения балки из условий прочности. Затем по заданным соотношениям между размерами поперечного сечения (1) можно вычислить эти

размеры.

В задании № 3 требуется построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов в статически определимых балках и подобрать размеры поперечных сечений по участкам балки.

Расчетные схемы балок приведены на рис.3,а,б; типы поперечных сечений – на рис.4,а,б; исходные данные – в таблице 1.

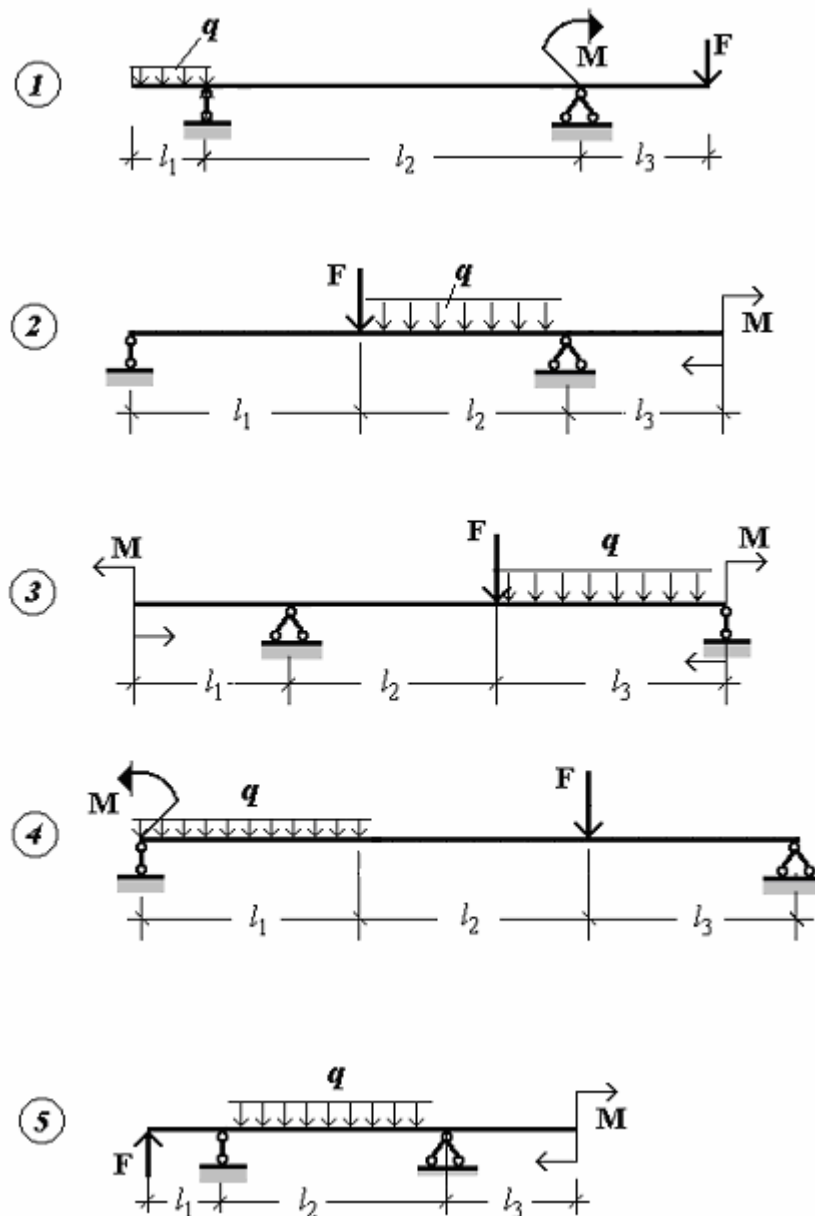


Рис.3,а. Расчетные схемы балок 1÷5.

На схемах балок обозначено: q – равномерно распределенная нагрузка; F – сосредоточенная сила; M – момент пары сил.

Номер расчетной схемы, тип поперечного сечения и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $n_2n_1n_0$, выданному преподавателем; n_2 , n_1 , n_0 – три последние цифры кода студента; n_2 – третья справа цифра, n_1 – вторая справа цифра, n_0 – последняя цифра кода.

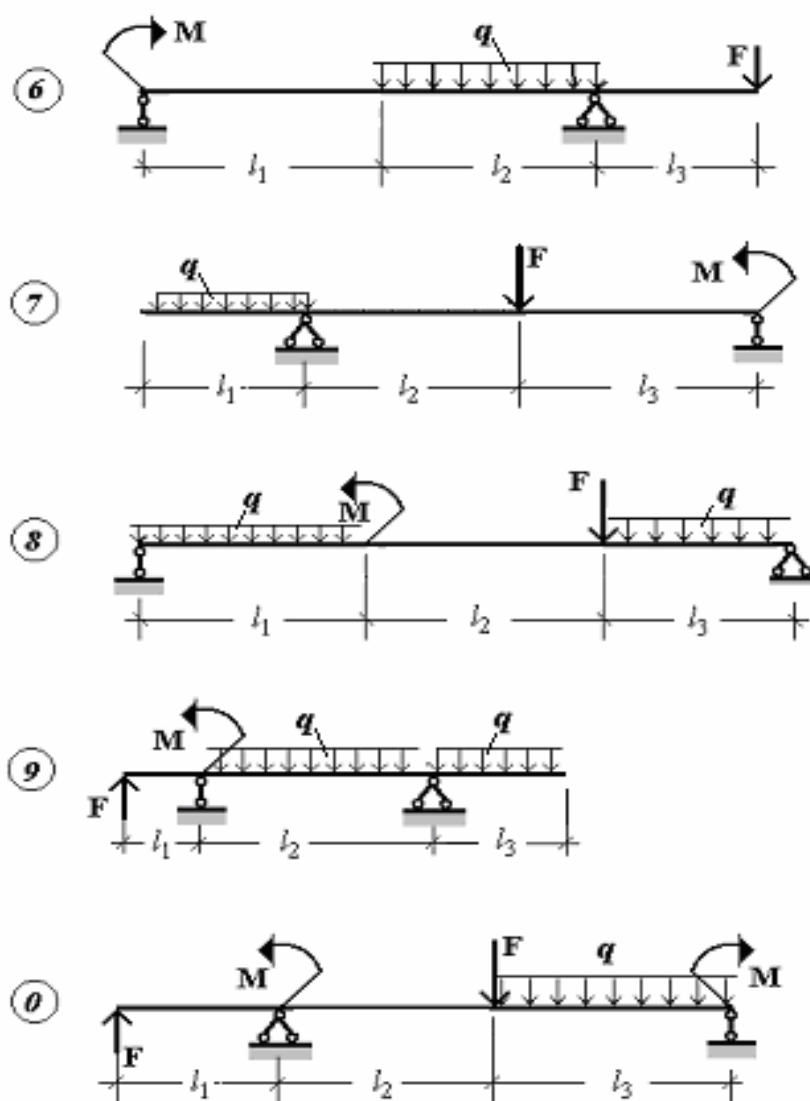


Рис.3,б. Расчетные схемы балок 6÷0.

Типы поперечных сечений на рис.4,а,б выбираются из табл. 1 по последней цифре кода (n_0).

2. Условия прочности по допускаемым напряжениям. Условие прочности по нормальным напряжениям изгибаемых в одной плоскости прямых брусьев из однородных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max|M|}{J} \cdot y_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (2)$$

где σ_{\max} , σ_{adm} – максимальное и допускаемое нормальные напряжения;
 $\max |M|$ – максимальный по абсолютному значению изгибающий момент;

J – осевой момент инерции сечения балки; y_{\max} – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленного волокна в сечении.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{\max|Q|}{J} \cdot \frac{S_{\max}^{(\text{отс})}}{b} \leq \tau_{\text{adm}}, \quad (3)$$

где τ_{\max} , τ_{adm} – максимальное и допускаемое касательные напряжения;
 $\max|Q|$ – максимальная по абсолютному значению поперечная сила;
 $S_{\max}^{(\text{отс})}$ – максимальный статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной линии; b – ширина сечения на уровне нейтральной линии.

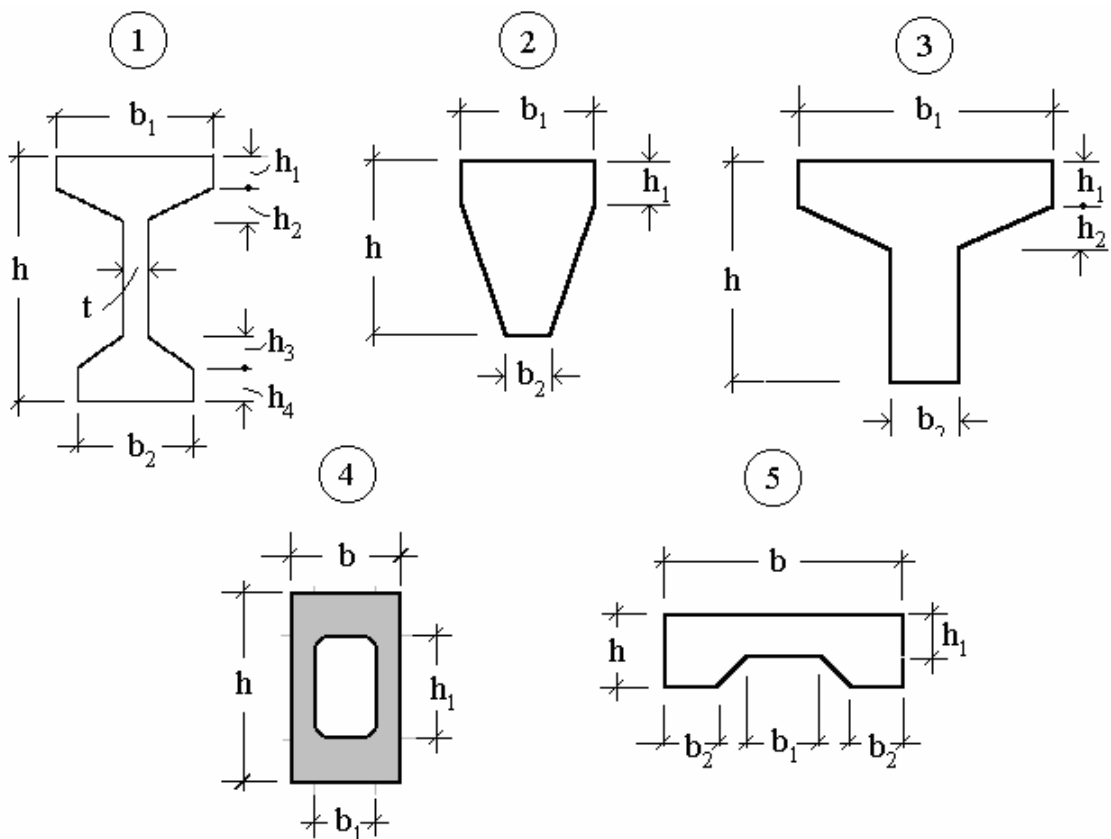


Рис.4,а. Типы поперечных сечений балок.

Условия (2), (3) позволяют решать следующие задачи сопротивления материалов:

- при известных внешних силах, действующих на балку, и заданных размерах поперечного сечения производить проверку прочности балки (поверочный расчет);

- при известных внешних силах и заданной форме поперечного сечения балки с помощью условия (2) определить размеры поперечного сечения с последующей проверкой выполнения условия (3) (проектировочный расчет);

- при заданных размерах поперечного сечения балки и известном характере распределения внешних сил с помощью условия (2) определить

допускаемое значение внешних сил с последующей проверкой выполнения условия (3) (определение несущей способности).

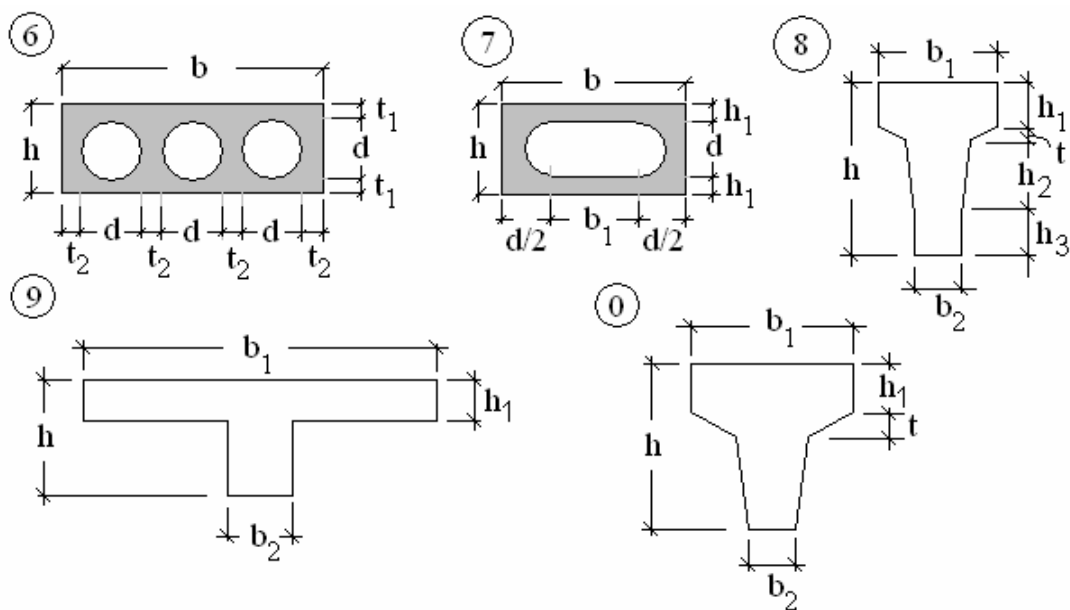


Рис.4.б. Типы поперечных сечений балок.

Таблица 1

Исходные данные к расчету балки

n ₀	№ схе- мы	Тип сече- ния	n ₁	q, кН м	F, кН	M, кНм	n ₂	длина, м		
								l ₁	l ₂	l ₃
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	3	1	10	20	12	1	4	3	2
2	2	1	2	12	25	10	2	2	1	3
3	3	2	3	15	30	16	3	3	2	1
4	4	5	4	12	40	8	4	2	3	1
5	5	7	5	15	20	16	5	4	2	3
6	6	8	6	12	25	10	6	2	2	2
7	7	6	7	10	30	12	7	3	1	2
8	8	9	8	12	20	15	8	2	4	3
9	9	0	9	15	25	12	9	1	3	4
0	0	4	0	8	40	10	0	2	3	4

Из табл.1 выбираются: номер расчетной схемы, тип поперечного сечения балки и значения величин, указанных на схемах балок.

Допускаемые напряжения принимаются равными $\sigma_{adm} = 30$ МПа, $\tau_{adm} = 10$ МПа.

Для решения перечисленных задач необходимо определить максимальные значения изгибающих моментов $\max |M|$ и перерезывающих (поперечных) сил $\max |Q|$, а также их местоположение по длине балки. С этой целью выполняют анализ распределения внутренних усилий по длине балки и строят соответствующие графики – эпюры M и Q .

3. **Определение поперечных сил и изгибающих моментов в балке.** Методику определения поперечных сил Q и изгибающих моментов M изложим на примере расчетной схемы, представленной на рис. 5,а, где использованы те же обозначения, что и на рис.1.

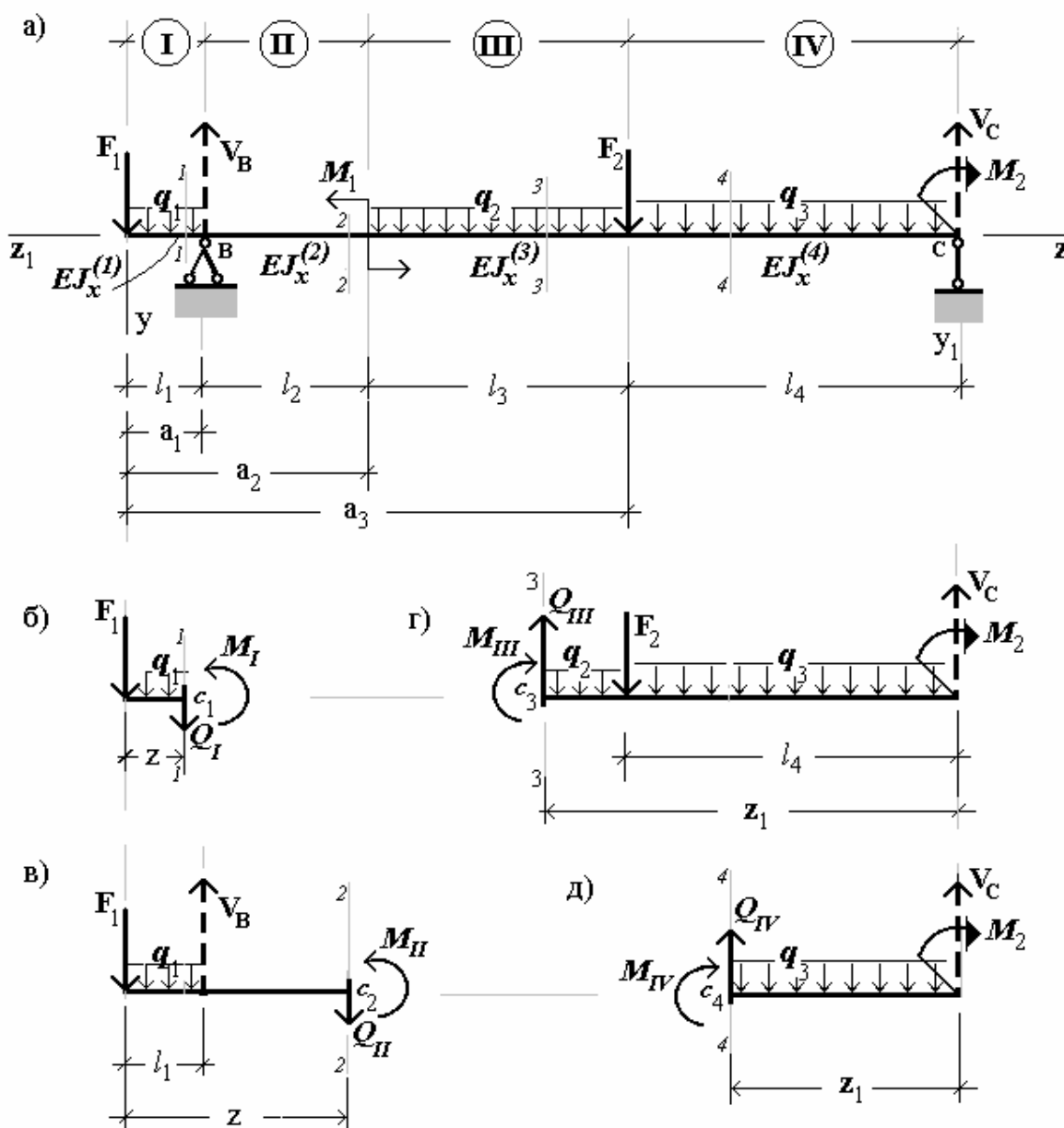


Рис.5. Усилия в поперечных сечениях балки.

3.1. Определение опорных реакций.

Обозначим пролет балки (расстояние между опорами) $L = l_2 + l_3 + l_4$.

При определении опорных реакций балок используется принцип отвердевания, поэтому изгибная жесткость сечений и ее изменение по длине балки не влияют на опорные реакции. Используем уравнения равновесия плоской системы сил. Учитываем, что внешние силы F , q перпендикулярны оси балки и одна из опор – шарнирно-подвижная.

Примем следующие исходные данные:

$$l_1 = a, l_2 = 2a, l_3 = 3a, l_4 = 4a; a_1 = a, a_2 = 3a, a_3 = 6a, a_4 = 10a; a = 1 \text{ м};$$

$$q_1 = q, q_2 = 2q, q_3 = 3q; q = 2 \text{ кН/м};$$

$$F_1 = qa, F_2 = 2qa; M_1 = 10qa^2, M_2 = 20qa^2;$$

$$F_1 = 2, F_2 = 4 \text{ кН}; M_1 = 20, M_2 = 40 \text{ кН/м}.$$

$$\Sigma M_{(C)} = 0;$$

$$V_B \cdot L - F_1(L + l_1) - q_1 l_1(L + 0,5l_1) - M_1 - q_2 l_3(l_4 + 0,5l_3) - \\ - F_2 l_4 - 0,5q_3 l_4^2 + M_2 = 0;$$

$$V_B = [qa(9a + a) + qa(9a + 0,5a) + 10qa^2 + 2q \cdot 3a(4a + 0,5 \cdot 3a) + \\ + 2qa \cdot 4a + 0,5 \cdot 3q(4a)^2 - 20qa^2] / 9a = 8,278qa.$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0;$$

$$V_C \cdot L - M_2 - q_3 l_4(L - 0,5l_4) - F_2(l_2 + l_3) - q_2 l_3(l_2 + 0,5l_3) + \\ + M_1 + 0,5q_1 l_1^2 + F_1 l_1 = 0;$$

$$V_C = [20qa^2 + 3q \cdot 4a(9a - 0,5 \cdot 4a) + 2qa(2a + 3a) + \\ + 2q \cdot 3a(2a + 0,5 \cdot 3a) - 10qa^2 - 0,5 \cdot qa^2 - qa \cdot a] / 9a = 13,722qa.$$

Проверка правильности определения опорных реакций V_B , V_C :

$$\Sigma F_y = ?; \quad qa + qa - 8,278qa + 2q \cdot 3a + 2qa + 3q \cdot 4a - 13,722qa = 0.$$

Опорные реакции V_B , V_C в дальнейшем считаем внешними силами.

3.2. Построение аналитических выражений для Q и M по участкам балки. Участком балки называется ее часть по длине, в пределах которой не изменяются внешние силы (включая опорные реакции) и изгибная жесткость EJ сечений. Далее используем метод сечений. Принимаем следующие правила знаков для Q и M :

- поперечную силу Q считаем положительной, если она стремится повернуть отсеченную часть балки по часовой стрелке;
- изгибающий момент M считаем положительным, если он вызывает удлинение нижних волокон в отсеченной части балки.

Используя уравнения равновесия, строим аналитические выражения для поперечных сил и изгибающих моментов по участкам.

Первый участок: $0 \leq z < a_1$.

В произвольном месте на первом участке мысленно рассекаем балку на две части и отбрасываем правую часть. Изображаем оставленную левую часть балки с действующими на нее внешними силами и прикладываем реакцию отброшенной правой части – Q_I, M_I (рис.5,б).

Выбираем положительные направления Q_I, M_I согласно приведенным выше правилам. Составляем уравнения равновесия и выражаем Q_I, M_I через внешние силы.

$$\sum F_y = 0: Q_I + F_1 + q_1 z = 0; \quad Q_I = - (q a + q z) = - q (a + z); \quad (4)$$

$$\sum M_{(c_1)} = 0: M_I + F_1 z + 0,5 q z^2 = 0;$$

$$M_I = - (q a z + 0,5 q z^2) = - q (a + 0,5 z) z. \quad (5)$$

Второй участок: $a_1 \leq z < a_2$.

Рассекаем балку по второму участку, отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой части под действием внешних сил, а также поперечной силы Q_{II} и изгибающего момента M_{II} (рис.5,в).

$$\sum F_y = 0: Q_{II} - V_B + q_1 l_1 + F_1 = 0; \quad Q_{II} = 8,278 q a - q a - q a = 6,278 q a; \quad (6)$$

$$\sum M_{(c_2)} = 0: M_{II} - V_B (z - l_1) + q_1 l_1 (z - 0,5 l_1) + F_1 z = 0;$$

$$M_{II} = 8,278 q a (z - a) - q a (z - 0,5 a) - q a z = 6,278 q a z - 7,778 q a^2. \quad (7)$$

Далее будем рассматривать правую часть балки, поэтому поменяем систему координат. Начало возьмем в точке C , ось z_1 направим влево.

Третий участок: $l_4 \leq z_1 < (l_3 + l_4)$.

Рассекаем балку по третьему участку, отбрасываем левую часть и рассматриваем равновесие оставшейся правой части под действием внешних сил и реакции левой части – поперечной силы Q_{III} и изгибающего момента M_{III} (рис.5,г).

$$\sum F_{y_1} = 0: Q_{III} - q_2(z_1 - l_4) - F_2 - q_3 l_4 + V_c = 0;$$

$$Q_{III} = 2q(z_1 - 4a) + 2qa + 3q_4a - 13,722qa = 2qz_1 - 7,722qa; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{(c_3)} = 0: M_{III} + q_2(z_1 - l_4) \cdot 0,5(z_1 - l_4) + F_2(z_1 - l_4) + \\ + q_3 l_4(z_1 - 0,5l_4) + M_2 - V_c z_1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{III} = -2q(z_1 - 4a) \cdot 0,5(z_1 - 4a) - 2qa(z_1 - 4a) - 3q \cdot 4a(z_1 - 0,5 \cdot 4a) - 20qa^2 + \\ + 13,722qa z_1 = -q(z_1 - 4a)^2 - 0,278qaz_1 + 12qa^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Четвёртый участок: $0 \leq z_1 < l_4$.

Рассматриваем равновесие правой части балки (рис.5,д).

$$\sum F_{y_1} = 0: Q_{IV} - q_3 z_1 + V_c = 0; \quad Q_{IV} = 3qz_1 - 13,722qa. \quad (10)$$

$$\sum M_{(c_4)} = 0: M_{IV} + q_3 z_1 \cdot 0,5z_1 + M_2 - V_c \cdot z_1 = 0;$$

$$M_{IV} = -1,5qz_1^2 + 13,722qaz_1 - 20qa^2. \quad (11)$$

3.3. Построение эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

При построении эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M следует учитывать, что они могут быть разрывными функциями.

По выражениям (4), (6), (8), (10) слева и справа от границ участков вычисляем значения Q , результаты сводим в табл.2.

$$Q|_{z=0} = Q_I|_{z=0} = -qa; \quad Q|_{z=a_1-0} = Q_I|_{z=a} = -2qa;$$

$$Q|_{z=a_1+0} = Q_{II}|_{z=a} = 6,278qa; \quad Q|_{z=a_2-0} = Q_{II}|_{z=3a} = 6,278qa;$$

$$Q|_{z=a_2+\emptyset} = Q_{III}|_{z_1=a_4-a_2} = Q_{III}|_{z_1=7a} = 6,278qa; \quad (12)$$

$$Q|_{z=a_3-\emptyset} = Q_{III}|_{z_1=l_4} = Q_{III}|_{z_1=4a} = 0,278qa;$$

$$Q|_{z=a_3+\emptyset} = Q_{IV}|_{z_1=l_4} = Q_{IV}|_{z_1=4a} = -1,722qa;$$

$$Q|_{z_1=0} = Q_{IV}|_{z_1=0} = -13,772qa.$$

Таблица 2

Ординаты эпюры поперечных сил Q

z	0	$a_1 - \emptyset$	$a_1 + \emptyset$	$a_2 - \emptyset$	$a_2 + \emptyset$	$a_3 - \emptyset$	$a_3 + \emptyset$	a_4
Q	-qa	-2qa	6,278qa	6,278qa	6,278qa	0,278qa	-1,722qa	-13,722qa

Выбираем масштаб сил: в 1 см – 10 кН и строим график (эпюру Q) по точкам, используя данные табл.2, – рис.6,а.

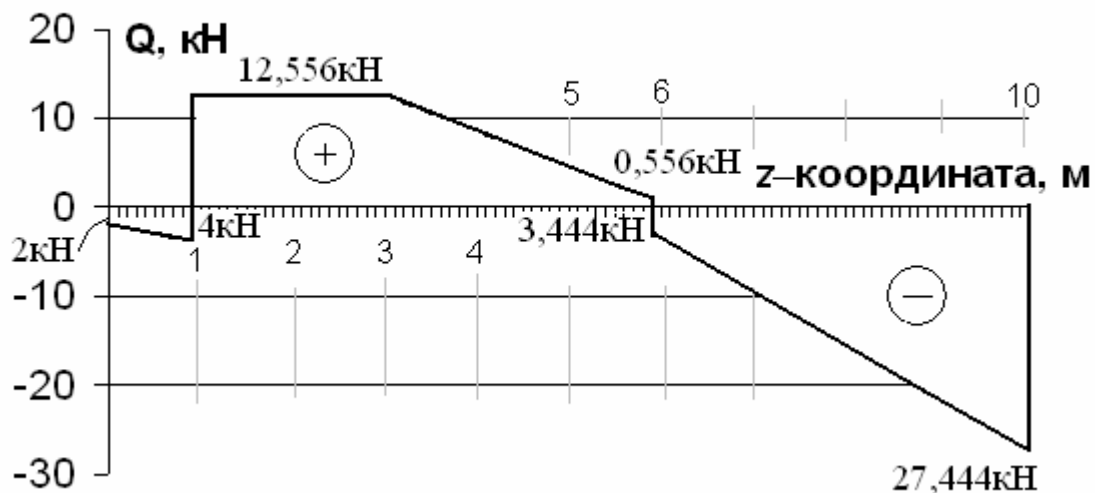


Рис.6,а. Перерезывающие силы в сечениях балки.

В сечениях балки с координатами $z = 0, a_1, a_3, a_4$ в исходной расчетной схеме приложены внешние сосредоточенные силы F_1, V_B, F_2, V_c . На эпюре Q в указанных сечениях имеются «скачки» поперечной силы

$\Delta Q = Q|_{z+\emptyset} - Q|_{z-\emptyset}$, равные сосредоточенным силам $F_1 = qa, V_B = 8,278qa, F_2 = 2qa, V_c = 13,722qa$, взятым с соответствующими знаками.

По выражениям (5), (7), (9), (11) слева и справа от границ участков, а также посередине участков, на которых функция изгибающих моментов $M(z)$ является нелинейной, вычисляем значения изгибающего момента $M(z)$, результаты сводим в табл. 3.

$$\begin{aligned}
 M|_{z=0} = M_I|_{z=0} &= 0 ; & M|_{z=0,5} = M_I|_{z=0,5a} &= -0,625qa^2 ; \\
 M|_{z=a_1-\emptyset} = M_I|_{z=a} &= -1,5qa^2 ; & M|_{z=a_1+\emptyset} = M_{II}|_{z=a} &= -1,5qa^2 ; \\
 M|_{z=a_2-\emptyset} = M_{II}|_{z=a_2} &= M_{II}|_{z=3a} = 11,056qa^2 ; \\
 M|_{z=a_2+\emptyset} = M_{III}|_{z_1=a_4-a_2} &= M_{III}|_{z_1=7a} = 1,056qa^2 ; \\
 M|_{z=a_3-\emptyset} = M_{III}|_{z_1=l_4} &= 10,888qa^2 ; \\
 M|_{z=a_3+\emptyset} = M_{IV}|_{z_1=l_4} &= M_{IV}|_{z_1=4a} = 10,888qa^2 ; \\
 M|_{z=a_4} = M_{IV}|_{z_1=0} &= -20qa^2 .
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Таблица 3

Ординаты эпюры изгибающих моментов M

z	0	0,5a	$a_1 - \emptyset$	$a_1 + \emptyset$	$a_2 - \emptyset$	$a_2 + \emptyset$	$a_3 - \emptyset$	$a_3 + \emptyset$	a_4
M	0	$-0,625qa^2$	$-1,5qa^2$	$-1,5qa^2$	$11,056qa^2$	$1,056 qa^2$	$10,888qa^2$	$10,888qa^2$	$-20qa^2$

Выбираем масштаб моментов: в 1 см – 10 кН·м и строим график (эпюру M), используя данные табл. 3, – рис.6,б.

В сечениях балки с координатами $z = a_2, a_4$ приложены пары сил с моментами M_1, M_2 . На эпюре M в этих сечениях имеются «скачки» изгибающего момента $\Delta M = M|_{z+\emptyset} - M|_{z-\emptyset}$, равные сосредоточенным моментам $M_1 = -10qa^2, M_2 = 20qa^2$ с учетом их знаков.

На участках балки, где распределенная нагрузка q равна 0, на эпюре Q функция $Q(z)$ – постоянная величина, а на эпюре M функция $M(z)$ –

линейная функция; на участках балки, где распределенная нагрузка q – постоянная величина, на эпюре Q функция $Q(z)$ – линейная функция, а на эпюре M функция $M(z)$ – квадратная парабола.

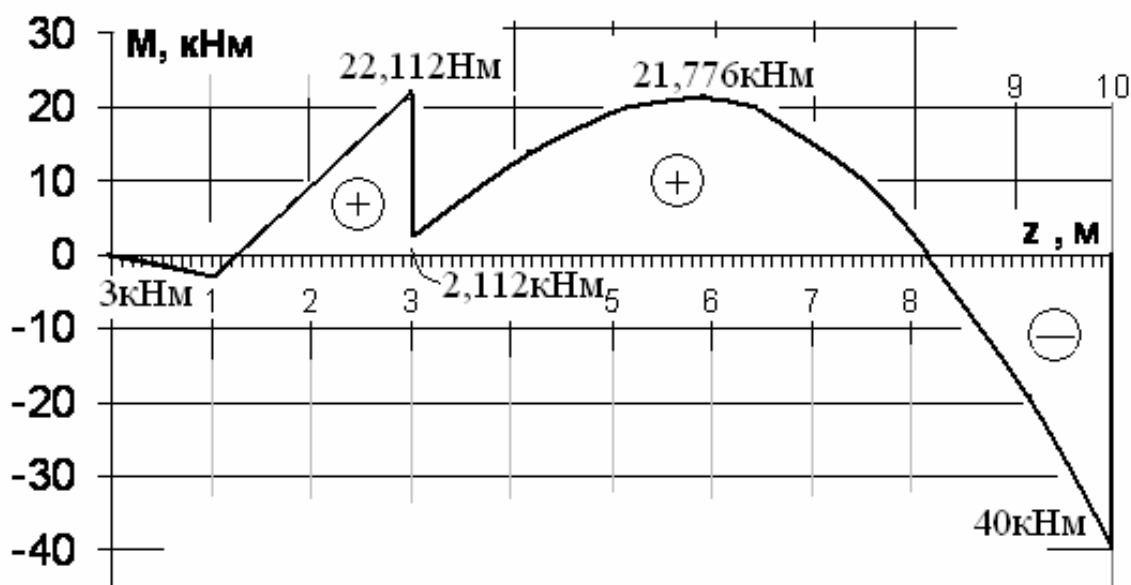


Рис.6,б. Изгибающие моменты в сечениях балки.

Выпуклость нелинейной функции $M(z)$ определяется знаком ее кривизны, то есть знаком второй производной d^2M/dz^2 . На тех участках балки, на которых d^2M/dz^2 имеет знак « \leftarrow », в системе координат uz выпуклость направлена к оси z .

3.4. Проверка соответствия эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M . Проверяем соответствие эпюр Q и M друг другу, а также исходной расчетной схеме.

Используем дифференциальные зависимости между M , Q , q :

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{dQ}{dz} = -q, \quad \frac{d^2M}{dz^2} = -q. \quad (14)$$

На первом участке по формулам (14) получаем:

$$\frac{dM_I}{dz} = -q(a + z) = Q_I, \quad \frac{dQ_I}{dz} = -q, \quad \frac{d^2M_I}{dz^2} = -q.$$

На втором участке по формулам (14) получаем:

$$\frac{dM_{II}}{dz} = 6,278qa = Q_{II}, \quad \frac{dQ_{II}}{dz} = 0, \quad \frac{d^2M_{II}}{dz^2} = 0.$$

На третьем и четвертом участках надо учесть изменение знака z_1 на противоположный:

$$\frac{dM}{dz_1} = -Q, \quad \frac{dQ}{dz_1} = q, \quad \frac{d^2M}{dz_1^2} = -q. \quad (15)$$

Дифференцируем выражения (9), (8), (11), (10):

$$\frac{dM_{III}}{dz_1} = -2q(z_1 - 4a) - 0,278qa = -2qz_1 + 7,722qa = -Q_{III};$$

$$\frac{dQ_{III}}{dz_1} = 2q = q_2; \quad \frac{d^2M_{III}}{dz_1^2} = -2q = -q_2;$$

$$\frac{dM_{IV}}{dz_1} = -3qz_1 + 13,722qa = -Q_{IV};$$

$$\frac{dQ_{IV}}{dz_1} = 3q = q_3; \quad \frac{d^2M_{IV}}{dz_1^2} = -3q = -q_3.$$

Как видим, дифференциальные зависимости между M , Q , q выполняются.

4. *Проектировочный расчет балки.*

4.1. *Методика расчета.* В проектировочном расчете требуется подобрать размеры поперечного сечения балки при известных нагрузках и заданной форме поперечного сечения.

Форму поперечного сечения вычерчивают на диаграммной (например, миллиметровой) бумаге с соблюдением соотношений между размерами элементов сечения (визуально) и определяют размеры элементов сечения в выбранных единицах длины, например, в миллиметрах. Затем выбирают какой-нибудь характерный линейный размер сечения в качестве параметра t , и разделив все другие линейные размеры сечения на длину параметра t , выражают размеры элементов сечения через параметр t .

Пусть, например, заданная форма поперечного сечения – двутавр с неравными полками, как показано на рис.2.

Нарисовав с помощью линейки на миллиметровой бумаге этот двутавр с соблюдением соотношений между размерами его элементов, измеряем длину каждого элемента. Допустим, что получились такие результаты: $h = 100\text{мм}$; $b_1 = 50\text{мм}$; $b_2 = 30\text{мм}$; $h_1 = h_4 = 10\text{мм}$; $h_2 = 5\text{мм}$; $h_3 = 3\text{мм}$; $t = 10\text{мм}$.

Выбрав в качестве характерного линейного размера сечения параметр t , разделим длины h , b_1 , b_2 , h_1 , h_4 , h_2 , h_3 на длину параметра t ; тогда получим следующие соотношения между размерами двутавра:

$$h_1 = h_4 = t; \quad h_2 = 0,5t; \quad h_3 = 0,3t; \quad b_1 = 5t; \quad b_2 = 3t; \quad t = 0,1h, \quad (1)$$

приведенными при постановке задачи.

Используя условие прочности по нормальным напряжениям (2) находят необходимый осевой момент инерции сечения балки на каждом участке:

$$J \geq \frac{\max|M|}{\sigma_{adm}} \cdot y_{\max}, \quad (16)$$

где y_{\max} – расстояние от нейтральной линии сечения до наиболее удаленного волокна.

Момент сопротивления поперечного сечения балки определяется по формуле:

$$W = J/y_{\max}. \quad (17)$$

Для определения момента сопротивления W необходимо найти осевой момент инерции J_x относительно главной центральной оси x поперечного сечения балки (нейтральной линии), а также расстояние y_{\max} от нейтральной линии сечения до наиболее удаленного волокна.

4.2. *Определение геометрических характеристик нестандартных поперечных сечений балки.* Поперечные сечения нестандартной формы разбивают на простейшие фигуры (прямоугольники, треугольники, трапеции, круги, круговые сегменты и т.п.), для которых имеются формулы для расчёта геометрических характеристик этих фигур: координат центра площади – x_c, y_c ; площадей – A ; моментов инерции сечения относительно собственных центральных осей x_i, y_i – J_{xi}, J_{yi} .

В приложении 1 представлены геометрические характеристики трапеции с двумя прямыми углами (прямоугольной трапеции), прямоугольного треугольника, кругового сегмента и полукруга.

Процедура определения главных моментов инерции сечения J_x состоит из следующих этапов:

- на масштабной бумаге вычерчивают поперечное сечение и расчленяют его на простые фигуры;
- выбирают положение осей x_1 и y_1 ;
- для каждой простой фигуры вычисляют положения центров площадей c_i и указывают на чертеже положения главных центральных осей $c_i x_i, c_i y_i$; вычисляют расстояния a_i и b_i между осями x_i и x_1, y_i и y_1 ;
- для каждой простой фигуры вычисляют или выписывают из таблиц сортамента моменты инерции J_{xi} и площади поперечных сечений A_i ;
- по формуле (19) определяют координату y_c центра площади составного сечения и проводят главные оси инерции всего сечения x и y ;
- вычисляют моменты инерции для всего сечения по формуле (18).

Ось симметрии сечения обязательно является его главной осью, поэтому положение главной оси y сечений на рис.4,а,б определяется

непосредственно. Вторая главная ось x перпендикулярна оси симметрии и проходит через центр площади сечения.

Согласно теореме о параллельном переносе осей координат главные центральные моменты инерции J_x вычисляют по формуле:

$$J_x = \sum_i (J_{x_i} + a_i^2 A_i), \quad (18)$$

где J_{x_i} – момент инерции каждой отдельной части составного сечения относительно собственной центральной оси x_i , параллельной главной центральной оси всего сечения x ; a_i – расстояние между упомянутыми осями x_i и x ; A_i – площадь отдельной части составного сечения.

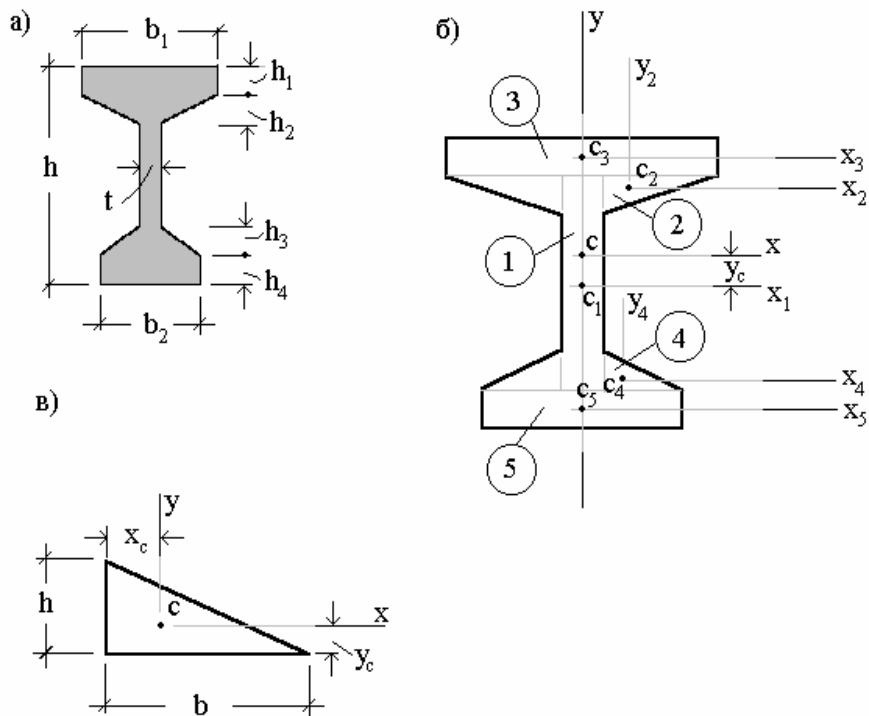


Рис.7. К определению геометрических характеристик поперечного сечения балки.

Координату y_c центра площади составного сечения определяют по формуле:

$$y_c = \frac{\sum_i S_{x_i}}{A}, \quad (19)$$

где S_{x_i} – статические моменты площадей отдельных частей составного сечения относительно какой-либо оси x_i , параллельной главной центральной оси всего сечения x ; A – площадь всего составного сечения.

Выразим осевой момент инерции поперечного сечения J_x для двутавра, показанного на рис.2, а также на рис.7,а, через высоту сечения h и определим ее числовые значения на разных участках балки из условия прочности (2) по нормальным напряжениям.

Представим двутавр совокупностью прямоугольников и треугольников, как показано на рис.7,б. Ось x_1 проведем через центр площади прямоугольника 1.

Осевые моменты прямоугольного треугольника со сторонами b , h относительно его центральных осей x , y определяются выражениями (см. приложение 1):

$$J_x = bh^3/36, \quad J_y = hb^3/36. \quad (20)$$

Площадь поперечного сечения на рис.7,б:

$$A = (h - h_1 - h_4)t + h_1b_1 + 2 \cdot 0,5h_2 \cdot 0,5(b_1 - t) + h_4b_2 + 2 \cdot 0,5h_3 \cdot 0,5(b_2 - t).$$

После подстановки размеров элементов поперечного сечения по формулам (1) получаем: $A = 0,173 h^2$.

Статический момент S_{x_1} площади двутавра относительно оси x_1 :

$$S_{x_1} = h_1b_1 \cdot 0,5(h - h_1) + 2 \cdot 0,5h_2 \cdot 0,5(b_1 - t) \cdot (0,5h - h_1 - h_2/3) - h_4b_2 \cdot 0,5(h - h_4) - 2 \cdot 0,5h_3 \cdot 0,5(b_2 - t) \cdot (0,5h - h_4 - h_3/3).$$

С учетом соотношений (1): $S_{x_1} = 11,663 t^3$.

Расстояние y_c от центра площади двутавра до оси x_1 :

$$y_c = S_{x_1} / A = 11,663t^3 / 17,3t^2 = 0,674t = 0,0674h.$$

Зная y_c проводим главную центральную ось x .

Осевой момент инерции J_x двутавра относительно центральной оси x :

$$\begin{aligned} J_x = & t \cdot (h - h_1 - h_4)^3 / 12 + t \cdot (h - h_1 - h_4) \cdot y_c^2 + b_1 h_1^3 / 12 + \\ & + b_1 h_1 \cdot (0,5h - 0,5h_1 - y_c)^2 + 2 [0,5(b_1 - t) h_2^3 / 36 + \\ & + 0,5h_2 \cdot 0,5(b_1 - t) \cdot (0,5h - h_1 - y_c - h_2/3)^2] + \\ & + b_2 h_4^3 / 12 + b_2 h_4 \cdot (0,5h - 0,5h_4 + y_c)^2 + 2[0,5(b_2 - t) \cdot h_3^3 / 36 + \\ & + 0,5h_3 \cdot 0,5(b_2 - t) \cdot (0,5h - h_4 + y_c - h_3/3)^2]. \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом соотношений (1):

$$J_x = 216,743t^4 = 216,743 \cdot 10^{-4} h^4.$$

Расстояние y_{\max} от нейтральной оси x до наиболее удаленного волокна балки:

$$y_{\max} = h / 2 + y_c = 5t + 0,674t = 5,674t = 0,567h \quad (22)$$

Используя условие прочности (2) и допускаемые напряжения $\sigma_{\text{adm}} = 30$ МПа, $\tau_{\text{adm}} = 10$ МПа, определяем требуемую высоту H_k ($k=I, II, III, IV$) поперечного сечения балки по участкам:

– участок I ($0 \leq z < 1$ м):

$$\sigma_{\max}^{(1)} = \frac{\max |M_I|}{J_x^{(1)}} \cdot y_{\max}^{(1)} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,567 H_I}{216,743 \cdot 10^{-4} H_I^4} = \frac{78,48 \cdot 10^3}{H_I^3};$$

$$H_I \geq \sqrt[3]{\frac{78,48 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,138 \text{ м};$$

– участок II ($1 \leq z < 3$ м):

$$\sigma_{\max}^{(2)} = \frac{\max |M_{II}|}{J_x^{(2)}} \cdot y_{\max}^{(2)} = \frac{22,112 \cdot 10^3 \cdot 0,567 H_{II}}{216,743 \cdot 10^{-4} H_{II}^4} = \frac{578,45 \cdot 10^3}{H_{II}^3};$$

$$H_{II} \geq \sqrt[3]{\frac{578,45 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,268 \text{ м};$$

– участок III ($3 \leq z < 6$ м):

$$\sigma_{\max}^{(3)} = \frac{\max |M_{III}|}{J_x^{(3)}} \cdot y_{\max}^{(3)} = \frac{21,776 \cdot 10^3 \cdot 0,567 H_{III}}{216,743 \cdot 10^{-4} H_{III}^4} = \frac{569,66 \cdot 10^3}{H_{III}^3};$$

$$H_{III} \geq \sqrt[3]{\frac{569,66 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,267 \text{ м};$$

– участок IV ($6 \leq z < 10$ м):

$$\sigma_{\max}^{(4)} = \frac{\max |M_{IV}|}{J_x^{(4)}} \cdot y_{\max}^{(4)} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,567 H_{IV}}{216,743 \cdot 10^{-4} H_{IV}^4} = \frac{1046,4 \cdot 10^3}{H_{IV}^3};$$

$$H_{IV} \geq \sqrt[3]{\frac{1046,4 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,327 \text{ м}.$$

Высота поперечного сечения балки на втором и третьем участках мало отличается по величине, поэтому принимаем для дальнейших расчетов

$$H_{II} = H_{III} = 0,268 \text{ м}.$$

4.3. Проверка прочности балки по касательным напряжениям.

После подбора размеров поперечных сечений балки по нормальным напряжениям (условие (2)) необходимо проверить прочность балки по касательным напряжениям (условие (3)). Для выполнения этой проверки

необходимо найти максимальное значение статического момента отсеченной части площади поперечного сечения относительно нейтральной оси $S_{\max}^{(отс)}$.

Для верхней отсеченной части сечения по рис.7,б находим:

$$S_{\max,1}^{(отс)} = t \cdot (0,5h - h_1 - y_c) \cdot 0,5(0,5h - h_1 - y_c) + 2[0,5(b_1 - t) \cdot h_2 \times \\ \times (0,5h - h_1 - y_c - h_2 / 3)] + b_1 h_1 \cdot (0,5h - 0,5h_1 - y_c) = 27,819t^3. \quad (23)$$

Для нижней отсеченной части сечения получаем:

$$S_{\max,2}^{(отс)} = t \cdot (0,5h - h_4 + y_c) \cdot 0,5(0,5h - h_4 + y_c) + 2[0,5(b_2 - t) \cdot h_3 \times \\ \times (0,5h - h_4 - h_3 / 3 + y_c)] + b_2 h_4 \cdot (0,5h - 0,5h_4 + y_c) = 27,819t^3. \quad (24)$$

Вычисление максимального значения статического момента отсеченной площади поперечного сечения для его верхней и нижней части служит проверкой правильности положения нейтральной оси, которая является главной центральной осью.

$$\text{Принимаем } S_{\max}^{(отс)} = 27,819t^3 \approx 0,0278h^3.$$

Максимальные значения касательных напряжений:

– на первом участке:

$$\tau_{\max}^{(1)} = \frac{2q_a \cdot 0,0278H_I^3}{216,743 \cdot 10^{-4} \cdot H_I^4 \cdot 0,1H_I} = \\ = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0,0278}{216,743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,138)^2 \cdot 0,1} = 2,69 \cdot 10^6 < \tau_{adm} = 10 \cdot 10^6 \text{Па};$$

– на втором и третьем участках:

$$\tau_{\max}^{(2)} = \tau_{\max}^{(3)} = \frac{6,278q_a \cdot 0,0278H_{II}^3}{216,743 \cdot 10^{-4} H_{II}^4 \cdot 0,1H_{II}} = \\ = \frac{6,278 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0,0278}{216,743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,268)^2 \cdot 0,1} = 2,24 \cdot 10^6 < \tau_{adm} = 10 \cdot 10^6 \text{Па};$$

– на четвертом участке:

$$\tau_{\max}^{(4)} = \frac{13,722q_a \cdot 0,0278H_{IV}^3}{216,743 \cdot 10^{-4} H_{IV}^4 \cdot 0,1H_{IV}} = \frac{13,722 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0,0278}{216,743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,327)^2 \cdot 0,1} =$$

$$= 3,29 \cdot 10^6 < \tau_{adm} = 10 \cdot 10^6 \text{Па.}$$

Условия прочности по касательным напряжениям выполнены.

Таким образом, размеры поперечного сечения балки по условиям прочности (2), (3) определены.

Далее необходимо проверить, удовлетворяет ли балка условиям жесткости. Расчеты балок на жесткость выполняются по специальным методикам, одна из которых применяется в задании № 5.

4.4. Оценка экономичности предлагаемых размеров балки.

Экономичность предлагаемых размеров поперечных сечений балки оценим, сравнивая затраты материала (железобетона) согласно выполненному проектировочному расчету, в котором учитывается разная напряженность участков балки и предлагается принимать разную высоту ее сечений, и затраты материала в соответствии расчетом, в котором не учитывается разная напряженность участков балки и предлагается принимать одинаковую высоту ее сечений по всей длине балки.

С этой целью вычислим объем балки V согласно выполненному проектировочному расчету и объем балки V_0 в соответствии расчетом, в котором не учитывается разная напряженность участков балки, т.е. принимается одинаковая высота ее сечений по всей длине балки.

Площадь поперечных сечений балки A выражается через их высоту h по формуле $A = 0,173 h^2$; вычисленная высота поперечных сечений балки составляет: $H_I = 0,138, H_{II} = 0,268, H_{III} = 0,268, H_{IV} = 0,327$ м; длины участков равны $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3$ и $l_4 = 4$ м. Вычисления V сведены в табл. 4.

Таблица 4

№ уч-ка	Длина уч-ка, м	Высота сечения, м	Площадь сечения, м ²	Объем балки, м ³
I	1	0,138	0,00329	$0,329 \cdot 10^{-2}$
II	2	0,268	0,01243	0,02486
III	3	0,268	0,01243	0,03729
IV	4	0,327	0,0185	0,074

Всего: $0,08972 \text{ м}^3$

Если не учитывается разная напряженность участков балки, то в соответствии с условием прочности (2) принимается одинаковая высота ее сечений $H = H_{IV} = 0,327$ м по всей длине балки $l = 10$ м. В этом случае площадь поперечного сечения балки $A_0 = 0,173 \cdot (0,327)^2 = 0,0185 \text{ м}^2$, а объем балки $V_0 = 0,0185 \cdot 10 = 0,185 \text{ м}^3$.

Если же учитывается разная напряженность участков балки, то ее объем $V = 0,08972 \text{ м}^3$.

Разность объемов $\Delta V = V_0 - V = 0,185 - 0,08972 = 0,09528 \text{ м}^3$.

Перерасход материала E_{gr} составляет

$$E_{gr} = \frac{0,09528}{0,08972} \cdot 100\% = 106\%.$$

Таким образом, затраты материала (железобетона) согласно выполненному проектировочному расчету, в котором учитывается разная напряженность участков балки и предлагается принимать разную высоту ее сечений, в два раза меньше, чем затраты материала в соответствии расчетом, в котором не учитывается разная напряженность участков балки и предлагается принимать одинаковую высоту ее сечений по всей длине балки.

Расчеты закончены.

Задание № 4. Определение несущей способности составной деревянной балки по допускаемым напряжениям.

1. **Формулировка задания.** В конструкциях деревянных зданий и инженерных сооружений (мостов, эстакад, пирсов, плотин и других сооружений) используются составные деревянные балки. Составные деревянные балки – это конструкции из двух-трех бревен или брусьев, соединенных между собой по длине колодками (шпонками) или нагелями. На рис.1, рис.2 представлены схемы составных трехъярусных балок на колодках и на пластинчатых нагелях. Размеры на рис.1, рис.2 – ориентировочные, указаны для визуальной оценки соотношений размеров.

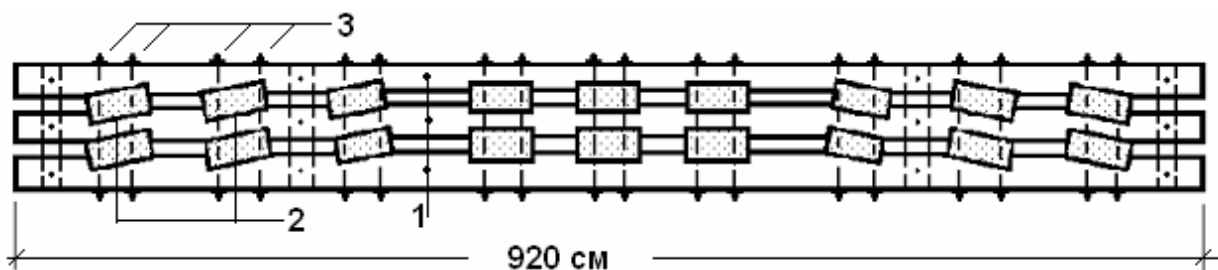


Рис.1. Составная трехъярусная балка на колодках.

На рис.1 обозначено: 1 – бревна или брусья; 2 – колодки; 3 – болты.

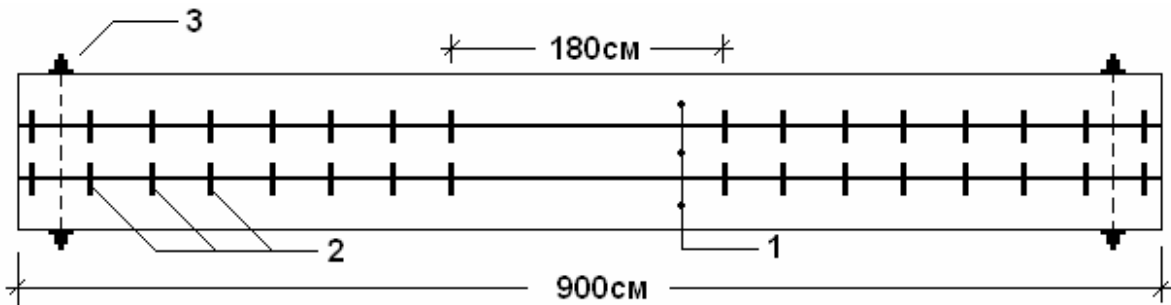


Рис.2. Составная трехъярусная балка на пластинчатых нагелях.

На рис.2 обозначено: 1 – бревна или брусья; 2 – пластинчатые нагели; 3 – болты.

В задании требуется для составной деревянной балки, изготовленной из сосновых бревен, с известными формой и размерами поперечного сечения определить допускаемую нагрузку расчетом по допускаемым напряжениям.

Расчетные схемы балок приведены на рис.3,а,б; типы поперечных сечений – на рис.4 и рис.5; исходные данные – в таблице 1.

Номер расчетной схемы и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $n_2n_1n_0$, выданному преподавателем; n_2 , n_1 , n_0 – три цифры кода студента: n_2 – первая слева цифра, n_1 – вторая слева цифра, n_0 – последняя цифра кода.

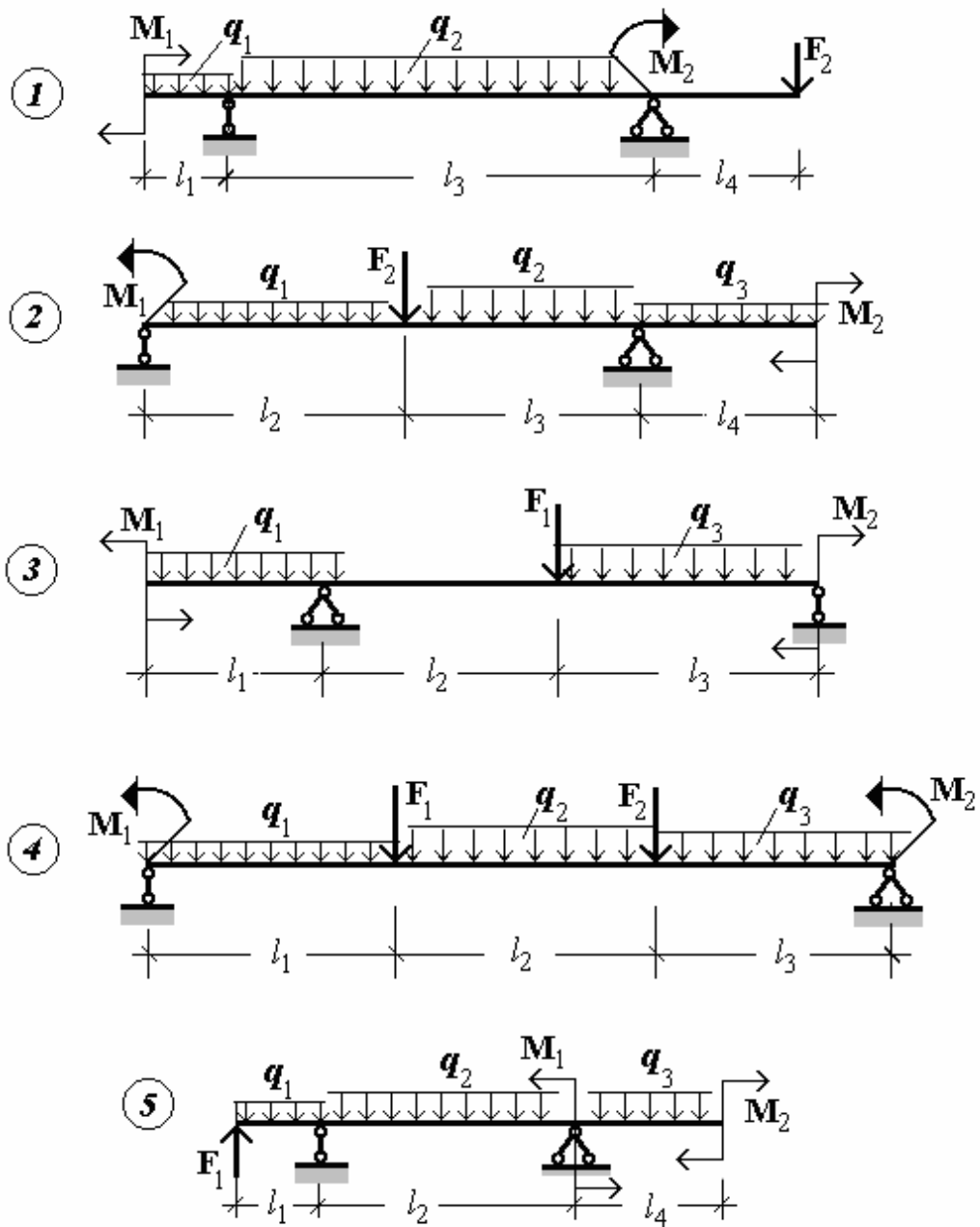


Рис.3,а. Расчетные схемы балок 1÷5 к заданию №4.

В задании на выполнение расчета влажность древесины для балок с поперечным сечением типа 1 принимается равной 26% , а для балок с поперечным сечением типа 2 – 15%.

2. Основы прочностных расчетов деревянных конструкций.

Внутренние усилия в элементах деревянных конструкций допускается определять по линейно-упругой модели деформирования древесины. Пространственную конструкцию можно расчленять на отдельные плоские системы и рассчитывать их на прочность без учета

податливости элементов. При этом узловые соединения элементов сквозных конструкций в расчетных схемах принимают шарнирными.

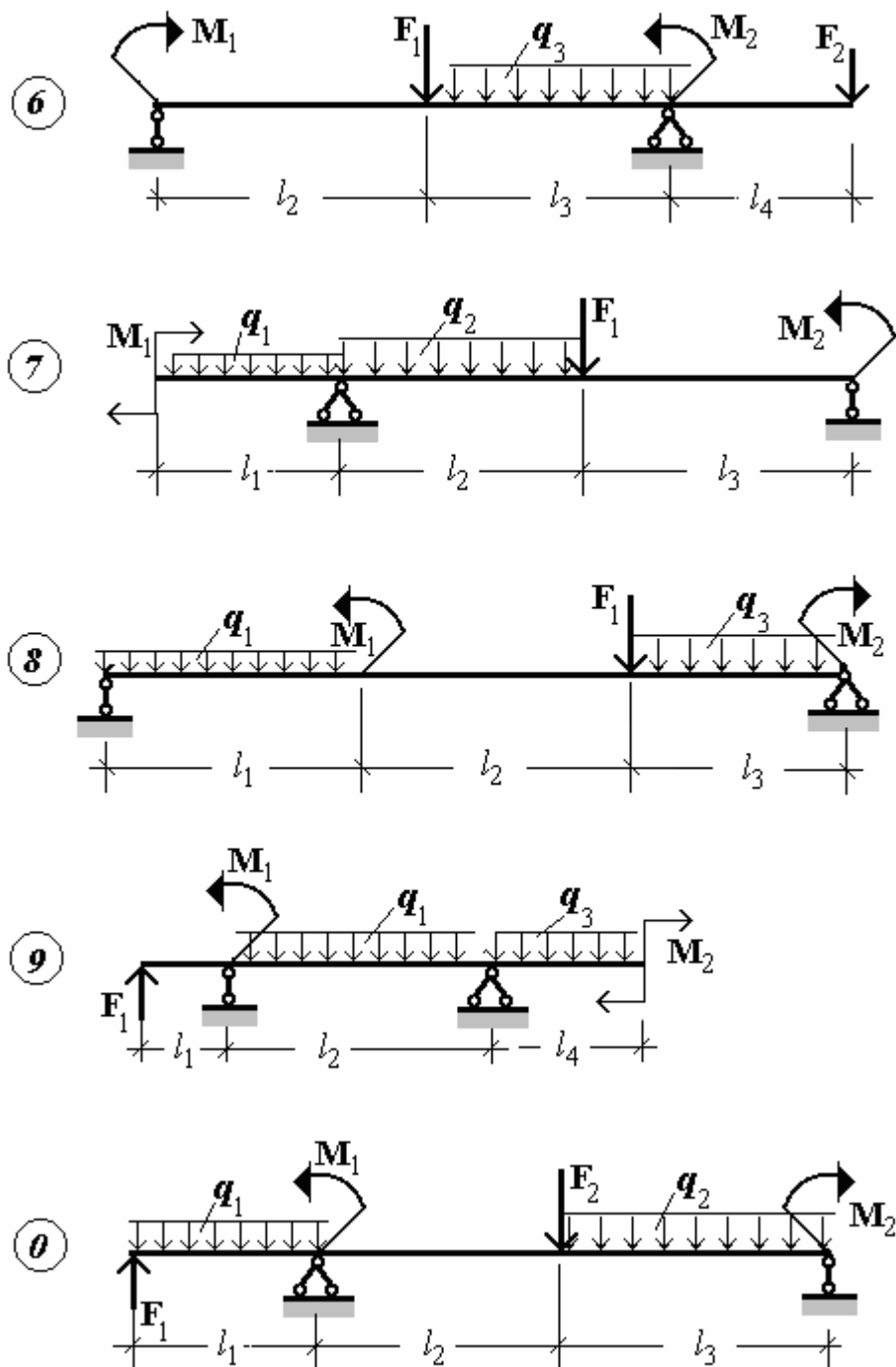


Рис.3,б. Расчетные схемы балок 6÷0 к заданию №4.

Напряжения и деформации от изменения температуры, а также вследствие усушки и разбухания древесины, допускается не учитывать.

Действие сил трения учитывают только в случаях, когда трение ухудшает условия работы конструкции или соединения (коэффициент трения дерева по дереву в этих случаях допускается принимать равным 0,6).

Расчеты на прочность изгибаемых составных балок на призматических продольных шпонках (колодках) производят с учетом коэффициента сплошности k_{cont} , равного 0,85 для двухъярусных балок и 0,80 — для трехъярусных.

Прогибы для указанных составных балок, найденные без учета податливости соединений, должны быть увеличены на 30 %, т.е. должны быть умножены на коэффициент $k_g = 1,3$.

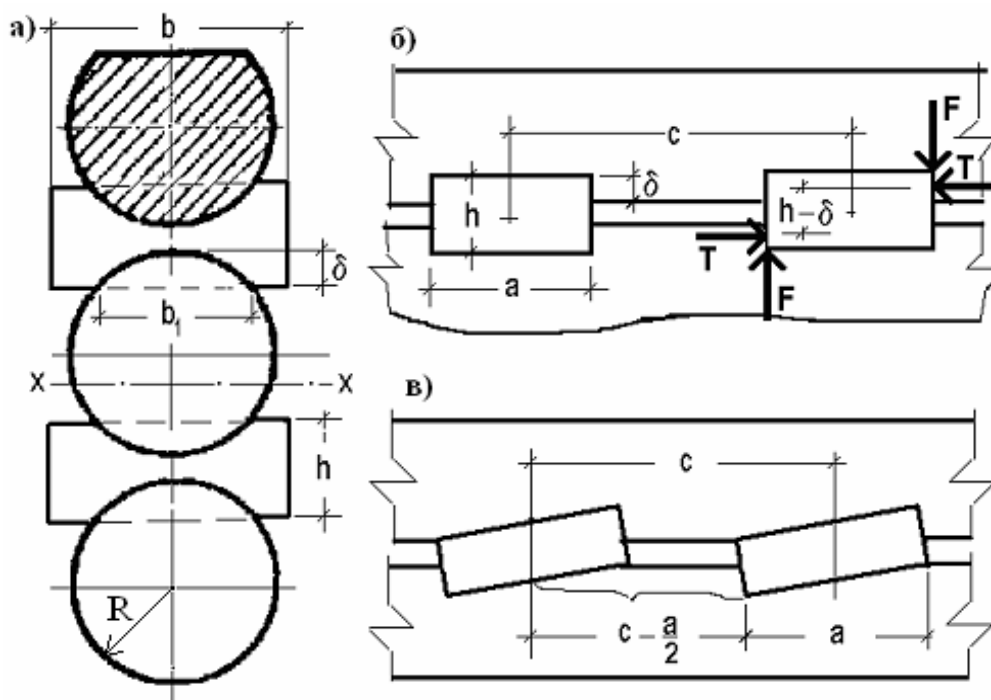


Рис.4. Тип 1. Поперечное сечение балки на колодках.

3. Расчеты деревянных стержневых элементов на прочность.

Формулы для расчетов стержневых элементов деревянных конструкций на прочность приведены в СНиП II-25-80 (Деревянные конструкции. Нормы проектирования /Госстрой СССР. – М.: ГУП ЦПП, 2000).

Эти формулы удобно использовать в праввинтовой локальной системе координат xuz : ось x направлена вдоль оси стержня; оси z , y перпендикулярны к оси x .

Согласно СНиП II-25-80 прочность элементов считается обеспеченной, если выполнены следующие условия:

$$- \text{ при растяжении вдоль волокон } \sigma_{x,t} = N_d / A_{nt} \leq R_{dt}; \quad (1)$$

$$- \text{ при сжатии вдоль волокон } \sigma_{x,c} = N_d / A_{nt} \leq R_{ds}; \quad (2)$$

– при изгибе в одной из главных плоскостей

$$\sigma_{x,b} = \frac{M_d}{W_{nt}} \leq R_{db}, \quad \tau_{xz} = \frac{Q_d S_{br}}{I_{br} b} \leq R_{dab}; \quad (3)$$

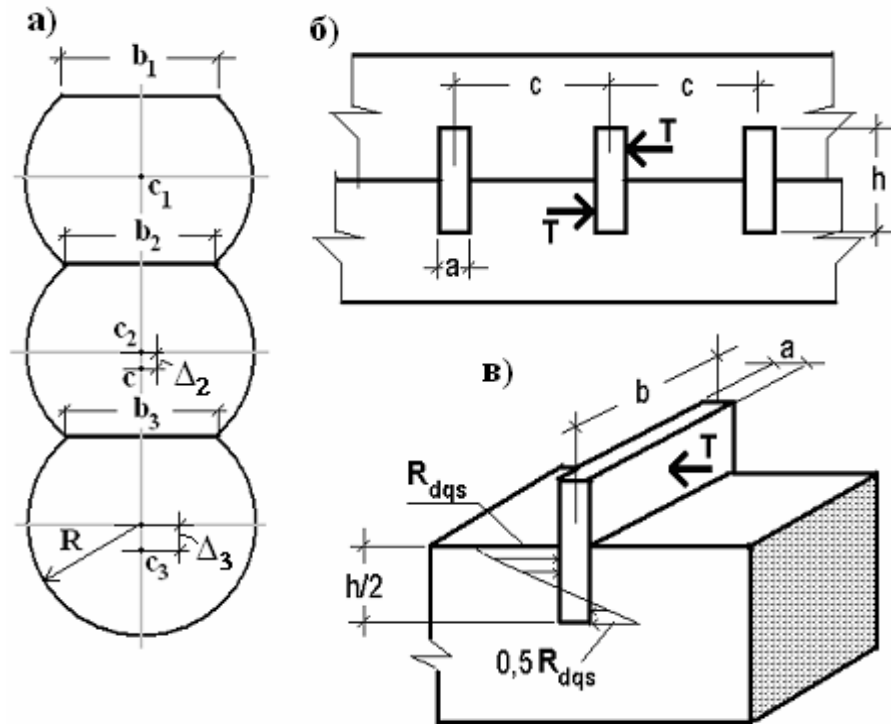


Рис.5. Тип 2. Поперечное сечение балки на нагелях.

– при сжатии с изгибом в одной из главных плоскостей

$$\sigma_{x,c} = \frac{N_d}{A_{nt}} + \frac{M_d}{\xi W_{nt}} \cdot \frac{R_{dt}}{R_{db}} \leq R_{ds}; \quad (4)$$

– при сжатии (смятии) поперек волокон $\sigma_q = N_d / A_q \leq R_{dq}$. (5)

В формулах (1),..., (5) обозначено:

N_d , M_d , Q_d — расчетные значения соответственно осевого усилия, изгибающего момента, поперечной силы;

$\sigma_{x,t}$, $\sigma_{x,c}$, $\sigma_{x,b}$, σ_q , τ_{xz} — нормальные и касательные напряжения, соответствующие видам напряженных состояний элементов конструкций;

R_{dt} , R_{ds} — расчетные сопротивления древесины при растяжении и сжатии (смятии) вдоль волокон;

R_{db} — расчетное сопротивление древесины при изгибе;

Таблица 1

Исходные данные к определению несущей способности балок

№ сх- емы	R, см	Тип сече ния	b, см	h, см	b ₁ , см	b ₂ , см	b ₃ , см	n ₁	кН/м			кН		кНм		n ₂	Длина участка, м				
									q ₁	q ₂	q ₃	F ₁	F ₂	M ₁	M ₂		l ₁ =a	l ₂	l ₃	l ₄	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	12	1	20	12	16	-	-	1	q	2q	3q	5qa	4qa	4qa ²	5qa ²	1	2	2a	3a	a
2	2	13	2	-	12	14	12	12	2	3q	2q	q	4qa	5qa	5qa ²	6qa ²	2	3	a	2a	0,5a
3	3	14	1	24	14	14	-	-	3	2q	q	3q	3qa	6qa	6qa ²	5qa ²	3	2	1,5a	2a	a
4	4	15	2	-	14	20	16	16	4	2q	3q	2q	6qa	3qa	3qa ²	5qa ²	4	3	a	0,5a	0,5a
5	5	15	1	26	16	20	-	-	5	3q	q	2q	5qa	6qa	5qa ²	3qa ²	5	2	2a	a	1,5a
6	6	14	2	-	12	18	16	16	6	q	2q	3q	6qa	5qa	4qa ²	6qa ²	6	3	a	0,5a	0,5a
7	7	13	1	24	14	16	-	-	7	3q	2q	q	4qa	5qa	6qa ²	4qa ²	7	2	1,5a	a	1,5a
8	8	12	2	-	10	14	12	12	8	2q	q	3q	3qa	6qa	6qa ²	5qa ²	8	2	1,5a	2a	a
9	9	13	1	24	14	16	-	-	9	2q	3q	2q	6qa	3qa	3qa ²	5qa ²	9	3	a	0,5a	0,5a
0	0	14	2	-	14	16	12	12	0	3q	q	2q	5qa	6qa	5qa ²	3qa ²	0	2	2a	a	1,5a

Примечания: 1. Из таблицы выбираются значения величин, указанных на схемах балок. На схемах балок обозначено: q – равномерно распределенная нагрузка; F – сосредоточенная сила; M – момент пары сил.

2. Длины участков балки выражаются через длину первого участка: a = l₁.

R_{dab} – расчетное сопротивление древесины в случае скалывания вдоль волокон при изгибе;
 R_{dq} – расчетное сопротивление древесины при сжатии и смятии всей поверхности поперек волокон;
 A_{nt}, A_{br} — площади поперечного сечения нетто и брутто;
 S_{br} — статический момент брутто части сечения относительно нейтральной оси;
 I_{br} — момент инерции сечения брутто;
 W_{nt} — момент сопротивления ослабленного сечения, принимаемый для составных стержней с учетом коэффициента сплошности k_{cont} ;
 I_z, I_y — моменты инерции сечения нетто соответственно относительно осей z и y ;
 z, y — расстояния от главных осей y и z до наиболее удаленных точек сечения;
 b — ширина сечения;
 A_q — площадь смятия.

Расчетные сопротивления древесины сосны 1-го сорта в зависимости от ее влажности принимают по табл. 2.

Модули упругости древесины при определении деформаций для всех пород при сжатии и растяжении вдоль волокон, а также при изгибе принимают равными 8340 МПа от постоянных нагрузок и 9810 МПа от временных нагрузок. Для древесины других пород расчетные сопротивления, приведенные в табл. 2, следует умножать на коэффициент перехода по табл. 3.

Расчетную несущую способность продольных призматических шпонок (колодок) следует определять по смятию и скалыванию, причем расчетные сопротивления скалыванию следует принимать с коэффициентом условий работы, равным 0,8.

Таблица 2

Расчетные сопротивления древесины сосны 1-го сорта

Напряженное состояние и характеристика элементов	Расчетные сопротивления, МПа, при влажности, %		
	обозначение	25 и менее	св. 25
1. Изгиб: а) элементов из бревен естественной коничности б) элементов из брусьев и окантованных бревен	R_{db}		
		17,7	15,2
		15,7	13,7
2. Растяжение вдоль волокон	R_{dt}	11,8	9,8
3. Сжатие и смятие вдоль волокон	R_{ds}, R_{dqs}	14,7	11,8

4. Сжатие и смятие всей поверхности поперек волокон	R_{dq}	1,77	1,47
5. Смятие местное поперек волокон:	R_{dqp}		
а) в лобовых врубках (при длине площади смятия до 15 см)		3,1	2,5
б) под шайбами при углах смятия от 90 до 60°		3,9	3,3
6. Скалывание (наибольшее) вдоль волокон при изгибе	R_{dab}	2,35	2,15

Таблица 3

Порода дерева	Коэффициент перехода для расчетных сопротивлений		
	растяжению, изгибу, сжатию и смятию вдоль волокон	сжатию и смятию поперек волокон	скалыванию
Ель	1,0	1,0	1,0
Лиственница	1,2	1,2	1,0*
Пихта	0,8	0,8	0,8
Дуб	1,3	2,0	1,3
Ясень, граб	1,3	2,0	1,6
Бук	1,1	1,6	1,3

*Для клееных конструкций – 0,9.

4. Прочностные расчеты составных балок.

Составные балки изготавливают из бревен или брусьев, соединенных по длине с помощью колодок или пластинчатых нагелей из твердых пород дерева, предназначенных для восприятия продольных сдвигающих усилий и обеспечения совместности деформаций составных сечений – рис.4, рис.5.

Расчеты на прочность таких балок выполняют по формулам (1),..., (5), в которых вместо площадей A_{nt} , моментов инерции J_{nt} , моментов сопротивления W_{nt} и статических моментов S_{nt} цельного поперечного сечения подставляют соответствующие условные величины, полученные умножением A_{nt} , J_{nt} , W_{nt} и S_{nt} на коэффициент сплошности k_{cont} , учитывающий ослабление сечений стесками, врезками, отверстиями под болты и т.п. Прогибы и углы поворотов составных балок выполняют с использованием коэффициента надежности по нагрузке $\gamma_f = 1$ и коэффициента $k_g = 1,3$ увеличения податливости составных сечений по сравнению с цельными.

На рис 4,а показано поперечное сечение трехъярусной составной балки на колодках шириной b и толщиной h . На рис.4,б,в показаны фрагменты продольных сечений балок с прямыми и наклонными колодками. Длина колодок – a , расстояние между центрами колодок – c , глубина врезки – δ . Глубину врезки δ принимают не менее $0,2R$.

Сдвигающие силы T , действующие на колодку, определяются по формуле:

$$T = QS(c - a)/J, \quad (6)$$

где Q – перерезывающая сила в рассматриваемом сечении балки; S – статический момент части площади сечения, расположенной выше колодки (на левой части рис.4,а заштрихована); J – осевой момент инерции. Величины S и J определяются без учета ослаблений сечения врезками колодок и стяжными болтами.

Расстояние между колодками c можно найти следующим образом.

Допускаемая сдвигающая сила $T_{adm}^{(1)}$ по условию прочности на скалывание по материалу колодки определяется как

$$T_{adm}^{(1)} = abR_{dab}^{(1)}, \quad (7)$$

где a – длина колодки; b – ширина колодки; $R_{dab}^{(1)}$ – расчетное сопротивление материала колодки скалыванию вдоль волокон при изгибе.

Допускаемая сдвигающая сила $T_{adm}^{(2)}$ по условию прочности на смятие по материалу колодки и по материалу бревна (бруса) определяется как

$$T_{adm}^{(2)} = A_{nt} \cdot R_{dcrsh}, \quad (8)$$

где A_{nt} – площадь смятия, определяемая величиной $b_1\delta$ для прямоугольной площадки смятия и $0,67b_1\delta$ – для кругового сегмента; R_{dcrsh} – расчетное сопротивление древесины на смятие, принимаемое по табл.2 равным R_{dqs} , если смятие происходит вдоль волокон, и R_{dqp} , если смятие происходит поперек волокон. При этом расчетные сопротивления древесины, указанные в табл.2 для пород деревьев, перечисленных в табл.3, должны быть умножены на коэффициенты перехода из табл.3.

Наименьшее значение допускаемой сдвигающей силы $\min T_{adm}$ на одну колодку, найденное по формулам (7), (8), можно использовать в формуле (6), в которой поперечную силу принять равной Q_{max} , для определения расстояния между колодками ($c-a$):

$$c - a = \min T_{adm} \cdot J / QS. \quad (9)$$

Древесину бревен проверяют также на скалывание по формуле:

$$QS(c-a)/J \leq k_1 \cdot k_2 \cdot R_{dab}, \quad (10)$$

где k_1 – коэффициент условий работы, равный 0,8; k_2 – коэффициент перехода из табл.3.

В расчетах на смятие и скалывание наклонных колодок по рис.4,в необходимо учитывать снижение прочности древесины колодок при действии сжимающих сил под углом α к направлению волокон и вычислять расчетное сопротивление по формуле (11). Неровной линией на рис.4,в условно показана трещина скалывания.

Расчетное сопротивление древесины смятию и скалыванию под углом α к направлению волокон определяют по формуле:

$$R_{d\alpha} = \frac{R_{d1}}{1 + (R_{d1}/R_{d2} - 1) \sin^3 \alpha}, \quad (11)$$

где R_{d1} , R_{d2} — расчетные сопротивления смятию или скалыванию соответственно при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$.

Силы распора F , возникающие из-за скручивания колодок моментами $T(h-\delta)$ и воспринимаемые стяжными болтами, определяются по формуле:

$$F = T(h-\delta)/a. \quad (12)$$

На рис.5,а,б представлены расчетные схемы соединений составных балок на пластинчатых нагелях.

Расчеты на прочность пластинчатых нагелей выполняют следующим образом. Принимается, что нагель (рис.5,б) защемлен в гнездах, выдолбленных в сплачиваемых бревнах, в древесине которых под действием сдвигающей силы T возникают нормальные напряжения, распределенные по линейному закону, как показано на рис.5,в. Усилие смятия T_{qs} , которое может воспринять бревно, определяют из условия прочности на смятие древесины:

$$T_{qs} = 0,5(R_{dqs} - 0,5R_{dqs})bh/2 = bh R_{dqs}/8. \quad (13)$$

Максимальный изгибающий момент в нагеле возникает на расстоянии $z_0 = h/6$ от поверхности бревна, так что его величина определяется формулой:

$$M = bh^2 R_{dqs}/108. \quad (14)$$

Максимальное нормальное напряжение, соответствующее изгибающему моменту (14), вычисляемое как

$$\sigma_{\max} = 6M/ba^2 = 4hT_{qs}/(9ba^2),$$

не должно превышать расчетное сопротивление древесины на изгиб, принимаемое по табл.2 равным R_{db} . Тогда допускаемое значение сдвигающей силы T можно определить из выражения:

$$T = 9ba^2 R_{db}/(4h). \quad (15)$$

Расчеты на прочность и жесткость составных балок на пластинчатых нагелях и самих нагелей на смятие и на скалывание производят так же, как рассмотренные выше расчеты балок на колодках.

Колодки и пластинчатые нагели располагают либо равномерно по длине балки, либо сближая их возле опор, где поперечные и сдвигающие усилия имеют наибольшие значения.

5. Пример расчета составной балки.

В задании требуется определить несущую способность балки в упругой стадии деформирования при известных форме и размерах поперечного сечения балки и известном характере распределения внешних сил.

В качестве расчетной схемы составной деревянной балки примем схему, показанную на рис.6, где использованы следующие обозначения: F , q , M – сосредоточенная сила, распределенная нагрузка, сосредоточенный момент (момент пары сил); EJ – изгибная жесткость поперечного сечения (E – модуль упругости, J – осевой момент инерции); V_B , V_C – опорные реакции.

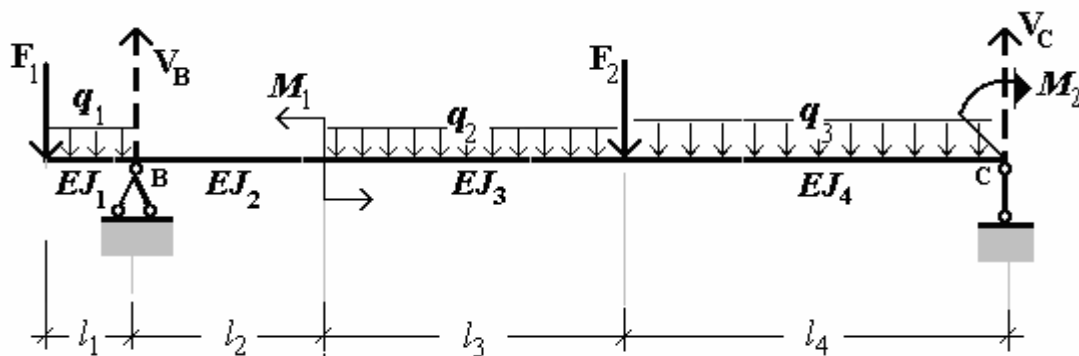


Рис.6. Расчетная схема составной балки.

Поперечное сечение трехъярусной составной балки показано на рис.7. Оно состоит из двух рядов окантованных сосновых бревен диаметром 22 см, по три бревна в каждом ряду, скрепленных между собой

прямыми дубовыми колодками, имеющих толщину $h = 10$ см, глубину врезки колодок в бревна $\delta_2 = 4$ см, ширину стески верхних бревен $b_1 = 12$ см, высоту стески $\delta_1 = 1,8$ см, ширину стески средних бревен $b_2 = 17$ см, высоту стески $\delta_2 = 4$ см.

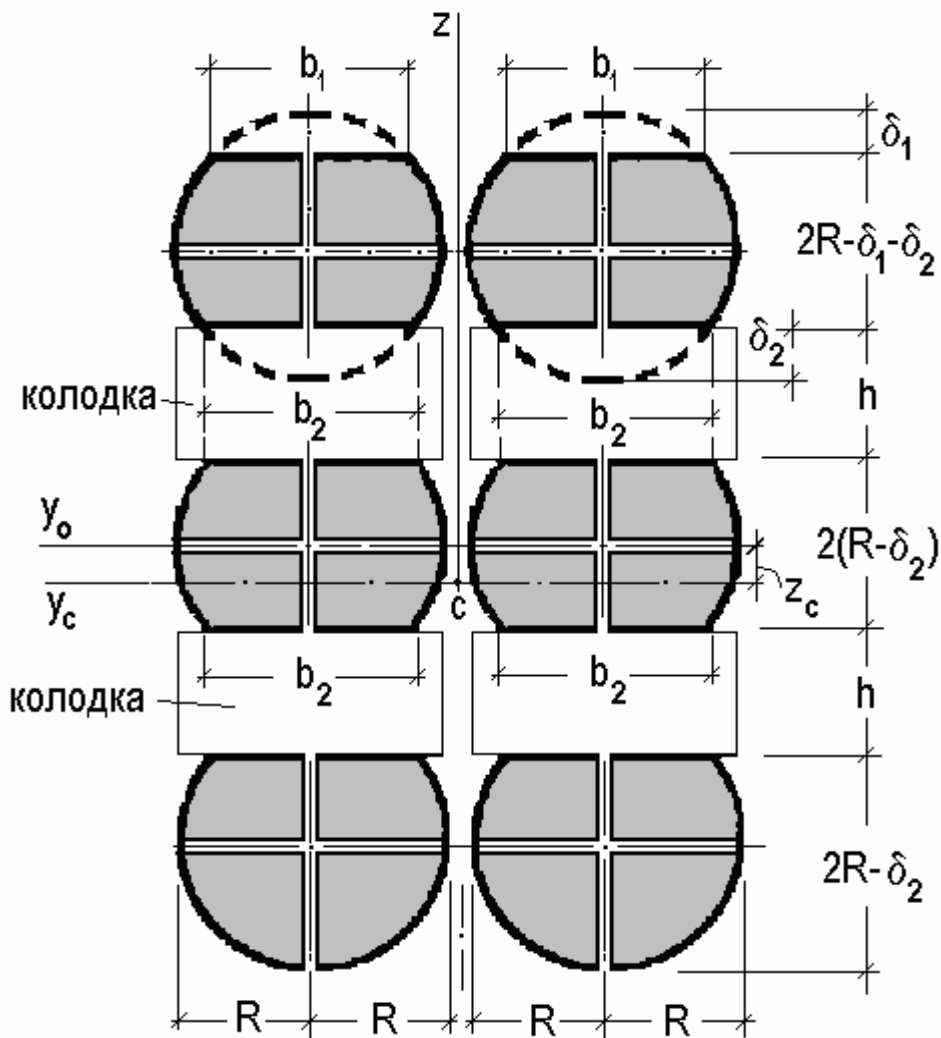


Рис.7. Поперечное сечение трехъярусной составной балки.

Примем следующие исходные данные:

$$l_1 = a, l_2 = 2a, l_3 = 3a, l_4 = 4a; a_1 = a, a_2 = 3a, a_3 = 6a, a_4 = 10a; a = 1 \text{ м};$$

$$q_1 = q, q_2 = 2q, q_3 = 3q, \text{ кН/м};$$

$$F_1 = qa, F_2 = 2qa, \text{ кН}; M_1 = 10qa^2, M_2 = 20qa^2, \text{ кНм}.$$

Условие прочности по допускаемым нормальным напряжениям изгибаемых в одной плоскости прямых брусьев из однородных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max|M|}{J} \cdot z_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (16)$$

где σ_{\max} , σ_{adm} – максимальное и допускаемое нормальные напряжения;
 $\max|M|$ – максимальный по абсолютному значению изгибающий момент;
 J – осевой момент инерции сечения балки; z_{\max} – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленного волокна в сечении.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{\max|Q|}{J} \cdot \frac{S_{\max}^{(\text{отс})}}{b} \leq \tau_{\text{adm}}, \quad (17)$$

где τ_{\max} , τ_{adm} – максимальное и допускаемое касательные напряжения;
 $\max|Q|$ – максимальная по абсолютному значению перерезывающая сила;
 $S_{\max}^{(\text{отс})}$ – максимальный статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной линии; b – ширина сечения на уровне нейтральной линии.

С помощью условия прочности по допускаемым нормальным напряжениям (16) определим допускаемые значения внешних сил $q_{1,\text{adm}}$, $q_{2,\text{adm}}$, $q_{3,\text{adm}}$ (кН/м); $F_{1,\text{adm}}$, $F_{2,\text{adm}}$ (кН); $M_{1,\text{adm}}$, $M_{2,\text{adm}}$ (кНм) с последующей проверкой выполнения условия прочности по касательным напряжениям (17).

Для решения поставленной задачи необходимо найти максимальные значения изгибающих моментов $\max|M|$ и перерезывающих (поперечных) сил $\max|Q|$, а также их местоположение по длине балки. С этой целью выполним анализ распределения внутренних усилий по длине балки и построим соответствующие графики – эпюры M и Q .

При определении опорных реакций балок и внутренних усилий в ее сечениях используется принцип отвердевания, поэтому изгибная жесткость сечений и ее изменение по длине балки не влияют на результаты вычислений.

Методика определения поперечных сил Q и изгибающих моментов M для расчетной схемы балки, представленной на рис.6 с принятыми выше исходными данными, приведена в Задании № 3 “Проектировочный расчет балки по допускаемым напряжениям” (п.3 “*Определение поперечных сил и изгибающих моментов балки*”).

Опорные реакции балки: $V_B = 8,278qa$, $V_C = 13,722qa$.

Аналитические выражения для Q и M по участкам балки:

– первый участок ($0 \leq x < a_1$)

$$Q_I = -q(a+x); \quad M_I = -q(a+0,5x)x; \quad (18)$$

– второй участок ($a_1 \leq x < a_2$)

$$Q_{II} = 6,278 qa; \quad M_{II} = 6,278 qax - 7,778 qa^2. \quad (19)$$

При определении внутренних усилий в сечениях балки на третьем и четвертом участках рассматривается правая часть балки, поэтому используется система координат с началом в точке С и осью x_1 , направленной справа налево.

Третий участок: $(a_4 - a_3) \leq x_1 < (a_4 - a_2)$

$$Q_{III} = 2qx_1 - 7,722qa; \quad M_{III} = -q(x_1 - 4a)^2 - 0,278 qax_1 + 12qa^2. \quad (20)$$

Четвёртый участок: $0 \leq x_1 < (a_4 - a_3)$

$$Q_{IV} = 3qx_1 - 13,722qa; \quad M_{IV} = -1,5qx_1^2 + 13,722qax_1 - 20qa^2. \quad (21)$$

В формулах (18÷21): $a_1 = l_1$, $a_2 = l_1 + l_2$, $a_3 = l_1 + l_2 + l_3$, $a_4 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$.

По выражениям (18),..., (21) слева и справа от границ участков вычисляем значения Q , результаты сводим в табл.4.

Таблица 4

Ординаты эпюры поперечных сил Q

x	0	$a_1 - 0$	$a_1 + 0$	$a_2 - 0$	$a_2 + 0$	$a_3 - 0$	$a_3 + 0$	a_4
Q	-qa	-2qa	6,278qa	6,278qa	6,278qa	0,278qa	-1,722qa	-13,722qa

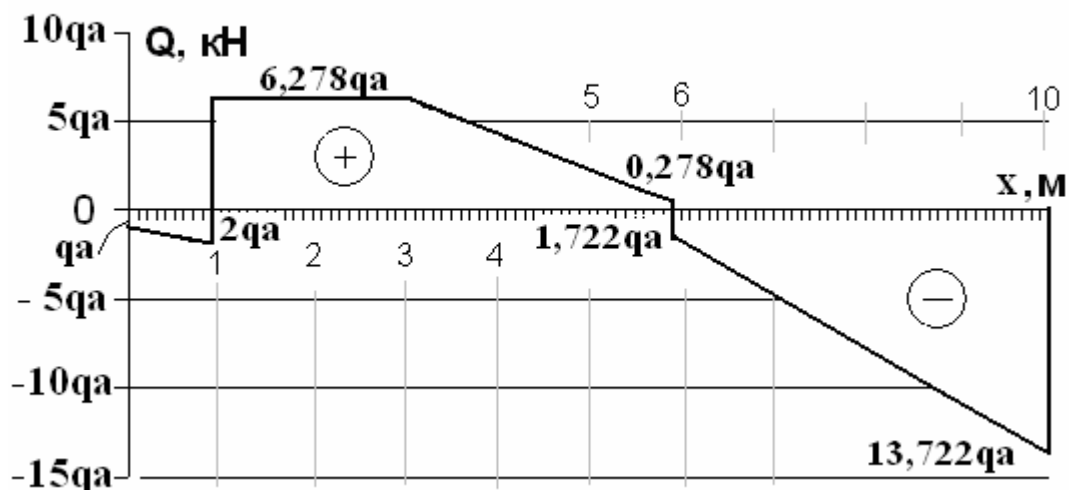


Рис.8. Поперечные силы в сечениях балки.

Выбираем масштаб сил: в 1 см – $2qa$, кН, и строим график (эпюру Q) по точкам – рис.8.

В сечениях балки с координатами $x = 0, a_1, a_3, a_4$ в исходной расчетной схеме приложены внешние сосредоточенные силы F_1, V_B, F_2, V_C . На эпюре Q в указанных сечениях имеются «скачки» поперечной силы $\Delta Q = Q|_{x+\theta} - Q|_{x-\theta}$, равные сосредоточенным силам $F_1 = qa, V_B = 8,278qa, F_2 = 2qa, V_C = 13,722qa$, взятым с соответствующими знаками.

По выражениям (18),..., (21) слева и справа от границ участков, а также посередине участков, на которых функция изгибающих моментов $M(x)$ является нелинейной, вычисляем значения изгибающего момента $M(x)$, результаты сводим в табл.5.

Выбираем масштаб моментов: в 1 см – $5qa^2$, кН·м, и строим график (эпюру M) по точкам – рис.9.

Таблица 5

Ординаты эпюры изгибающих моментов M

x	0	$0,5a_1$	$a_1 - \theta$	$a_1 + \theta$	$a_2 - \theta$	$a_2 + \theta$	$a_3 - \theta$	$a_3 + \theta$	a_4
M	0	$-0,625qa^2$	$-1,5qa^2$	$-1,5qa^2$	$11,056qa^2$	$1,056qa^2$	$10,888qa^2$	$10,888qa^2$	$-20qa^2$

В сечениях балки с координатами $x = a_2, a_4$ приложены пары сил с моментами M_1, M_2 . На эпюре M в этих сечениях имеются «скачки» изгибающего момента $\Delta M = M|_{x+\theta} - M|_{x-\theta}$, равные сосредоточенным моментам $M_1 = -10qa^2, M_2 = 20qa^2$ с учетом их знаков.

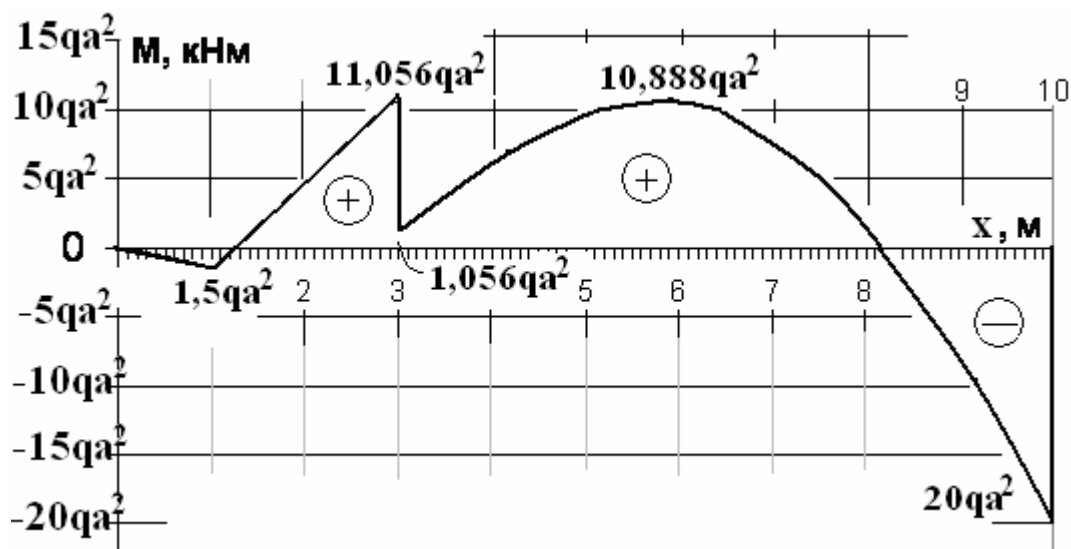


Рис.9. Изгибающие моменты в сечениях балки.

6. Геометрические характеристики сечений составных балок.

Вычислим геометрические характеристики трехъярусной составной балки из бревен на колодках, сечение которой представлено на рис.7.

Круговое сечение имеет следующие геометрические характеристики:

– площадь $A = \pi R^2$;

– моменты инерции: полярный $J_p = 0,5\pi R^4$, осевые $J_y = J_z = 0,25\pi R^4$.

Для определения геометрических характеристик частей сечений круглых пиломатериалов используем формулы из Приложения 1, а также известные теоремы и формулы сопротивления материалов.

Согласно теореме о параллельном переносе осей координат главные центральные моменты инерции J_y вычисляются по формуле:

$$J_y = \sum_i (J_{y_i} + a_i^2 A_i), \quad (22)$$

где J_{y_i} – момент инерции каждой отдельной части составного сечения относительно собственной центральной оси y_i , параллельной главной центральной оси всего сечения y ; a_i – расстояние между упомянутыми осями y_i и y ; A_i – площадь отдельной части составного сечения.

Координату z_c центра площади составного сечения определяют по формуле:

$$z_c = \frac{\sum_i S_{y_i}}{A}, \quad (23)$$

где S_{y_i} – статические моменты площадей отдельных частей составного сечения относительно какой-либо оси y_0 , параллельной главной центральной оси всего сечения y ; A – площадь всего составного сечения.

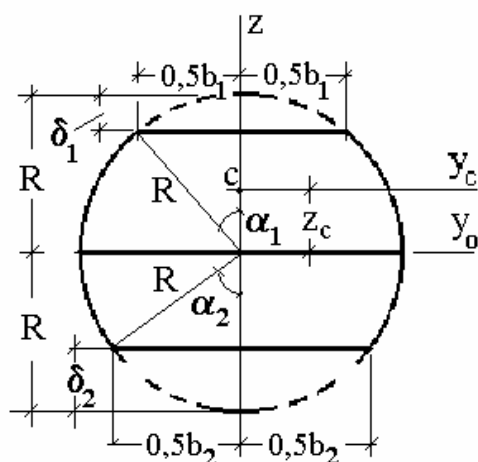
Ось симметрии сечения обязательно является его главной осью.

Стежку бревен под колодки и отверстия под стяжные болты учтем с помощью коэффициента сплошности $k_{cont} = 0,8$.

Геометрические характеристики сечений верхнего яруса составной балки на рис.7 будем отмечать индексом “up”, среднего – “m”, нижнего – “dn”. При выполнении вычислений для каждого яруса индексами “1” и “2” будем отмечать величины, относящиеся к верхнему и нижнему отсеченным сегментам.

6.1. Геометрические характеристики сечений каждого яруса составной балки.

Верхний ярус



По формулам Приложения 1 к Практикуму для круга без двух сегментов при $b_1 = 12$ см и $\delta_2 = 4$ см находим:

$$\alpha_1 = \arcsin(b_1/2R) = \arcsin(12/22) = 0,577 \text{ рад};$$

$$\delta_1 = R(1 - \cos\alpha_1) = 11(1 - \cos(0,577)) = 1,8 \text{ см};$$

$$\alpha_2 = \arccos(1 - \delta_2/R) = \arccos(1 - 4/11) = 0,881 \text{ рад};$$

$$b_2 = 2R \sin\alpha_2 = 2 \cdot \sin(0,88) = 17 \text{ см}.$$

Рис.10. Круг без двух сегментов.

Площадь сечения одного бревна верхнего яруса (рис.7):

$$A_{\text{up}} = R^2(\pi - \alpha_1 - \alpha_2 + 0,5(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)) = 11^2(3,1416 - 0,577 - 0,88 + \\ + 0,5(\sin(1,154) + \sin(1,76))) = 121 \cdot 0,736 = 318,435 \text{ см}^2.$$

Расстояние $z_{c,\text{up}}$ между осями y_0 и y_c :

$$z_{c,\text{up}} = 4R|\sin^3 \alpha_1 - \sin^3 \alpha_2|/[3(2\pi - 2(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)] = \\ 4 \cdot 11(\sin^3(0,577) - \sin^3(0,881))/[3(6,2832 - 2(0,577 + 0,881) + \\ \sin(1,154) + \sin(1,76))] = 44 \cdot (0,162 - 0,458)/[3(3,3992 + 0,9143 + 0,9822)] = \\ = 13,24/15,887 = 0,83 \text{ см}.$$

Координаты $z_{c1,\text{up}}$ и $z_{c2,\text{up}}$ центров площади отсеченных верхнего и нижнего сегментов определяем по формулам Приложения 1 для сегмента круга:

$$z_{c1,\text{up}} = 4R\sin^3 \alpha_1/[3(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1)] - R\cos \alpha_1 = 4 \cdot 11\sin^3(0,577)/[3(2 \cdot 0,577 - \\ \sin(2 \cdot 0,577))] - 11\cos(0,577) = 0,717 \text{ см};$$

$$z_{c2,\text{up}} = 4R\sin^3 \alpha_2/[3(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2)] - R\cos \alpha_2 = 4 \cdot 11\sin^3(0,881)/[3(2 \cdot 0,881 - \\ - \sin(2 \cdot 0,881))] - 11\cos(0,881) = 1,628 \text{ см}.$$

Площади отсеченных верхнего и нижнего сегментов:

$$A_{1,\text{up}} = 0,5R^2(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1) = 0,5(11)^2(2 \cdot 0,577 - \sin(2 \cdot 0,577)) = 14,491 \text{ см}^2;$$

$$A_{2,\text{up}} = 0,5R^2(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2) = 0,5(11)^2(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881)) = 47,207 \text{ см}^2.$$

Главные центральные осевые моменты инерции $J_{yc,1}$ и $J_{yc,2}$ отсеченных верхнего и нижнего сегментов определяем по формулам Приложения 1 для сегмента круга:

$$J_{yc,1} = R^4 [2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1 + 4\sin^3 \alpha_1 \cos \alpha_1 - 64\sin^6 \alpha_1 / (9(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1))] / 8 = \\ = 11^4 [2 \cdot 0,577 - \sin(2 \cdot 0,577) + 4\sin^3(0,577)\cos(0,577) - 64\sin^6(0,577) \\ / (9(2 \cdot 0,577 - \sin(2 \cdot 0,577)))] / 8 = 3,161 \text{ см}^4;$$

$$J_{yc,2} = R^4 [2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2 + 4\sin^3 \alpha_2 \cos \alpha_2 - 64\sin^6 \alpha_2 / (9(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2))] / 8 =$$

$$= 11^4[2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881) + 4\sin^3(0,881)\cos(0,881) - 64\sin^6(0,881) / (9(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881)))] / 8 = 52,207 \text{ см}^4.$$

Главный центральный осевой момент инерции $J_{yc,up}$ одного бревна верхнего яруса определяем по формулам Приложения 1 для круга без двух сегментов:

$$J_{yc,up} = 0,25\pi R^4 + \pi R^2 z_{c,up}^2 - J_{yc,1} - A_1(R\cos\alpha_1 - z_{c,up} + z_{c,1})^2 - J_{yc,2} - A_2(R\cos\alpha_2 + z_{c,up} + z_{c,2})^2 = 0,25 \cdot 3,1432 \cdot 11^4 + 3,1432 \cdot 11^2 \cdot 0,827^2 - 3,161 - 14,491(11\cos(0,577) - 0,827 + 0,717)^2 - 52,207 - 47,207(11\cos(0,881) + 0,827 + 1,628)^2 = 6,281 \cdot 10^3 \text{ см}^4.$$

Средний ярус

Величины, относящиеся к верхнему и нижнему отсеченным сегментам, для среднего яруса равны между собой, поэтому объем вычислений несколько сокращается.

$$\delta_1 = \delta_2 = 4 \text{ см}; \alpha_1 = \alpha_2 = \arccos(1 - \delta_2/R) = \arccos(1 - 4/11) = 0,881 \text{ рад};$$

$$b_2 = 2R\sin\alpha_2 = 22\sin(0,88) = 17 \text{ см}.$$

Площадь сечения одного бревна среднего яруса:

$$A_m = R^2(\pi - 2\alpha_2 + \sin 2\alpha_2) = 11^2(3,1416 - 2 \cdot 0,881 + \sin(1,762)) = 285,719 \text{ см}^2.$$

Расстояние $z_{c,m}$ между осями y_0 и y_c : $z_{c,m} = 0 \text{ см}.$

Координаты $z_{c,1}$ и $z_{c,2}$ центров площади отсеченных верхнего и нижнего сегментов определяем по формулам Приложения 1 для сегмента круга:

$$z_{c,1} = z_{c,2} = 4R\sin^3\alpha_2/[3(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2)] - R\cos\alpha_2 = 4 \cdot 11\sin^3(0,881)/[3(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881))] - 11\cos(0,881) = 1,628 \text{ см}.$$

Площади отсеченных верхнего и нижнего сегментов:

$$A_1 = A_2 = 0,5R^2(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2) = 0,5(11)^2(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881)) = 47,207 \text{ см}^2.$$

Главные центральные осевые моменты инерции $J_{yc,1}$ и $J_{yc,2}$ отсеченных верхнего и нижнего сегментов определяем по формулам Приложения 1 для сегмента круга:

$$J_{yc,1} = J_{yc,2} = R^4 [2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2 + 4\sin^3 \alpha_2 \cos \alpha_2 - 64\sin^6 \alpha_2 / (9(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2))] / 8 =$$

$$= 11^4 [2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881) + 4\sin^3(0,881) \cdot \cos(0,881) - 64\sin^6(0,881) / (9(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881)))] / 8 = 52,207 \text{ см}^4 .$$

Главный центральный осевой момент инерции $J_{yc,m}$ одного бревна среднего яруса определяем по формулам Приложения 1 для круга без двух сегментов:

$$J_{yc,m} = 0,25\pi R^4 - 2J_{yc,1} - 2A_1(R\cos\alpha_1 + z_{c,1})^2 = 0,25 \cdot 3,1432 \cdot 11^4 - 2 \cdot 52,207 -$$

$$- 2 \cdot 4,292 \cdot (11\cos(0,881) + 1,628)^2 = 4,366 \cdot 10^3 \text{ см}^4 .$$

Нижний ярус

Величины, относящиеся к верхнему отсеченному сегменту, для одного бревна нижнего яруса находим по формулам Приложения 1 для сегмента круга при $\delta_1 = 4$ см:

$$\alpha_1 = \arccos(1 - \delta_1/R) = \arccos(1 - 4/11) = 0,881 \text{ рад}; \mathbf{b}_2 = 2R\sin\alpha_1 =$$

$$22\sin(0,881) = 17 \text{ см}.$$

$$z_{c1,dn} = 4R\sin^3 \alpha_2 / [3(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1)] - R\cos\alpha_1 = 4 \cdot 11 \sin^3(0,881) / [3(2 \cdot 0,881 -$$

$$- \sin 2(0,881))] - 11\cos(0,881) = 1,628 \text{ см}.$$

$$A_{1,dn} = 0,5R^2(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1) = 0,5(11)^2(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881)) = 47,207 \text{ см}^2 .$$

$$J_{yc,1} = R^4 [2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1 + 4\sin^3 \alpha_1 \cos \alpha_1 - 64\sin^6 \alpha_1 / (9(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1))] / 8 =$$

$$= 11^4 [2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881) + 4\sin^3(0,881) \cdot \cos(0,881) - 64\sin^6(0,881) / (9(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881)))] / 8 = 52,207 \text{ см}^4 .$$

Расстояние $z_{c,dn}$ между осями y_0 и y_c определяем по формулам Приложения 1 для круга без двух сегментов при $\alpha_2 = 0$:

$$z_{c,dn} = 4R\sin^3 \alpha_1 / [3(2\pi - 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_1)] = 4 \cdot 11 \sin^3(0,881) / [3(6,2832 -$$

$$- 2 \cdot 0,881 + \sin(1,762)] = 1,223 \text{ см.}$$

Площадь сечения одного бревна нижнего яруса:

$$A_{\text{dn}} = \pi R^2 - A_{1,\text{dn}} = 3,1432 \cdot 11^2 - 47,207 = 333,12 \text{ см}^2 .$$

Главный центральный осевой момент инерции $J_{\text{yc, dn}}$ одного бревна нижнего яруса определяем по формулам Приложения 1 для круга без двух сегментов при $\alpha_2 = 0$, $A_2 = 0$ и $J_{\text{yc, 2}} = 0$:

$$\begin{aligned} J_{\text{yc, dn}} &= 0,25\pi R^4 + \pi R^2 z_{\text{c, dn}}^2 - J_{\text{yc, 1}} - A_1 (R \cos \alpha_1 - z_{\text{c, dn}} + z_{\text{c, 1}})^2 = 0,25 \cdot 3,1432 \cdot 11^4 \\ &+ 3,1432 \cdot 11^2 \cdot 1,223^2 - 52,207 - 4,292 (11 \cos(0,881) - 1,223 + 1,628)^2 = \\ &= 1,178 \cdot 10^4 \text{ см}^4 . \end{aligned}$$

6.2. Геометрические характеристики всего сечения составной балки по рис.7

Положение центра площади сечения определяется по формуле (23).

Вычисляем статический момент S_{y_0} поперечного сечения по рис.7 относительно оси y_0 , проведенной через центр площади бревен среднего яруса, при $h = 10$ см, $\delta_1 = 1,78$ см, $\delta_2 = 4$ см, $z_{\text{c, up}} = 0,827$ см, $z_{\text{c, m}} = 0$, $z_{\text{c, dn}} = 1,223$ см:

$$\begin{aligned} 0,5 S_{y_0} &= \pi R^2 [2(R - \delta_2) + h] - A_{1,\text{up}} (2(R - \delta_2) + h + R - \delta_1 + z_{\text{c1, up}}) - A_{2,\text{up}} (R - \delta_2 + \\ &h - z_{\text{c2, up}}) - \pi R^2 [2(R - \delta_2) + h] + A_{1,\text{dn}} (R - \delta_2 + h - z_{\text{c1, dn}}) = -A_{1,\text{up}} (2(R - \delta_2) + h + R \\ &- \delta_1 + z_{\text{c1, up}}) - A_{2,\text{up}} (R - \delta_2 + h - z_{\text{c2, up}}) + A_{1,\text{dn}} (R - \delta_2 + h - z_{\text{c1, dn}}) = -14,491 \cdot (2(11 - \\ &- 4) + 10 + 11 - 1,78 + 0,717) - 47,207 \cdot (11 - 4 + 10 - 1,628) + 47,207 \cdot (11 - \\ &4 + 10 - 1,628) = -575,561 \text{ см}^3 ; \\ S_{y_0} &= -2 \cdot 575,561 = -1151,122 \text{ см}^3 . \end{aligned}$$

Площадь всего составного сечения:

$$0,5A = A_{\text{up}} + A_{\text{m}} + A_{\text{dn}} = 318,435 + 285,719 + 332,926 = 936,154 \text{ см}^2 ;$$

$$A = 2 \cdot 936,154 = 1872,308 \text{ см}^2 .$$

Координата z_{c} центра площади сечения:

$$z_c = S_{y0}/A = -575,561/1872,308 = -0,614 \text{ см.}$$

Максимальные статические моменты верхней и нижней части сечения относительно главной центральной оси u_c всего составного сечения должны быть равны между собой, поэтому найдем статический момент S_{yc} нижней части сечения относительно оси u_c . Предварительно вычислим статический момент $S_{yc,m}$ нижней части сечения бревна среднего яруса относительно оси u_c как разность статических моментов полукруга и сегмента, которыми можно представить эту часть сечения:

– координаты $z_{c1,m}$ и $z_{c2,m}$ центров площади:

$$\delta_3 = R - |z_c| = 11 - 0,614 = 10,386 \text{ см, } \delta_2 = 4 \text{ см, } \alpha_3 = \arccos(1 - \delta_3/R) =$$

$$\arccos(1 - 10,386/11) = 1,515 \text{ рад; } \alpha_2 = \arccos(1 - \delta_2/R) = \arccos(1 - 4/11) =$$

$$= 0,881 \text{ рад;}$$

$$z_{c1,m} = 4R \sin^3 \alpha_3 / [3(2\alpha_3 - \sin 2\alpha_3)] - R \cos \alpha_3 = 4 \cdot 11 \sin^3(1,515) / [3(2 \cdot 1,515 -$$

$$- \sin(2 \cdot 1,515))] - 11 \cos(1,515) = 4,388 \text{ см;}$$

$$z_{c2,m} = 4R \sin^3 \alpha_2 / [3(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2)] - R \cos \alpha_2 = 4 \cdot 11 \sin^3(0,881) / [3(2 \cdot 0,881 -$$

$$- \sin(2 \cdot 0,881))] - 11 \cos(0,881) = 1,628 \text{ см.}$$

– площади сегментов:

$$A_{1,m} = 0,5R^2(2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1) = 0,5(11)^2(2 \cdot 1,515 - \sin(2 \cdot 1,515)) = 176,561 \text{ см}^2;$$

$$A_{2,m} = 0,5R^2(2\alpha_2 - \sin 2\alpha_2) = 0,5(11)^2(2 \cdot 0,881 - \sin(2 \cdot 0,881)) = 47,207 \text{ см}^2 .$$

– статический момент $S_{yc,m}$:

$$S_{yc,m} = A_{1,m} \cdot z_{c1,m} - A_{2,m}(z_{c2,m} + R \cos \alpha_2 - |z_c|) = 176,561 \cdot 4,388 -$$

$$47,207 \cdot (1,628 + 11 \cos(0,881) - 0,614) = 774,742 \text{ см}^3;$$

– максимальный статический момент S_{yc} всего составного сечения:

$$0,5S_{yc} = A_{dn}(2(R - \delta_2) + h + z_{c,dn} - |z_c|) + S_{yc,m} = 332,926 \cdot (2(11 - 4) + 10 +$$

$$+ 1,223 - 0,614) + 774,742 = 11,63 \cdot 10^3 \text{ см}^3;$$

$$S_{yc} = 2 \cdot 11,63 \cdot 10^3 = 23,26 \cdot 10^3 \text{ см}^3 .$$

Главный центральный осевой момент инерции:

$$0,5J_{yc} = J_{yc,up} + A_{up}(2(R - \delta_2) + h + z_{c,up} + |z_c|)^2 + J_{yc,m} + A_m |z_c|^2 + J_{yc,dn} + \\ + A_{dn}(2(R - \delta_2) + h + z_{c,dn} - |z_c|)^2 = 0,7305 \cdot 10^6 \text{ см}^4 ; \\ J_{yc} = 1,461 \cdot 10^6 \text{ см}^4 .$$

Влияние отверстий под стяжные болты в составной балке учтем, умножив величины площади, моментов инерции и максимальных статических моментов всего сечения на коэффициент сплошности $k_{cont} = 0,8$; полученные значения примем в качестве расчетных величин:

$$A = 0,8 \cdot 1872 = 1498 \text{ см}^2 ; k_{cont} \cdot J_{yc} = 0,8 \cdot 1,461 \cdot 10^6 = 1,169 \cdot 10^6 \text{ см}^4 ;$$

$$S_{yc} = 0,8 \cdot 23,26 \cdot 10^3 = 18,608 \cdot 10^3 \text{ см}^3 .$$

7. Определение несущей способности балки.

Несущую способность балки в упругой стадии деформирования определим, используя условие прочности деревянных балок при изгибе в главной плоскости **xz**

$$\sigma_{x,b} = \frac{M_d}{W_{nt}} \leq R_{db} , \quad (24)$$

где M_d – расчетное значение изгибающего момента: $M_d = \max|M|$;

R_{db} – расчетное сопротивление древесины при изгибе; принимаем по табл.2;

W_{nt} – момент сопротивления ослабленного сечения, принимаемый для составных балок с учетом коэффициента сплошности $k_{cont} = 0,8$:

$$W_{nt} = k_{cont} \cdot J_{yc} / z_{max} ; \quad (25)$$

J_{yc} – главный центральный момент инерции сечения на рис.7 относительно оси y_c ; z_{max} – расстояние от оси y_c до наиболее удаленного волокна в сечении (см. формулу (16)).

Расстояние z_{max} от оси y_c до наиболее удаленного волокна найдем как наибольшее из двух расстояний: z_1 – расстояния от оси y_c до верхнего крайнего волокна и z_2 – расстояния от оси y_c до нижнего крайнего волокна (см. рис.7);

$$z_1 = 2R - \delta_1 - \delta_2 + h + R - \delta_2 + z_c = 2 \cdot 22 - 1,8 - 4 + 10 + 22 - 4 + 0,614 =$$

$$z_2 = 2R - \delta_2 + h + R - \delta_2 - z_c = 2 \cdot 22 - 4 + 10 + 22 - 4 - 0,614 = 67,386 \text{ см.}$$

$$z_{\max} \max(z_1, z_2) = 67,386 \text{ см.}$$

Вычисляем момент сопротивления ослабленного сечения W_{nt} :

$$W_{nt} = k_{\text{cont}} \cdot J_{yc} / z_{\max} = 0,8 \cdot 1,461 \cdot 10^6 / 67,386 = 1,735 \cdot 10^4 \text{ см}^3 = 1,735 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

Для окантованных бревен сосны с влажностью 26% из табл.2 выбираем расчетное сопротивление древесины при изгибе R_{db} равным 13,7МПа: $R_{db} = 13,7 \text{ МПа}$.

По условию прочности (25)

$$M_d \leq R_{db} \cdot k_{\text{cont}} \cdot J_{yc} / z_{\max} = 13,7 \cdot 10^6 \cdot 1,735 \cdot 10^{-2} = 23,77 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Так как $M_d = \max|M| = 20qa^2$ (см рис.9), то для обеспечения прочности балки по нормальным напряжениям необходимо, чтобы

$$20qa^2 \leq 23,77 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м.} \quad (26)$$

Из неравенства (26) при $a = 1 \text{ м}$ получаем

$$q \leq 1,188 \cdot 10^4 \text{ Н/м} = 11,88 \text{ кН/м.}$$

Проверяем выполнение условия прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_d S_{br}}{I_{br} b} \leq R_{dab}, \quad (27)$$

где Q_d – расчетное значение поперечной силы: $Q_d = \max|Q|$;

R_{dab} – расчетное сопротивление древесины при скалывании вдоль волокон при изгибе; принимаем по табл.2: $R_{dab} = 2,15 \text{ МПа}$;

S_{br} – статический момент брутто части сечения относительно нейтральной оси; $S_{br} = S_{yc} = 18,608 \cdot 10^3 \text{ см}^3 = 1,861 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$; I_{br} – момент инерции сечения брутто; $I_{br} = J_{yc} = 1,461 \cdot 10^6 \text{ см}^4 = 1,461 \cdot 10^{-2} \text{ м}^4$;

b – ширина сечения на уровне нейтральной оси: $b = 2 \cdot 22 = 44 \text{ см}$ (см. рис.7).

Расчетное значение поперечной силы $Q_d = \max|Q|$ определяем по эпюре на рис.8: $Q_d = 13,722qa = 13,722 \cdot 11,88 = 163 \text{ кН}$. После подстановки в левую часть числовых значений величин находим:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_d S_{br}}{I_{br} b} = \frac{163 \cdot 10^3 \cdot 1,861 \cdot 10^{-2}}{1,461 \cdot 10^{-2} \cdot 44 \cdot 10^{-2}} = 4,719 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,472 \text{ МПа.}$$

Сравнивая полученное значение касательного напряжения τ_{xz} с расчетным сопротивлением древесины при скалывании вдоль волокон при изгибе $R_{dab} = 2,15 \text{ МПа}$, заключаем, что условие прочности балки по касательным напряжениям выполнено.

8. *Определение расстояния между колодками в составном сечении.*

Используя формулы (6),..., (10), найдем необходимые расстояния между прямыми колодками в составном сечении балки по рис.7, обеспечивающими прочность соединений бревен.

Определяем допускаемую сдвигающую силу $T_{adm}^{(1)}$ по условию прочности на скалывание по материалу колодки (формула (7)).

Обозначим расчетное сопротивление соснового бревна при скалывании вдоль волокон при изгибе $R_{dab}^{(0)} = 2,15 \text{ МПа}$. Из табл.3 для дубовой колодки выбираем коэффициент перехода $k_2 = 1,3$. Коэффициент условий работы колодки $k_1 = 0,8$. Расчетное сопротивление дубовой колодки при скалывании вдоль волокон при изгибе $R_{dab}^{(1)}$ получает значение

$$R_{dab}^{(1)} = 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot R_{dab}^{(0)} = 2 \cdot 0,8 \cdot 1,3 \cdot 2,15 = 4,472 \text{ МПа.}$$

(Сомножитель 2 учитывает две плоскости скалывания колодки).

Принимаем длину колодки **a** равной 0,4м; ширину колодки **b** равной 0,2м. Тогда допускаемая сдвигающая сила $T_{adm}^{(1)}$ по условию прочности на скалывание по материалу колодки принимает значение

$$T_{adm}^{(1)} = ab R_{dab}^{(1)} = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 4,472 \cdot 10^6 = 3,578 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

Расчетные сопротивления бревна при смятии вдоль волокон при изгибе $R_{dqs}^{(0)} = 11,8 \text{ МПа}$ (табл.2); дубовой колодки – $R_{dqs}^{(1)} = 1,3 \cdot 11,8 = 15,34 \text{ МПа}$. Так как $R_{dqs}^{(1)} > R_{dqs}^{(0)}$, то определяем допускаемую сдвигающую силу $T_{adm}^{(2)}$ по условию прочности на смятие по бревну (формула (8)):

$$T_{adm}^{(2)} = 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot A_{nt} \cdot R_{dqs}^{(0)} = 2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot 0,67b_2\delta_2 \cdot R_{dqs}^{(0)} = \\ = 2 \cdot 0,8 \cdot 1,3 \cdot 0,67 \cdot 0,17 \cdot 0,04 \cdot 11,8 \cdot 10^6 = 11,182 \cdot 10^4 \text{ Н.} \quad (28)$$

В формуле (28) принято: $A_{nt} = 0,67b_2\delta_2$ – площадь смятия в виде кругового сегмента; b_2, δ_2 – величины, определенные в п.6.1. *Геометрические характеристики сечений каждого яруса составной балки. Верхний ярус.*

Наименьшее значение допускаемой сдвигающей силы $\min T_{adm}$ на одну колодку получается равным $11,182 \cdot 10^4 \text{ Н}$: $\min T_{adm} = 11,182 \cdot 10^4 \text{ Н}$.

Для определения минимального расстояния между колодками c вычисляем $(c - a)$ по формуле (9), учитывая, что перерезывающая сила Q и геометрические характеристики J, S найдены для двух ветвей сечения составной балки по рис.7:

$$c - a = 2 \cdot \min T_{adm} \cdot J / QS = 2 \cdot 11,182 \cdot 10^4 \cdot 1,461 \cdot 10^{-2} / (163 \cdot 10^3 \cdot 1,861 \cdot 10^{-2}) = \\ = 1,08 \text{ м;}$$

$$c = 1,08 + a = 1,08 + 0,4 = 1,48 \text{ м.}$$

Таким образом, допускаемая нагрузка на балку определена:

$$q_{1,adm} = q = 11,88; \quad q_{2,adm} = 2q = 23,76; \quad q_{3,adm} = 3q = 35,64 \text{ кН/м;}$$

$$F_{1,adm} = qa = 11,88; \quad F_{2,adm} = 2qa = 23,76 \text{ кН;}$$

$$M_{1,adm} = 10qa^2 = 118,8; \quad M_{2,adm} = 20qa^2 = 237,6 \text{ кНм.}$$

Расчет закончен.

Задание № 5. Проектировочный расчет балок требуемой (заданной) жесткости

1. **Постановка задачи.** Балки в качестве конструктивных элементов должны отвечать требованиям не только прочности, но и жесткости. Жесткость – это свойство деформируемых тел сохранять в заданных пределах свои первоначальные размеры и форму при действии внешних сил.

Требование к жесткости конструкций, помимо других причин, вытекает из необходимости обеспечения условий для сборки объектов из деталей, а также – работы технологического оборудования. Например, в зданиях и сооружениях дверные и оконные проемы должны сохранять проектные форму и размеры для того, чтобы можно было установить дверные и оконные блоки, изготовленные заводским способом; в работающих машинах деформирование деталей не должно вызывать повреждений.

В нормах по расчету и проектированию строительных конструкций и деталей машин требования к жесткости обычно формулируют в виде ограничений на максимальные прогибы v_{\max} и углы поворотов поперечных сечений θ_{\max} элементов:

$$|v|_{\max} \leq v_{\text{adm}}, \quad |\theta|_{\max} \leq \theta_{\text{adm}}, \quad (1)$$

где v_{adm} , θ_{adm} – допускаемые значения прогибов и углов поворота поперечных сечений.

Допускаемые значения прогибов v_{adm} задают как некоторые доли пролетов l балок

$$v_{\text{adm}} \leq l/k, \quad k - \text{число}; \quad (2)$$

допускаемые значения углов поворота поперечных сечений θ_{adm} задают в виде предельных значений углов.

Например, в строительных нормах и правилах по проектированию стальных конструкций (СНиП II-23-81) требуется обеспечить:

– для балок подкрановых путей $v_{\max} \leq l/400$;

– для балок покрытий и перекрытий $v_{\max} \leq l/150$,

где l – пролет балки (расстояние между опорами).

В машиностроительных нормах для валов общего назначения требуется обеспечить:

$$v_{\max} \leq \frac{l}{3000}, \quad \theta_{\max} \leq 0,001 \text{ рад.}$$

Для определения $|v|_{\max}$, $|\theta|_{\max}$ необходимо найти распределение прогибов и углов поворота сечений по длине балки.

В задании № 5 рассматриваются статически определимые балки со ступенчато изменяющейся по длине балки изгибной жесткостью EJ ; E – модуль продольной упругости (модуль Юнга), J – осевой момент инерции поперечных сечений.

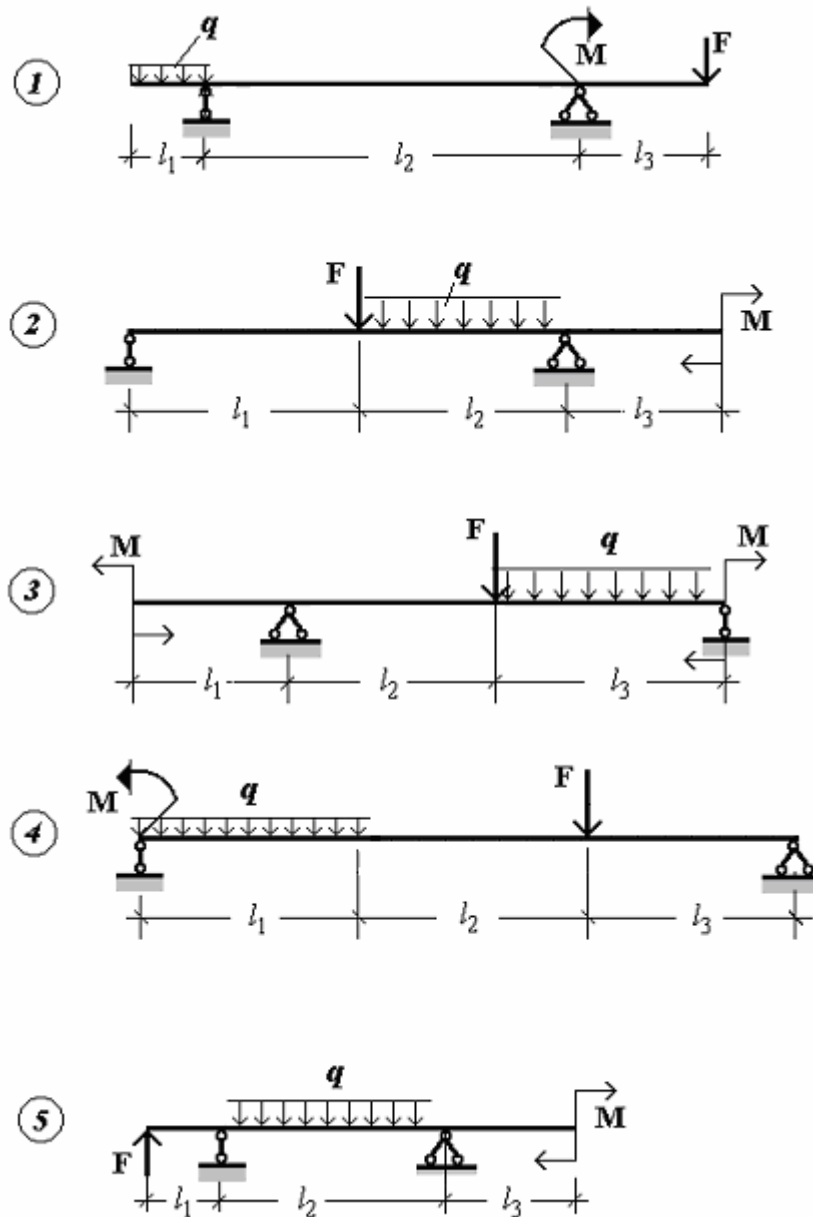


Рис.1,а. Расчетные схемы балок 1÷5.

В проектировочном расчете требуется подобрать размеры поперечного сечения балки при известных нагрузках, длине балки, заданной форме поперечного сечения и заданной жесткости. При этом балка, естественно, должна быть прочной. Для обеспечения прочности должен быть выполнен расчет на прочность, основные этапы которого рассмотрены в задании №3 “Проектировочный расчет балки по допускаемым напряжениям”.

В задании № 5 главное внимание уделяется расчету балок на жесткость. Для расчета балок на жесткость необходимо найти распределения прогибов и углов поворота сечений по длине балки, из

которых затем установить максимальные по величине значения $|v|_{\max}$, $|\theta|_{\max}$.

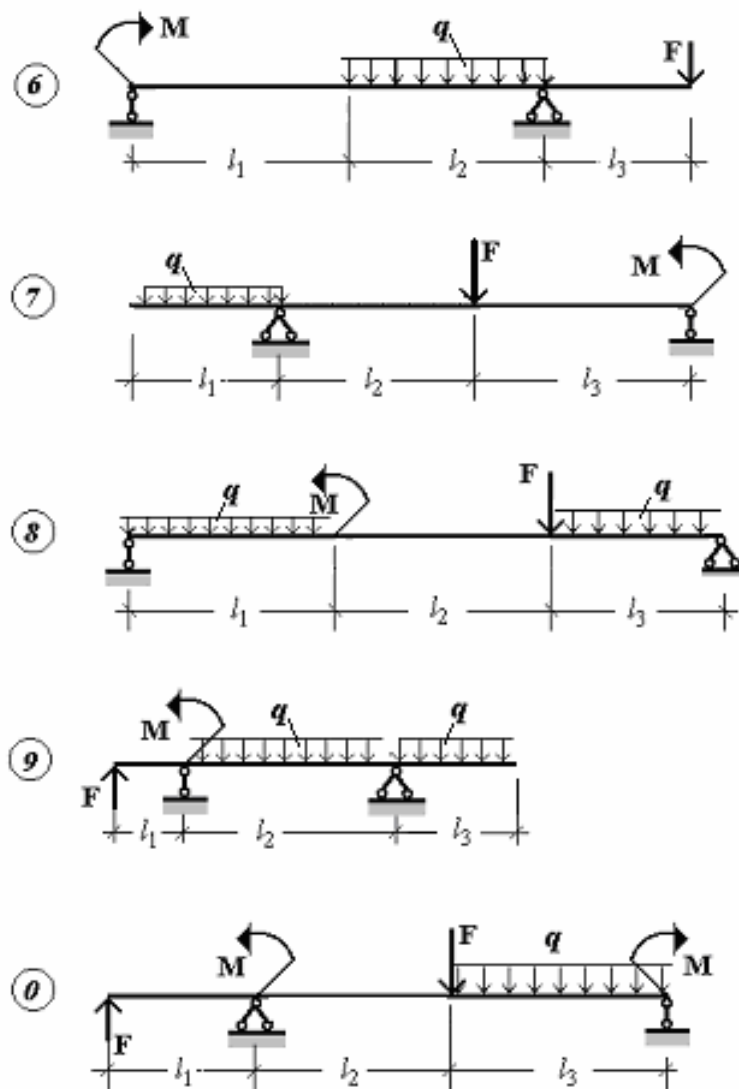


Рис.1,б. Расчетные схемы балок 6÷0.

Расчетные схемы балок приведены на рис.1,а,б; типы поперечных сечений – на рис.2,а,б; исходные данные – в табл.1.

Номер расчетной схемы и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $n_2n_1n_0$, выданному преподавателем; n_2 , n_1 , n_0 – три цифры кода студента: n_2 – первая слева цифра, n_1 – вторая слева цифра, n_0 – последняя цифра кода.

Допускаемые напряжения принимаются равными $\sigma_{adm} = 30$ МПа, $\tau_{adm} = 10$ МПа; модуль Юнга – $E = 30$ ГПа.

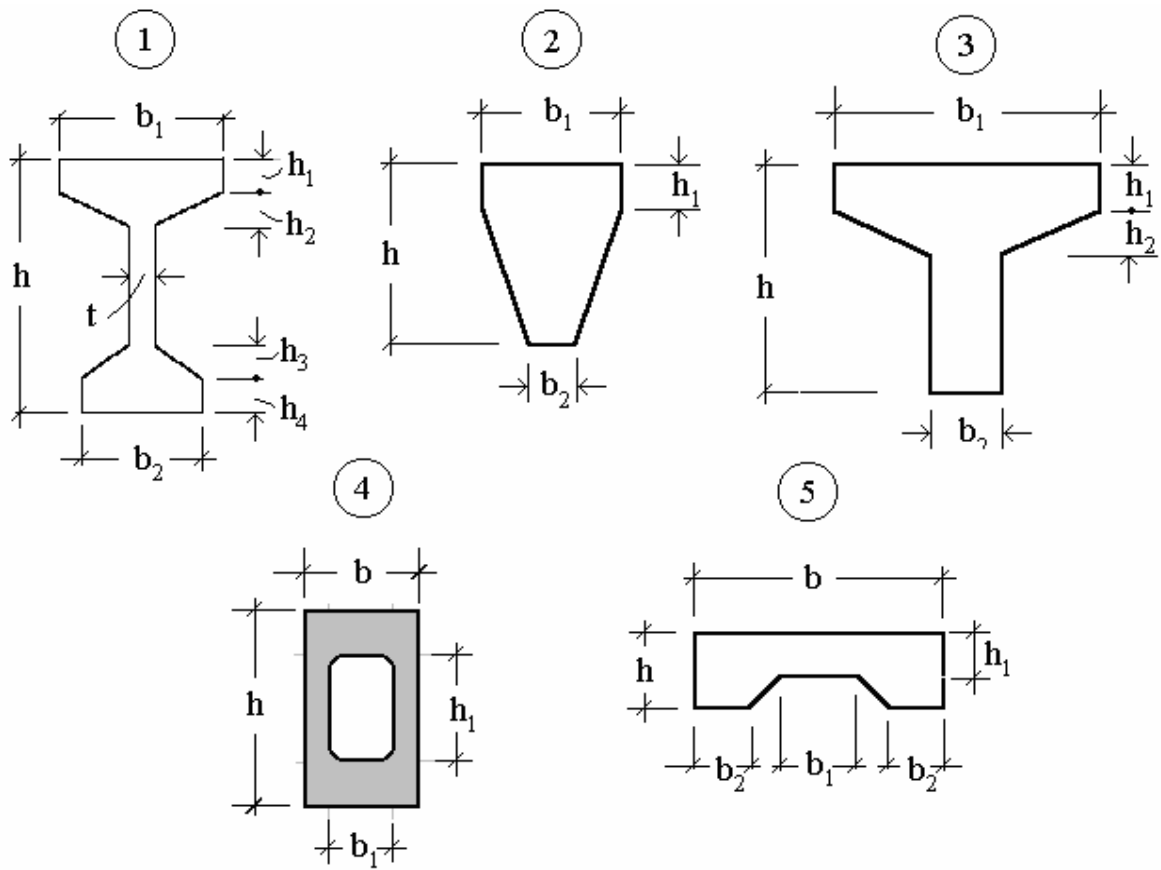


Рис.2,а. Типы поперечных сечений балок.

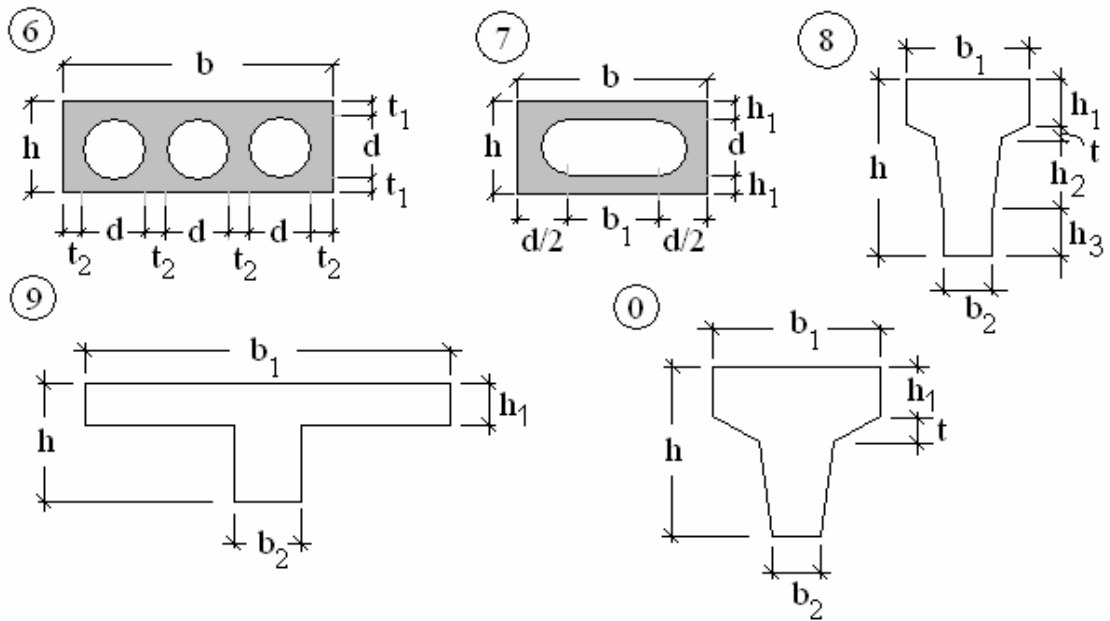


Рис.2,б. Типы поперечных сечений балок.

Таблица 1

Исходные данные к расчету балки

n ₀	№ схе- мы	Тип сече- ния	n ₁	q, кН м	F, кН	M, кНм	n ₂	длина, м		
								l ₁	l ₂	l ₃
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	3	1	10	20	12	1	4	3	2
2	2	1	2	12	25	10	2	2	1	3
3	3	2	3	15	30	16	3	3	2	1
4	4	5	4	12	40	8	4	2	3	1
5	5	7	5	15	20	16	5	4	2	3
6	6	8	6	12	25	10	6	2	2	2
7	7	6	7	10	30	12	7	3	1	2
8	8	9	8	12	20	15	8	2	4	3
9	9	0	9	15	25	12	9	1	3	4
0	0	4	0	8	40	10	0	2	3	4

Из табл.1 выбираются: номер расчетной схемы, тип поперечного сечения балки и значения величин, указанных на схемах балок.

2. **Методика расчета.** Методику определения прогибов и углов поворота сечений по длине балки изложим на примере расчетной схемы, представленной на рис.3,а, где использованы следующие обозначения: F, q, M – сосредоточенная сила, распределенная нагрузка, сосредоточенный момент (момент пары сил); EJ – изгибная жесткость поперечного сечения (E – модуль упругости, J – осевой момент инерции).

При изложении методики расчета форму поперечного сечения балки примем в виде двутавра с неравными полками, как показано на рис.4, со следующими исходными данными:

$$l_1 = a, l_2 = 2a, l_3 = 3a, l_4 = 4a; a_1 = a, a_2 = 3a, a_3 = 6a, a_4 = 10a; a = 1 \text{ м};$$

$$q_1 = q, q_2 = 2q, q_3 = 3q; q = 2 \text{ кН/м};$$

$$F_1 = qa, F_2 = 2qa; M_1 = 10qa^2, M_2 = 20qa^2;$$

$$F_1 = 2, F_2 = 4 \text{ кН}; M_1 = 20, M_2 = 40 \text{ кН/м};$$

$$\sigma_{adm} = 30 \text{ МПа}, \tau_{adm} = 10 \text{ МПа}; E = 30 \text{ ГПа};$$

$$v_{adm} = L/400, L – пролет балки, L = l_2 + l_3 + l_4 = 9\text{м}; \theta_{adm} = 0,005 \text{ рад}.$$

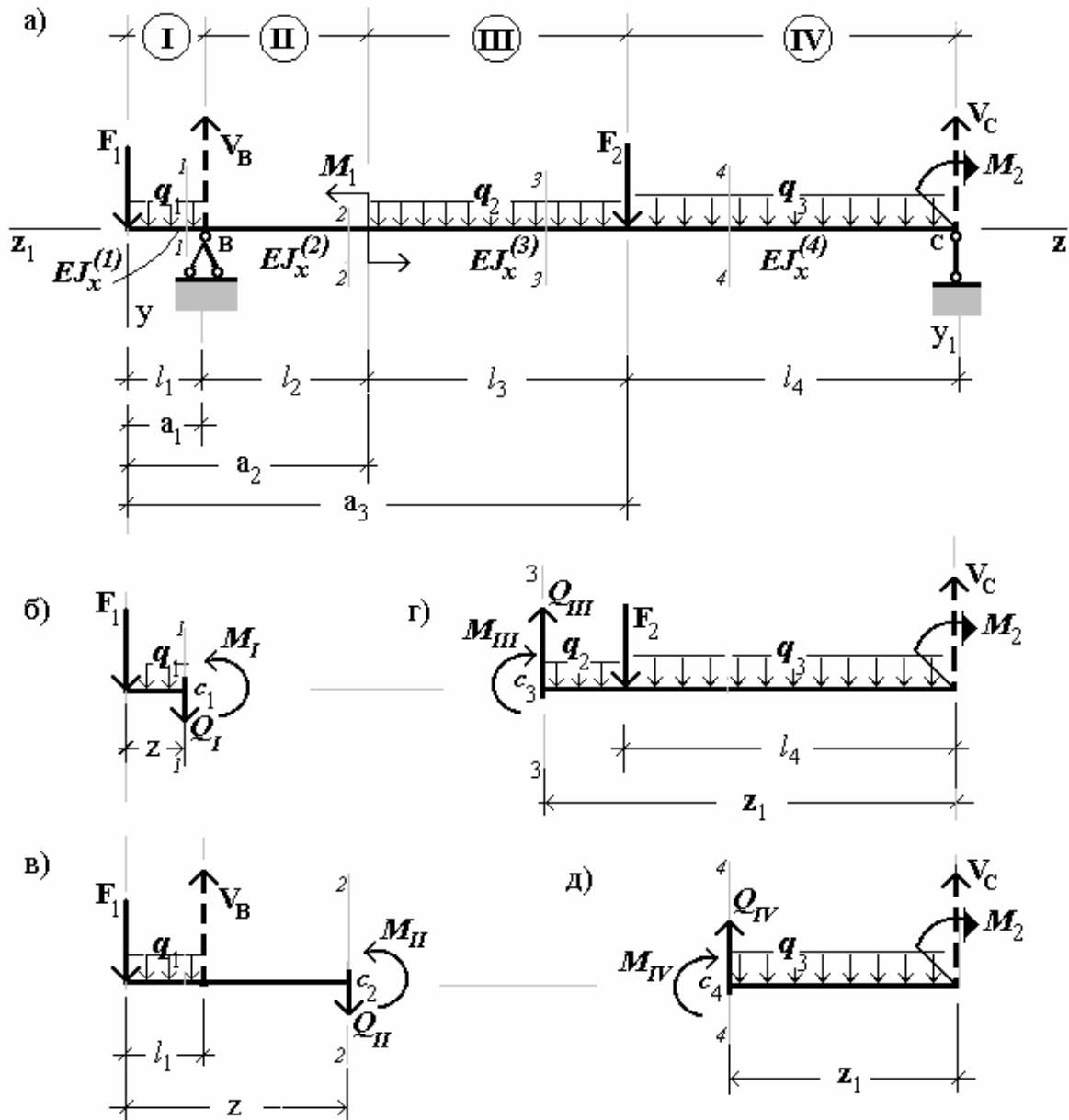


Рис.3. Расчетная схема и усилия в поперечных сечениях балки.

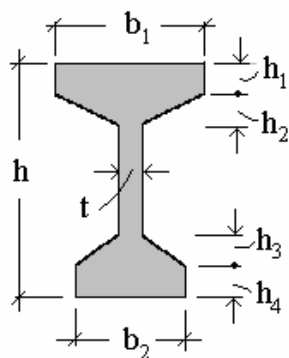


Рис.4. Поперечное сечение балки

Геометрические характеристики поперечного сечения (площадь поперечного сечения балки A , статические моменты S , моменты инерции J) можно выразить через параметр t , который определяется после вычислений необходимых геометрических характеристик поперечного сечения балки из условий прочности. Затем по заданным соотношениям между размерами поперечного сечения можно вычислить эти размеры.

Примем следующие соотношения между размерами двутавра:

$$h_1 = h_4 = t; \quad h_2 = 0,5t; \quad h_3 = 0,3t; \quad b_1 = 5t; \quad b_2 = 3t; \quad t = 0,1h, \quad (3)$$

где t – толщина стенки двутавра.

2.1. *Определение размеров поперечного сечения балки расчетом на прочность по допускаемым напряжениям.* Проектировочный расчет на прочность по допускаемым напряжениям балки, расчетная схема которой представлена на рис.3,а с поперечным сечением по рис.4, выполнен в задании №3. Далее представлены основные результаты этого расчета.

Использованы следующие условия прочности по допускаемым напряжениям:

– условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{\max|M|}{J} \cdot y_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (4)$$

где σ_{\max} , σ_{adm} – максимальное и допускаемое нормальные напряжения; $\max |M|$ – максимальный по абсолютному значению изгибающий момент; J – осевой момент инерции сечения балки; y_{\max} – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленного волокна в сечении;

– условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{\max|Q|}{J} \cdot \frac{S_{\max}^{(\text{отс})}}{b} \leq \tau_{\text{adm}}, \quad (5)$$

где τ_{\max} , τ_{adm} – максимальное и допускаемое касательные напряжения; $\max |Q|$ – максимальная по абсолютному значению перерезывающая сила; $S_{\max}^{(\text{отс})}$ – максимальный статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной линии; b – ширина сечения на уровне нейтральной линии.

Опорные реакции балки: $V_B = 8,278qa$, $V_C = 13,722qa$.

Аналитические выражения для определения поперечных сил и изгибающих моментов балки имеют вид:

– *первый участок* ($0 \leq z < a_1$); ось z направлена вправо, начало оси – на левом конце балки (рис.3,б);

$$Q_I = -q(a + z); \quad M_I = -(qaz + 0,5qz^2);$$

– *второй участок* ($a_1 \leq z < a_2$); ось z направлена вправо, начало оси – на левом конце балки (рис.3,в);

$$Q_{II} = 6,278qa; \quad M_{II} = 6,278qaz - 7,778qa^2;$$

– *третий участок* ($(a_4 - a_3) \leq z_1 < (a_4 - a_2)$); ось z_1 направлена влево, начало оси – в точке c (рис.3,г);

$$Q_{III} = 2qz_1 - 7,722qa; M_{III} = -q(z_1 - 4a)^2 - 0,278 qaz_1 + 12qa^2;$$

– четвёртый участок $0 \leq z_1 < (a_4 - a_3)$; ось z_1 направлена влево, начало оси находится в точке с (рис.3, д);

$$Q_{IV} = 3qz_1 - 13,722qa; M_{IV} = -1,5qz_1^2 + 13,722qaz_1 - 20qa^2.$$

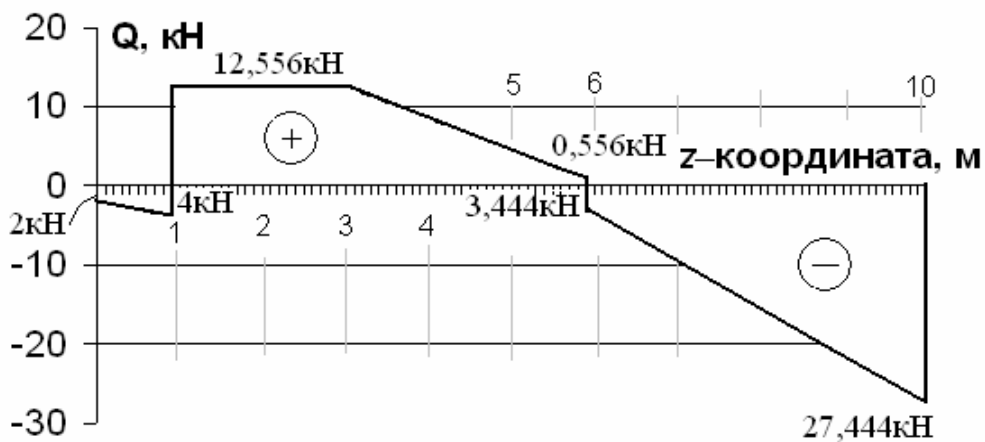


Рис.5. Перерезывающие силы в сечениях балки.

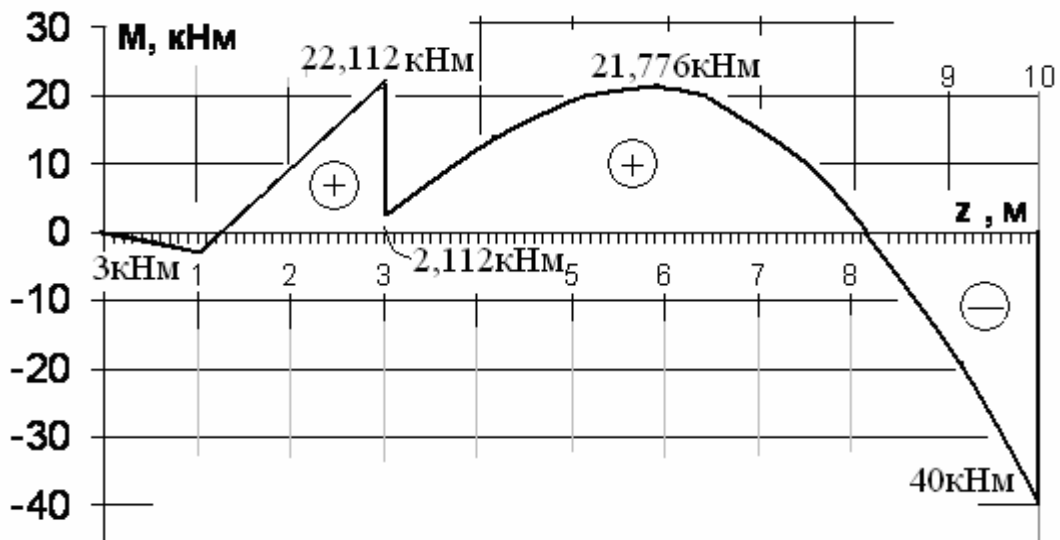


Рис.6. Изгибающие моменты в сечениях балки.

По аналитическим выражениям для перерезывающих (поперечных) сил Q и изгибающих моментов M балки слева и справа от границ участков вычислены значения Q и M , результаты представлены на рис.5 (эпюра Q) и на рис.6 (эпюра M).

В сечениях балки с координатами $z = 0, a_1, a_3, a_4$ в исходной расчетной схеме приложены внешние сосредоточенные силы F_1, V_B, F_2, V_C . На эпюре Q в указанных сечениях имеются «скачки» поперечной силы

$\Delta Q = Q|_{z+\theta} - Q|_{z-\theta}$, равные сосредоточенным силам $F_1 = qa$, $V_B = 8,278qa$, $F_2 = 2qa$, $V_c = 13,722qa$, взятым с соответствующими знаками.

В сечениях балки с координатами $z = a_2, a_4$ приложены пары сил с моментами M_1, M_2 . На эпюре M в этих сечениях имеются «скачки» изгибающего момента $\Delta M = M|_{z+\theta} - M|_{z-\theta}$, равные сосредоточенным моментам $M_1 = -10qa^2, M_2 = 20qa^2$ с учетом их знаков.

На участках балки, где распределенная нагрузка q равна 0, на эпюре Q функция $Q(z)$ – постоянная величина, а на эпюре M функция $M(z)$ – линейная функция; на участках балки, где распределенная нагрузка q – постоянная величина, на эпюре Q функция $Q(z)$ – линейная функция, а на эпюре M функция $M(z)$ – квадратная парабола.

Выпуклость нелинейной функции $M(z)$ определяется знаком ее кривизны, то есть знаком второй производной d^2M/dz^2 . На тех участках балки, на которых d^2M/dz^2 имеет знак « \rightarrow », в системе координат uz выпуклость направлена к оси z .

Используя условие прочности по нормальным напряжениям (4), можно найти необходимый осевой момент инерции сечения балки на каждом участке:

$$J \geq \frac{\max|M|}{\sigma_{adm}} \cdot y_{\max}, \quad (6)$$

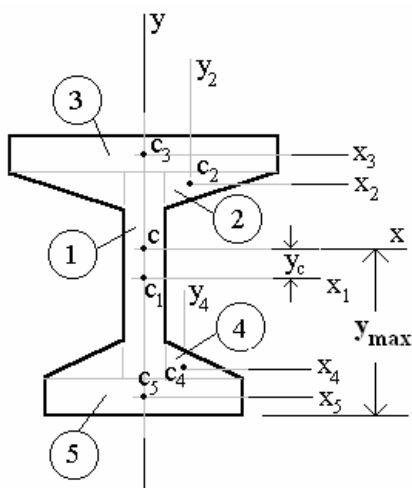
где y_{\max} – расстояние от нейтральной линии сечения до наиболее удаленного волокна (рис.7).

Момент сопротивления поперечного сечения балки определяется по формуле:

$$W = J/y_{\max}. \quad (7)$$

Для определения момента сопротивления W необходимо найти осевой момент инерции J_x относительно главной центральной оси x поперечного сечения балки (нейтральной линии), а также расстояние y_{\max} от нейтральной линии сечения до наиболее удаленного волокна.

Двутавровое поперечное сечение, представленное на рис.4, разбито на прямоугольники 1, 3, 5 и треугольники 2, 4, центры площадей которых обозначены буквами c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 ; центр площади двутавра обозначен буквой c . Системы координат $x_k y_k$ – локальные ($k = 1, 2, \dots, 5$); система координат $x y$ – глобальная, общая для сечения. Символом y_{\max} обозначено расстояние от нейтральной линии сечения до наиболее удаленного волокна.



Определение геометрических характеристик двутаврового поперечного сечения, представленного на рис.4, для принятых соотношений между размерами элементов поперечного сечения по формулам (3), выполнено в задании №3.

Площадь поперечного сечения: $A = 0,173 h^2$. Статический момент S_{x_1} площади двутавра относительно оси x_1 : $S_{x_1} = 11,663 t^3$.

Рис.7. Разбивка двутавра на простейшие фигуры.

Расстояние y_c от центра площади двутавра до оси x_1 : $y_c = 0,0674h$. Осевой момент инерции J_x двутавра относительно центральной оси x : $J_x = 216,743t^4 = 216,743 \cdot 10^{-4} h^4$. Расстояние y_{max} от нейтральной оси x до наиболее удаленного волокна балки: $y_{max} = 0,567h$.

Используя условие прочности (4) и допускаемое напряжение $\sigma_{adm} = 30$ МПа можно вычислить требуемую высоту поперечного сечения балки h_k ($k=I, II, III, IV$) по участкам:

$$- \text{участок I } (0 \leq z < 1 \text{ м}): h_I \geq \sqrt[3]{\frac{78,48 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,138 \text{ м};$$

$$- \text{участок II } (1 \leq z < 3 \text{ м}): h_{II} \geq \sqrt[3]{\frac{578,45 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,268 \text{ м};$$

$$- \text{участок III } (3 \leq z < 6 \text{ м}): h_{III} \geq \sqrt[3]{\frac{569,66 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,267 \text{ м};$$

$$- \text{участок IV } (6 \leq z < 10 \text{ м}): h_{IV} \geq \sqrt[3]{\frac{1046,4 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 0,327 \text{ м}.$$

Высота поперечного сечения балки на втором и третьем участках мало отличается по величине, поэтому для дальнейших расчетов принято

$$h_{II} = h_{III} = 0,268 \text{ м}.$$

Далее необходимо проверить, удовлетворяет ли балка условиям жесткости.

2.2. *Расчет балки на жесткость.* Проверим, удовлетворяет ли балка, рассчитанная по условиям прочности, следующим условиям жесткости:

$v_{adm} = L/400 = 9/400 = 0,0225 \text{ м} = 22,5 \text{ мм}$; $\theta_{adm} = 0,005 \text{ рад}$, где L – пролет балки; $L = 9a = 9 \text{ м}$.

Осевой момент инерции рассматриваемого двутавра определен формулой:

$$J_x = 216,743 \text{ т}^4 = 216,743 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4. \quad (8)$$

Подставив в формулу (8) вместо h вычисленные значения высоты h_k , получим осевые моменты инерции балки по участкам:

$$J_x^{(1)} = 216,743 \cdot 10^{-4} \cdot h_I^4 = 216,743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,138)^4 = 0,0786 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$\begin{aligned} J_x^{(2)} = J_x^{(3)} &= 216,743 \cdot 10^{-4} \cdot h_{II}^4 = 216,743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,268)^4 = \\ &= 1,118 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4; \end{aligned}$$

$$J_x^{(4)} = 216,743 \cdot 10^{-4} \cdot h_{IV}^4 = 216,743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,327)^4 = 2,478 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

Далее обозначаем: $J_1 = J_x^{(1)}$, $J_2 = J_x^{(2)}$, $J_3 = J_x^{(3)}$, $J_4 = J_x^{(4)}$.

Для построения уравнения изогнутой оси балки используем метод начальных параметров, изложенный в Приложении 2.

Расчетная схема представлена на рис.3а, точка 0 начала системы координат uz помещена на левом конце балки; числовые значения нагрузок и линейных размеров:

$$\begin{aligned} l_1 = 1, \quad l_2 = 2, \quad l_3 = 3, \quad l_4 = 4 \text{ м}; \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 4, \quad q_3 = 6 \text{ кН/м}; \\ F_1 = 2, \quad F_2 = 4 \text{ кН}; \quad M_1 = 20, \quad M_2 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Уравнение упругой линии балки на первом участке:

$$v_I = v_0 + \theta_0 z - \frac{M_0}{EJ_1} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{Q_0}{EJ_1} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q_1}{EJ_1} \cdot \frac{z^4}{4!}, \quad (9)$$

где v_0 , θ_0 – неизвестные прогиб и угол поворота на левом конце балки; начальные параметры: $M_0 = 0$; $Q_0 = -F_1 = -2$ кН; другие исходные данные: $q_1 = 2$ кН/м; $EJ_1 = 30 \cdot 10^9 \cdot 0,0786 \cdot 10^{-4} = 2,358 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$.

После подстановки в (9) числовых значений величин уравнение упругой линии балки на первом участке получает вид:

$$v_I = v_0 + \theta_0 z + \frac{2}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{z^3}{6} + \frac{2}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{z^4}{24}. \quad (10)$$

Неизвестные начальные параметры v_0 и θ_0 определяются из условий закрепления балки, а именно:

$$v|_{z=1} = 0, \quad v|_{z=10} = 0. \quad (11)$$

Уравнение упругой линии балки на втором участке:

$$v_{II} = v_I(z) + \Delta v_I + \Delta \theta (z-1) - \frac{\Delta M_1}{EJ_1} \cdot \frac{(z-1)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_1}{EJ_1} \cdot \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{\Delta q_1}{EJ_1} \cdot \frac{(z-1)^4}{4!}, \quad (12)$$

где ΔM_1 – «скачок» изгибающего момента на границе между первым и вторым участками (при $z = 1$ м):

$$\Delta M_1 = \left[\frac{J_1}{J_2} M_{II} - \frac{J_1}{J_1} M_I \right]_{z=1} = \frac{0,0786}{1,118} (-3 \cdot 10^3) - (-3 \cdot 10^3) = 2,789 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

ΔQ_1 – «скачок» поперечной силы:

$$\Delta Q_1 = \left[\frac{J_1}{J_2} Q_{II} - \frac{J_1}{J_1} Q_I \right]_{z=1} = \frac{0,0786}{1,118} (12,556 \cdot 10^3) - (-4 \cdot 10^3) = 4,883 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

Δq_1 – «скачок» распределенной нагрузки:

$$\Delta q_1 = \left[\frac{J_1}{J_2} q_{II} - \frac{J_1}{J_1} q_I \right]_{z=1} = \frac{0,0786}{1,118} (0) - 2 \cdot 10^3 = -2 \cdot 10^3 \text{ Н/м};$$

$$q_I = q_1 = q = 2 \text{ кН/м}; \quad q_{II} = 0;$$

Δv_I , $\Delta \theta_I$ – «скачки» прогибов и углов поворота поперечных сечений балки на границе между первым и вторым участками.

В рассматриваемом примере упругая линия балки является непрерывной гладкой кривой, поэтому «скачки» прогибов и углов поворота поперечных сечений балки на границах между участками равны нулю, что учитывается в дальнейшем выводе.

На границе между первым и вторым участками $\Delta v_I = 0$, $\Delta \theta_I = 0$.

После подстановки в (12) числовых значений величин уравнение упругой линии балки на втором участке получает вид:

$$v_{II} = v_I(z) - \frac{2,789}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-1)^2}{2} - \frac{4,883}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-1)^3}{6} -$$

$$-\frac{2}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-1)^4}{24}. \quad (13)$$

Уравнение упругой линии балки на третьем участке:

$$v_{III} = v_{II}(z) + \Delta v_{II} + \Delta \theta_{II} \cdot (z-3) - \frac{\Delta M_2}{EJ_1} \cdot \frac{(z-3)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_2}{EJ_1} \cdot \frac{(z-3)^3}{3!} + \frac{\Delta q_2}{EJ_1} \cdot \frac{(z-3)^4}{4!}, \quad (14)$$

где Δv_{II} , $\Delta \theta_{II}$ – «скачки» прогибов и углов поворота на границе между вторым и третьим участками: $\Delta v_{II} = 0$, $\Delta \theta_{II} = 0$; ΔM_2 – «скачок» изгибающего момента на границе между вторым и третьим участками (при $z = 3$):

$$\begin{aligned} \Delta M_2 &= \left[\frac{J_1}{J_3} M_{III} - \frac{J_1}{J_2} M_{II} \right]_{z=3} = \frac{0,0786}{1,118} \cdot 2,112 \cdot 10^3 - \frac{0,0786}{1,118} \cdot 22,112 \cdot 10^3 \\ &= -1,406 \cdot 10^3 \text{ Н·м;} \end{aligned}$$

ΔQ_2 – «скачок» поперечной силы на границе между вторым и третьим участками ($z = 3$):

$$\Delta Q_2 = \left[\frac{J_1}{J_3} Q_{III} - \frac{J_1}{J_2} Q_{II} \right]_{z=3} = \frac{0,0786}{1,118} \cdot 12,556 \cdot 10^3 - \frac{0,0786}{1,118} \cdot 12,556 \cdot 10^3 = 0;$$

$$\Delta q_2 = \left[\frac{J_1}{J_3} q_{III} - \frac{J_1}{J_2} q_{II} \right]_{z=3} = \frac{0,0786}{1,118} \cdot 4 \cdot 10^3 - \frac{0,0786}{1,118} \cdot 0 = 281 \text{ Н/м;}$$

$$(q_{II} = 0, \quad q_{III} = q_2 = 2q_a = 4 \text{ кН/м}).$$

После подстановки в (14) числовых значений величин уравнение упругой линии балки на третьем участке получает вид:

$$v_{III} = v_{II}(z) + \frac{1,406}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-3)^2}{2} + \frac{0,281}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-3)^4}{24}. \quad (15)$$

Уравнение упругой линии на четвёртом участке:

$$v_{IV} = v_{III}(z) + \Delta v_{III} + \Delta \theta_{III} \cdot (z-6) - \frac{\Delta M_3}{EJ_1} \cdot \frac{(z-6)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_3}{EJ_1} \cdot \frac{(z-6)^3}{3!} +$$

$$+ \frac{\Delta q_3 \cdot (z-6)^4}{EJ_1 \cdot 4!}, \quad (16)$$

где Δv_{III} , $\Delta \theta_{III}$ – «скачки» прогибов и углов поворота на границе между третьим и четвёртым участками: $\Delta v_{III} = 0$, $\Delta \theta_{III} = 0$;

ΔM_3 – «скачок» изгибающего момента при $z = 6$:

$$\begin{aligned} \Delta M_3 = \left[\frac{J_1}{J_4} M_{IV} - \frac{J_1}{J_3} M_{III} \right]_{z=6} &= \frac{0,0786}{2,478} \cdot 21,776 \cdot 10^3 - \\ &- \frac{0,0786}{1,118} \cdot 21,776 \cdot 10^3 = -840 \text{ Н} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

ΔQ_3 – «скачок» поперечной силы:

$$\begin{aligned} \Delta Q_3 = \left[\frac{J_1}{J_4} Q_{IV} - \frac{J_1}{J_3} Q_{III} \right]_{z=6} &= \frac{0,0786}{2,478} (-3,444 \cdot 10^3) - \frac{0,0786}{1,118} \cdot 0,556 \cdot 10^3 = \\ &= -148 \text{ Н}; \end{aligned}$$

Δq_3 – «скачок» распределенной нагрузки:

$$\Delta q_3 = \left[\frac{J_1}{J_4} q_{IV} - \frac{J_1}{J_3} q_{III} \right]_{z=6} = \frac{0,0786}{2,478} \cdot 6 \cdot 10^3 - \frac{0,0786}{1,118} \cdot 4 \cdot 10^3 = -9,1 \text{ Н/м};$$

$$(q_{III} = q_2 = 2qa = 4 \text{ кН/м}; \quad q_{IV} = q_3 = 3qa = 6 \text{ кН/м}).$$

После подстановки в (16) числовых значений величин уравнение упругой линии на четвёртом участке получает вид:

$$\begin{aligned} v_{IV} = v_{III}(z) + \frac{0,840}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-6)^2}{2} + \frac{0,148}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-6)^3}{6} - \\ - \frac{0,091}{2,358 \cdot 10^2} \cdot \frac{(z-6)^4}{24}. \quad (17) \end{aligned}$$

После умножения левой и правой части (17) на $EJ_1 \cdot 10^{-3} = 235,8 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ запишем уравнение упругой линии балки на всей длине:

$$235,8 v = 235,8 v_0 + 235,8 \theta_0 z + 2 \frac{z^3}{6} + 2 \frac{z^4}{24} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-2,789 \frac{(z-1)^2}{2} - 4,883 \frac{(z-1)^3}{6} - 2 \frac{(z-1)^4}{24} \right]_{z > 1} + \\
& + \left[1,406 \frac{(z-3)^2}{2} + 0,281 \frac{(z-3)^4}{24} \right]_{z > 3} + \\
& + \left[0,840 \cdot \frac{(z-6)^2}{2} + 0,148 \cdot \frac{(z-6)^3}{6} - 0,091 \frac{(z-6)^4}{24} \right]_{z > 6}, \quad (18)
\end{aligned}$$

где выражения в квадратных скобках используются только для z , превышающих указанное значение внизу правой скобки.

С использованием функции Хевисайда

$$He(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0; \\ 0, & \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (19)$$

уравнение (18) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
235,8v &= 235,8v_0 + 235,8\theta_0 z + 2 \frac{z^3}{6} + 2 \frac{z^4}{24} + \\
& + \left[-2,789 \frac{(z-1)^2}{2} - 4,883 \frac{(z-1)^3}{6} - 2 \frac{(z-1)^4}{24} \right] \cdot He(z-1) + \\
& + \left[1,406 \frac{(z-3)^2}{2} + 0,281 \frac{(z-3)^4}{24} \right] \cdot He(z-3) + \\
& + \left[0,840 \cdot \frac{(z-6)^2}{2} + 0,148 \frac{(z-6)^3}{6} - 0,091 \frac{(z-6)^4}{24} \right] \cdot He(z-6). \quad (20)
\end{aligned}$$

Для отыскания числовых значений начальных параметров v_0 и θ_0 воспользуемся граничными условиями (11) и подставим в них выражение (20) изогнутой оси балки:

$$\begin{aligned}
235,8v_0 + 235,8\theta_0 &= -0,417; \\
235,8v_0 + 2358\theta_0 &= -\frac{1000}{3} - \frac{10000}{12} + 2,789 \cdot \frac{81}{2} + 4,883 \cdot \frac{729}{6} + \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6561}{12} - 1,406 \cdot \frac{49}{2} - 0,281 \cdot \frac{2401}{24} - 0,840 \cdot \frac{16}{2} - 0,148 \cdot \frac{64}{6} + \\
& + 0,091 \cdot \frac{256}{24} = 16,364.
\end{aligned}$$

Разделив правую и левую части системы уравнений (21) на коэффициент при v_0 , равный числу 235.8, получим следующую линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} v_0 + \theta_0 = -1,767 \cdot 10^{-3}; \\ v_0 + 10\theta_0 = 6,94 \cdot 10^{-2} \end{cases} \quad (22)$$

Решение этой системы уравнений дает значения начальных параметров v_0, θ_0 :

$$v_0 = -9,675 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad \theta_0 = 7,908 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Заменив в уравнении (20) начальные параметры v_0 и θ_0 полученными числовыми значениями, приходим к окончательной форме уравнения упругой оси балки:

$$\begin{aligned}
v = & -9,675 \cdot 10^{-3} + 7,908 \cdot 10^{-3} z + 4,241 \cdot 10^{-3} \{ 0,333z^3 + 0,0833z^4 - \\
& - [1,394(z-1)^2 + 0,814(z-1)^3 + 0,0833(z-1)^4] \cdot He(z-1) + \\
& + [0,703(z-3)^2 + 0,0117(z-3)^4] \cdot He(z-3) + \\
& + [0,420(z-6)^2 + 0,0247(z-6)^3 - 3,792 \cdot 10^{-3}(z-6)^4] \cdot He(z-6) \}.
\end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение углов поворота сечений балки получается из (23) дифференцированием по z :

$$\begin{aligned}
\theta = & 7,908 \cdot 10^{-3} + 4,241 \cdot 10^{-3} \left\{ z^2 + 0,333z^3 - \right. \\
& - [2,788(z-1) + 2,442(z-1)^2 + 0,333(z-1)^3] \cdot He(z-1) + \\
& + [1,406(z-3) + 0,0468(z-3)^3] He(z-3) +
\end{aligned} \quad (24)$$

$$+ [0,840(z - 6) + 0,0741(z - 6)^2 - 1,517 \cdot 10^{-2}(z - 6)^3] \cdot He(z - 6)\}$$

2.2. Построение эпюр прогибов и углов поворота поперечных сечений балки. Выбрав на оси балки ряд значений координат z_1, z_2, \dots, z_n , по уравнениям (23), (24) вычисляем прогибы $v_k = v(z_k)$, углы поворотов сечений $\theta_k = \theta(z_k)$ и помещаем полученные значения в табл.2.

По данным табл.2 на рис.8 построены эпюры прогибов и углов поворота балки. Так как на рис. 3,а ось ординат направлена вниз, а на рис.8 – вверх, то для сохранения действительного направления прогибов балки $v(z)$ на рис.8 знаки прогибов изменены на обратные.

Т а б л и ц а 2

Прогибы и углы поворотов сечений балки

$z_k, \text{ м}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$v_k \cdot 10^3, \text{ м}$	-9,675	-5,522	0	6,815	13,39	19,25	23,92
$\theta_k \cdot 10^3, \text{ рад}$	7,908	9,145	13,56	13,54	12,59	10,69	7,866

Продолжение табл.2.

$z_k, \text{ м}$	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
$v_k \cdot 10^3, \text{ м}$	27,7	30,9	33,16	34,2	33,82	31,87	28,77
$\theta_k \cdot 10^3, \text{ рад}$	7,109	5,565	3,383	0,712	-2,298	-5,499	-6,889

Окончание табл. 2.

$z_k, \text{ м}$	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
$v_k \cdot 10^3, \text{ м}$	25,02	20,76	16,17	11,49	7,006	3,046	0
$\theta_k \cdot 10^3, \text{ рад}$	-8,061	-8,917	-9,353	-9,27	-8,568	-7,143	-4,897

Наибольшее значение прогиба v_{\max} по абсолютной величине достигается при $z \cong 5 \text{ м}$ и составляет $34,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 34,2 \text{ мм}$.

Это значение превышает допускаемую величину $v_{\text{adm}} = 22,5 \text{ мм}$ в 1,52 раза, поэтому размеры поперечного сечения балки должны быть увеличены пропорционально числу n_v :

$$n_v = \sqrt[4]{v_{\max}/v_{\text{adm}}} = \sqrt[4]{1,52} = 1,11.$$

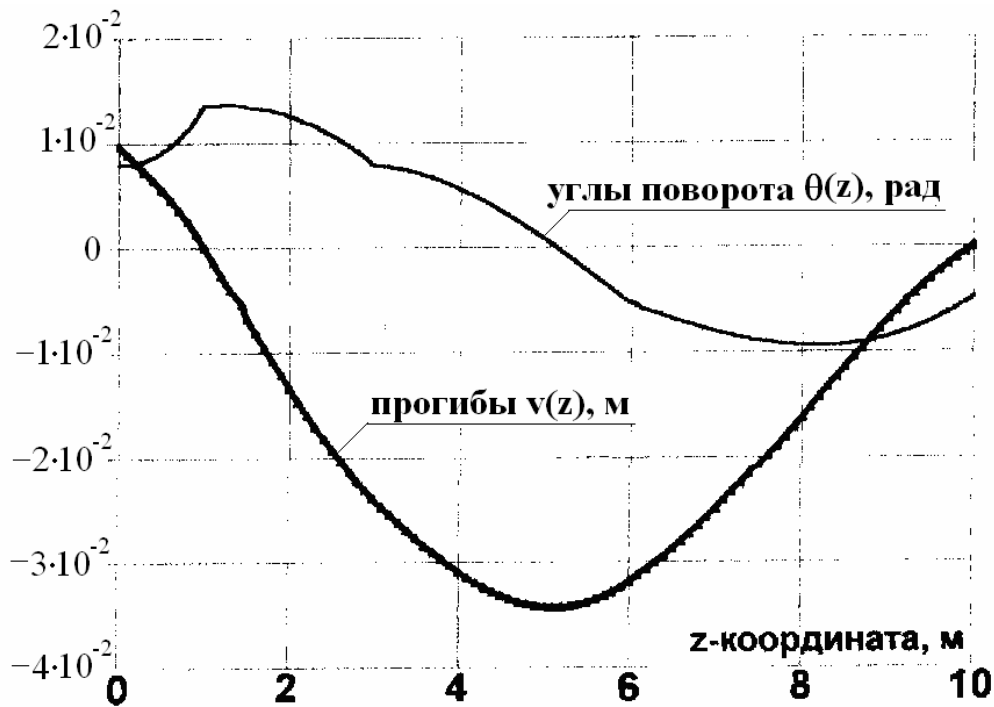


Рис.8. Прогибы и углы поворота сечений балки

Наибольший по абсолютному значению угол поворота поперечного сечения θ_{\max} достигается при $z = 1,0$ м, т.е. на левой опоре, и составляет $13,562 \cdot 10^{-3}$ рад, что превышает допускаемую величину $\theta_{\text{adm}} = 5 \cdot 10^{-3}$ рад в 2,712 раза, поэтому размеры поперечного сечения балки необходимо увеличить пропорционально числу n_{θ} :

$$n_{\theta} = \sqrt[4]{\theta_{\max} / \theta_{\text{adm}}} = \sqrt[4]{2,712} = 1,283.$$

Для того, чтобы удовлетворить оба требования по жесткости ($v_{\text{adm}} = 22,5$ мм; $\theta_{\text{adm}} = 0,005$ рад), следует увеличить высоту поперечного сечения балки в 1,283 раза:

$$\tilde{h}_I = 1,283 \cdot 0,138 = 0,177 \text{ м}; \quad \tilde{h}_{II} = \tilde{h}_{III} = 1,283 \cdot 0,268 = 0,344 \text{ м};$$

$$\tilde{h}_{IV} = 1,283 \cdot 0,327 = 0,42 \text{ м},$$

Округляя полученные значения, окончательно принимаем:

$$h_I = 18 \text{ см}; \quad h_{II} = h_{III} = 34 \text{ см}; \quad h_{IV} = 42 \text{ см}.$$

Поскольку размеры поперечного сечения увеличены, условия прочности будут удовлетворены.

Расчеты закончены.

Задание №6. Расчет центрально сжатых стержней на устойчивость.

Прямой стержень (стойка) с заданной формой поперечного сечения нагружен на одном конце сжимающей сосредоточенной силой F вдоль своей оси. Длина стержня l и условия закрепления известны.

Требуется подобрать размеры поперечного сечения стойки, при которых ее устойчивость обеспечена.

Расчетные схемы стержней приведены на рис.1, формы поперечных сечений – на рис.2, исходные данные – в таблице 1.

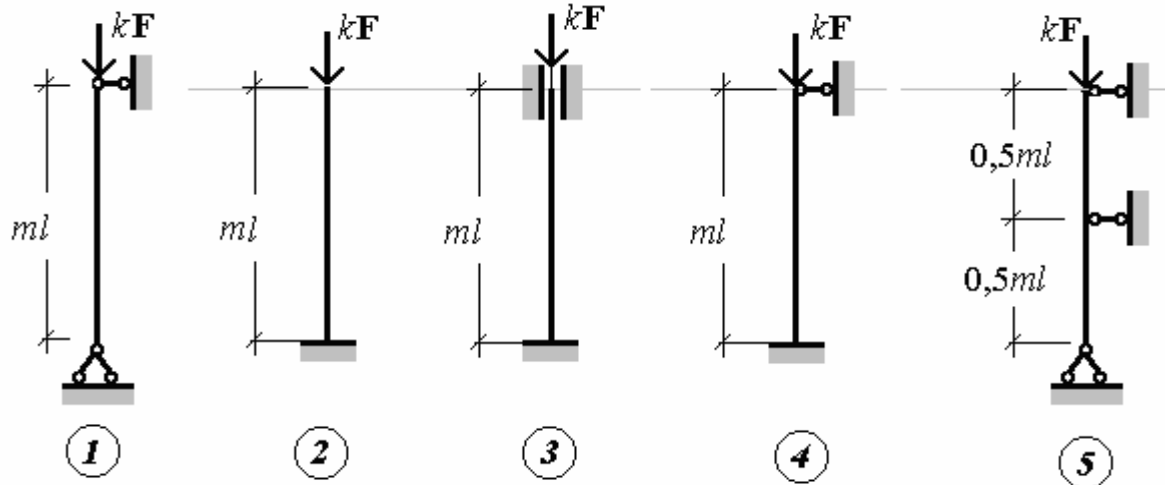


Рис.1. Расчетные схемы стоек.

Номер расчетной схемы и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $n_2n_1n_0$, выданному преподавателем; n_2 , n_1 , n_0 – три цифры кода студента: n_2 – первая слева цифра, n_1 – вторая слева цифра, n_0 – последняя цифра кода.

1. Практический метод расчёта

При выполнении расчетов центрально сжатых стержней поперечные размеры определяют из условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{N}{\phi A_{br}} \leq \sigma_{adm}, \quad (1)$$

где A – площадь поперечного сечения “brutto”, т.е. без учета ослаблений сечения; σ_{adm} – допускаемое напряжение в расчетах на прочность; ϕ – коэффициент продольного изгиба (коэффициент снижения основного допускаемого напряжения), зависящий от гибкости стержня λ и материала стойки (см. Приложение № 10).

Величина ϕ , входящая в расчетную формулу (1), зависит от размеров и формы поперечного сечения, поэтому заранее не может быть назначена. Ввиду этого задачу подбора размеров поперечного сечения при расчетах на устойчивость решают методом последовательных приближений.

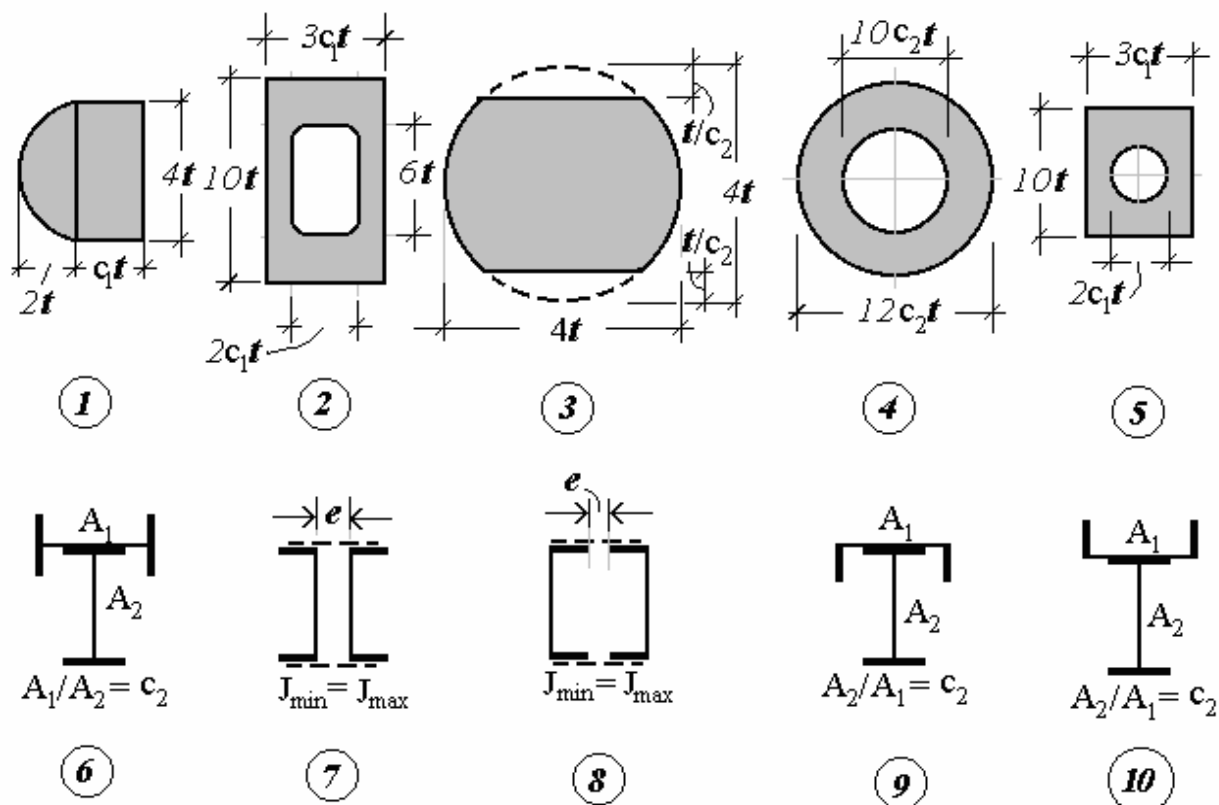


Рис.2. Формы поперечных сечений стоек.

В первом приближении назначают $\varphi = 0.5$, вычисляют площадь A_{br} (без учета ослаблений сечения отверстиями под болты, канавками и т.п.) и определяют геометрические характеристики поперечного сечения, соответствующие этой площади.

Размеры поперечного сечения выбирают в соответствии с действующими стандартами:

- для прокатных профилей по таблицам сортаментов (Приложения 3÷9);
- для древесины круглого профиля – в целых сантиметрах;
- для древесины квадратного профиля – сторона квадрата в мм: 25, 32, 40, 50, 60, 75, 100, 130, 150, 180, 200 и 220;
- для стоек из чугуна – в мм: 28, 32, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 250, 280 и 320.

Далее проверяют пригодность выбранных размеров в следующей последовательности:

- а) по принятым размерам уточняют площадь поперечного сечения A ;
- б) вычисляют минимальный главный центральный момент инерции J_{\min} ;
- в) вычисляют минимальный радиус инерции $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$;

г) вычисляют гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$, где μ – коэффициент, учитывающий способ закрепления концов стержня и называемый коэффициентом приведения длины стержня.

Т а б л и ц а 1

Исходные данные к расчету центрально сжатого стержня на устойчивость

n_0	Тип сечения	Материал	k	m	n_1	Номер схемы	c_1	c_2	F, кН	n_2	l, м
1	1	Дерево	1	1	1	1	1,5	1,2	80	1	3,0
2	2	Чугун	4	2	2	2	2,0	1,4	100	2	2,7
3	3	Дерево	1	1	3	3	2,5	1,6	120	3	3,3
4	4	Чугун	5	3	4	4	2,0	1,6	120	4	2,7
5	5	Чугун	4	2	5	5	1,5	1,4	100	5	3,3
6	6	Сталь	6	3	6	1	2,0	1,2	80	6	2,7
7	7	Сталь	5	4	7	2	2,5	1,4	100	7	3,3
8	8	Сталь	6	3	8	3	2,0	1,6	120	8	2,7
9	9	Сталь	5	4	9	4	1,5	1,4	100	9	3,0
0	10	Сталь	6	3	0	5	2,0	1,2	80	0	3,3

Примечание: основные допускаемые напряжения σ_{adm} (допускаемые напряжения в расчетах на прочность) принимаются равными: для стали – 160; для чугуна – 100; для дерева – 10 МПа.

Условиям закрепления стоек на рис. 1 соответствуют следующие теоретические коэффициенты приведения длины стержня:

- схема 1 (оба конца шарнирно опёрты), $\mu = 1$;
- схема 2 (нижний конец защемлён, верхний – свободен), $\mu = 2$;
- схема 3 (оба конца защемлены), $\mu = 0,5$;
- схема 4 (нижний конец защемлён, верхний – шарнирно опёрт), $\mu = 0,7$;
- схема 5 (с тремя шарнирными опорами), $\mu = 0,5$.

В деревянных конструкциях не удастся осуществить жёсткую заделку, так как древесина имеет низкий модуль упругости поперёк волокон. Поэтому, по существующим нормам, принимают $\mu = 0,8$ для деревянных стоек с одним заделанным, а вторым – шарнирным концом (схема 4 на рис.1) и $\mu = 0,65$ для деревянных стоек с обоими заделанными концами (схема 3 на рис.1);

д) по гибкости λ из таблицы Приложения 10 находят величину коэффициента φ ; если значение λ попадает в интервал $[a, a+10]$, то коэффициент φ определяют линейной интерполяцией:

$$\varphi |_{\lambda=a+b} = \varphi |_{\lambda=a} - 0,1b(\varphi |_{\lambda=a} - \varphi |_{\lambda=a+10}); \quad (2)$$

для неуказанных в таблице значений λ , превышающих максимальное табличное значение λ_{\max} , коэффициент φ принимается равным наименьшему табличному значению φ_{\min} : $\varphi_{\min} = \varphi(\lambda_{\max}, \dots)$;

е) вычисляют допускаемые напряжения на устойчивость:

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \varphi \cdot \sigma_{\text{adm}}; \quad (3)$$

ж) вычисляют напряжение в сечении стойки

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad (4)$$

з) проверяют условие устойчивости (1);

и) вычисляют расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{\sigma - \sigma_{\text{adm,st}}}{\sigma_{\text{adm,st}}} \cdot 100\%. \quad (5)$$

Если расхождение меньше 5%, то выбранные размеры считают удовлетворительными и на этом заканчивают подбор размеров поперечного сечения. Если расхождение больше 5%, то выбирают новые размеры поперечного сечения и повторяют проверку.

При второй и последующих попытках можно изменять значения коэффициента φ , постепенно сужая диапазон выбора.

Для стержней из прокатных профилей выгоднее назначать новые размеры поперечного сечения. Если вычисленные напряжения σ больше допускаемых $\sigma_{\text{adm,st}}$, то размеры поперечного сечения надо увеличить, а если меньше – их надо уменьшить. При этом площадь поперечного сечения при каждой следующей попытке целесообразно изменять на величину $0,5 \cdot \delta \cdot A$, где δ – расхождение напряжений, взятое в долях единицы, A – ранее выбранная площадь поперечного сечения.

Попытки повторяются до тех пор, пока не будет выполнено одно из условий:

– либо найдется такой размер поперечного сечения, для которого расхождение напряжений будет меньше 5%;

– либо будут найдены два таких соседних размера в сортаменте, для меньшего из которых напряжения сжатия превышают допустимые больше чем на 5 %, а для большего – напряжения при сжатии меньше допускаемых. В этом случае останавливаются на большем размере.

В расчётах стержней на устойчивость необходимо располагать числовыми значениями осевых моментов инерции J_x , J_y относительно главных центральных осей x , y поперечных сечений стержня.

Поперечные сечения нестандартной формы разбивают на простейшие фигуры (сечения из прокатных профилей – на двутавры, швеллеры, уголки; из непрокатных профилей – на прямоугольники, треугольники, трапеции, круги, круговые сегменты и т.п.), для которых имеются числовые данные в сортаментах или формулы в таблицах для расчёта геометрических характеристик этих фигур: координат центра площади – x_c , y_c ; площадей – A_i ; моментов инерции J_{xi} , J_{yi} сечения относительно собственных центральных осей x_i , y_i . В Приложении 1 представлены геометрические характеристики прямоугольной трапеции (трапеции с двумя прямыми углами), прямоугольного треугольника, кругового сегмента и полукруга.

Согласно теореме о параллельном переносе осей координат главные центральные моменты инерции J_x , J_y вычисляют по формулам:

$$J_x = \sum_i (J_{xi} + a_i^2 A_i), \quad J_y = \sum_i (J_{yi} + b_i^2 A_i) \quad (6)$$

где J_{xi} , J_{yi} – моменты инерции каждой отдельной части составного сечения относительно собственных центральных осей x_i , y_i , параллельных главным центральным осям всего сечения x , y ; a_i – расстояние между осями x_i и x ; b_i – расстояние между осями y_i и y ; A_i – площадь отдельной части составного сечения.

Координаты x_c , y_c центра площади составного сечения определяют по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_i S_{xi}}{A}, \quad y_c = \frac{\sum_i S_{yi}}{A}, \quad (7)$$

где S_{xi} , S_{yi} – статические моменты площадей отдельных частей составного сечения относительно каких-либо осей x_0 , y_0 , параллельных главным центральным осям x , y всего сечения; A – площадь всего составного сечения.

В задании на расчёт сжатого стержня каждый тип сечения имеет ось симметрии (рис.2).

Ось симметрии сечения является его главной осью. Вторая главная ось перпендикулярна первой и проходит через центр площади сечения.

Для вычисления главных моментов инерции сечения J_x , J_y поступают следующим образом:

- вычерчивают на масштабной бумаге поперечное сечение;
- проводят центральные оси x_i и y_i каждой отдельной части составного сечения, параллельные, соответственно, главным осям x и y ;
- по формулам (7) определяют координаты x_c , y_c центра площади составного сечения и проводят главные оси инерции всего сечения x и y ;

– вычисляют и указывают на чертеже размеры a_i и b_i между осями x_i и x , y_i и y ;

– для каждой отдельной части составного сечения вычисляют или выписывают из сортамента моменты инерции J_{xi} , J_{yi} и площади поперечных сечений A_i ;

– вычисляют моменты инерции по формулам (6).

Далее из двух моментов J_x и J_y выбирается наименьший – J_{\min} , который и используется в расчете.

Для составного сечения с условием $J_{\max} = J_{\min}$ (типы 7, 8 на рис.2) требуется найти размер e , т.е. то расстояние, на которое необходимо раздвинуть элементы сечения так, чтобы главные моменты инерции были бы одинаковыми. От расстояния e зависит лишь момент инерции J_y , следовательно, нужно подбирать только J_x . После того как размеры сечения подобраны, значение e определяется из уравнений

$$J_y = 2(J_{y1} + b_1^2 A_1) = J_x; \quad b_1 = \sqrt{\frac{J_x - 2J_{y1}}{2A_1}},$$

$$e = 2(b_1 - z_0) \text{ (тип 7 на рис.2)}, \quad e = 2(b_1 + z_0 - c) \text{ (тип 8 на рис.2)},$$

где c – ширина полки швеллера; z_0 – расстояние от собственной центральной оси y_i швеллера до наружной поверхности стенки швеллера.

2. Примеры расчета.

Пример 1. Для деревянной стойки (расчетная схема 3 на рис.1) при $l = 3$ м, $k=1$, $F=180$ кН, $\sigma_{\text{adm}}=10$ МПа подобрать квадратное поперечное сечение.

Первое приближение. Назначаем $\varphi = 0,5$ и вычисляем требуемую площадь поперечного сечения:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \sigma_{\text{adm}}} = \frac{180 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10 \cdot 10^6} = 36 \cdot 10^{-3} = 360 \text{ см}^2;$$

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{360} \approx 19 \text{ см.}$$

Принимаем в соответствии с сортаментом сторону квадрата $a = 18$ см. Проверяем пригодность выбранного размера $a = 18$ см:

а) площадь поперечного сечения $A = a^2 = 18^2 = 324 \text{ см}^2$;

б) минимальный момент инерции $J_{\min} = \frac{a^4}{12}$;

в) минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{3,46} = 0,29 a = 0,29 \cdot 18 = 5,22 \text{ см};$$

г) гибкость стержня при $\mu = 0,65$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,65 \cdot 300}{5,22} = 37,36;$$

д) из таблицы Приложения 10 для дерева находим:

$$\varphi_{\lambda=30} = 0,93; \quad \varphi_{\lambda=40} = 0,87;$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda=30+7,36} &= \varphi_{\lambda=30} - 0,1 \cdot 7,36 (\varphi_{\lambda=30} - \varphi_{\lambda=40}) = \\ &= 0,93 - 0,1 \cdot 7,36 (0,93 - 0,87) = 0,886; \end{aligned}$$

е) допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{\text{adm, st}} = \varphi \sigma_{\text{adm}} = 0,886 \cdot 10 = 8,86 \text{ МПа};$$

ж) действующие в стержне напряжения

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{180 \cdot 10^3}{324 \cdot 10^{-4}} = 5,56 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,56 \text{ МПа};$$

з) сопоставляем напряжения в стержне с допускаемыми напряжениями на устойчивость:

$$\sigma = 5,56 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm, st}} = 8,86 \text{ МПа};$$

имеем недогрузку;

и) расхождение напряжений

$$\delta = \frac{\sigma - \sigma_{\text{adm, st}}}{\sigma_{\text{adm, st}}} 100\% = \frac{5,56 - 8,86}{8,86} \cdot 100\% = -37\%.$$

Такая значительная недогрузка недопустима и следует уменьшить размеры сечения.

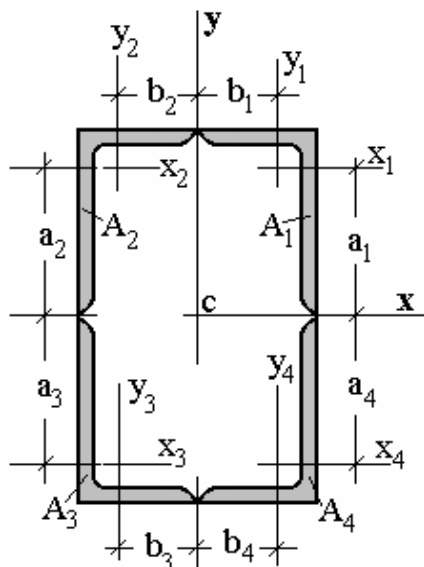
Второе приближение. Уменьшаем площадь поперечного сечения на величину $0,5 \cdot \delta \cdot A = 0,5 \cdot 0,37 \cdot 324 = 60 \text{ см}^2$. Тогда $A = 324 - 60 = 264 \text{ см}^2$ и $a = \sqrt{264} = 16,2 \text{ см}$.

Выбираем в соответствии с сортаментом $a = 15 \text{ см}$ и производим проверку. В результате проверки получим $\sigma = 8 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm,ст}} = 8,34 \text{ МПа}$; $\delta = 4,1 \% < 5\%$. Окончательно принимаем $a = 15 \text{ см}$.

Пример 2. Для стальной колонны (расчетная схема 2 на рис.1) при $l = 4 \text{ м}$, $k = 1$, $F = 2000 \text{ кН}$, $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}$ подобрать сечение, состоящее из четырех неравнополочных уголков (рис.3).

Первое приближение. Назначаем $\varphi = 0,5$ и вычисляем требуемую площадь поперечного сечения:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \sigma_{\text{adm}}} = \frac{2000 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-3} = 250 \text{ см}^2;$$



Требуемая площадь сечения одного уголка $A_i = 250:4 = 62,5 \text{ см}^2$. Из сортамента неравнополочных уголков (Приложение 8) выбираем уголок № 25/16 с геометрическими характеристиками: $A_i = 63,6 \text{ см}^2$; $J_{xi} = 4091 \text{ см}^4$; $J_{yi} = 1333 \text{ см}^4$; $a_i = 25 - 8,14 = 16,86 \text{ см}$; $b_i = 16 - 3,69 = 12,31 \text{ см}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Производим проверку:

а) площадь всего сечения $A = 4 \cdot 63,6 = 254,4 \text{ см}^2$;

б) главные моменты инерции сечения J_x и J_y (рис.3):

$$J_x = 4 (J_{xi} + a_i^2 A_i) = 4 [4091 + (16,86)^2 \cdot 63,6] = 88680 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 4 (J_{yi} + b_i^2 A_i) = 4 [1333 + (12,31)^2 \cdot 63,6] = 43883 \text{ см}^4;$$

следовательно, $J_{\text{min}} = J_y = 43883 \text{ см}^4$;

в) минимальный радиус инерции

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{A}} = \sqrt{\frac{43883}{254,4}} = 13,1 \text{ см};$$

г) гибкость стержня при $\mu = 2$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{2 \cdot 400}{13,1} \approx 61;$$

д) из таблицы Приложения 10 для стали при $\sigma_y = 240$ МПа находим:

$$\varphi|_{\lambda=60} = 0,805; \quad \varphi|_{\lambda=70} = 0,754;$$

$$\varphi|_{\lambda=61} = \varphi|_{\lambda=60+1} = 0,805 - 0,1 \cdot (0,805 - 0,754) = 0,8;$$

е) допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{adm,st} = \varphi \cdot \sigma_{adm} = 0,8 \cdot 160 = 128 \text{ МПа};$$

ж) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2000 \cdot 10^3}{254,4 \cdot 10^{-4}} = 78,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78,6 \text{ МПа};$$

з) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 78,6 \text{ МПа} < \sigma_{adm,st} = 128 \text{ МПа};$$

стержень с выбранным сечением недогружен;

и) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{\sigma - \sigma_{adm,st}}{\sigma_{adm,st}} 100\% = \frac{78,6 - 128}{128} \cdot 100\% = -38,5\%.$$

Выбранный размер уголка не подходит, так как запас устойчивости превышает 5%.

Второе приближение. Уменьшаем площадь поперечного сечения на

$$0,5 \cdot \delta \cdot A = 0,5 \cdot 0,385 \cdot 254,4 = 49 \text{ см}^2.$$

Принимаем $A_i = 1/4 (254,4 - 49) = 51,35 \text{ см}^2$. Выбираем из сортамента (Приложение 8) уголок № 20/12,5×1,6 с геометрическими характеристиками: $A_i = 49,8 \text{ см}^2$, $J_{xi} = 2026 \text{ см}^4$, $J_{yi} = 617 \text{ см}^4$; $a_i = 20 - 6,71 = 13,29 \text{ см}$; $b_i = 12,5 - 2,99 = 9,51 \text{ см}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и повторяем расчёт.

а) площадь всего сечения $A = 4 \cdot 49,8 = 199,2 \text{ см}^2$;

б) главные моменты инерции сечения J_x и J_y (рис.3):

$$J_x = 4 (J_{xi} + a_i^2 A_i) = 4 [2026 + (13,29)^2 \cdot 49,8] = 43288 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 4 (J_{yi} + b_i^2 A_i) = 4 [617 + (9,51)^2 \cdot 49,8] = 20483 \text{ см}^4;$$

следовательно, $J_{\min} = J_y = 20483 \text{ см}^4$;

в) минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{20483}{199,2}} = 10,14 \text{ см};$$

г) гибкость стержня при $\mu = 2$:

$$\lambda = \frac{\mu}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 400}{10,14} \approx 79;$$

д) из таблицы Приложения 10 для стали при $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$ находим:

$$\varphi_{\lambda=80} = 0,686; \quad \varphi_{\lambda=70} = 0,754;$$

$$\varphi_{\lambda=79} = \varphi_{\lambda=80+1} = 0,686 + 0,1 \cdot (0,754 - 0,686) = 0,693;$$

е) допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \varphi \cdot \sigma_{\text{adm}} = 0,693 \cdot 160 = 111 \text{ МПа};$$

ж) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2000 \cdot 10^3}{199,2 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

з) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 100 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm,st}} = 111 \text{ МПа};$$

стержень с выбранным сечением недогружен;

и) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{\sigma - \sigma_{\text{adm,st}}}{\sigma_{\text{adm,st}}} 100\% = \frac{100 - 110}{110} \cdot 100\% = -9,5\%.$$

Выбранный размер уголка не подходит, так как запас устойчивости превышает 5%.

Третье приближение. Уменьшаем площадь поперечного сечения на

$$0,5 \cdot \delta \cdot A = 0,5 \cdot 0,095 \cdot 199,2 = 9,43 \text{ см}^2.$$

Принимаем $A_i = 1/4 (199,2 - 9,43) = 47,44 \text{ см}^2$. Выбираем из сортамента (Приложение 8) уголок № 20/12,5×1,4 с геометрическими характеристиками: $A_i = 43,9 \text{ см}^2$, $J_{xi} = 1801 \text{ см}^4$, $J_{yi} = 551 \text{ см}^4$; $a_i = 20 - 6,62 = 13,38 \text{ см}$; $b_i = 12,5 - 2,91 = 9,59 \text{ см}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и повторяем расчёт.

а) площадь всего сечения $A = 4 \cdot 43,9 = 175,6 \text{ см}^2$;

б) главные моменты инерции сечения J_x и J_y (рис.3):

$$J_x = 4 (J_{xi} + a_i^2 A_i) = 4[1801 + (13,38)^2 \cdot 43,9] = 38641 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 4 (J_{yi} + b_i^2 A_i) = 4[551 + (9,59)^2 \cdot 43,9] = 18354 \text{ см}^4;$$

следовательно, $J_{\min} = J_y = 18354 \text{ см}^4$;

в) минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{18354}{175,6}} = 10,22 \text{ см};$$

г) гибкость стержня при $\mu = 2$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 400}{10,22} \approx 78;$$

д) из таблицы Приложения 10 для стали при $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$ находим:

$$\varphi|_{\lambda=80} = 0,686; \quad \varphi|_{\lambda=70} = 0,754;$$

$$\varphi|_{\lambda=79} = \varphi|_{\lambda=80+2} = 0,686 + 0,2 \cdot (0,754 - 0,686) = 0,7;$$

е) допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \varphi \cdot \sigma_{\text{adm}} = 0,7 \cdot 160 = 112 \text{ МПа};$$

ж) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{2000 \cdot 10^3}{175,6 \cdot 10^{-4}} = 114 \cdot 10^6 \text{ Ёа} = 114 \text{ МПа};$$

з) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 114 \text{ МПа} > \sigma_{\text{adm,st}} = 112 \text{ МПа};$$

стержень с выбранным сечением перегружен;

и) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{\sigma - \sigma_{adm, st}}{\sigma_{adm, st}} 100\% = \frac{114 - 112}{112} \cdot 100\% = 1,8\%.$$

Выбранный размер уголка подходит, так как дефицит устойчивости не превышает 5%. Принимаем окончательно четыре уголка № 20/12,5×1,4.

Пример 3. Для деревянного стержня (расчетная схема 1 на рис.1) при $l = 3$ м, $k = 1$, $m = 1$, $F = 50$ кН подобрать размеры сечения по рис.4,а (сосновое бревно с одним кантом), $\sigma_{adm} = 10$ МПа.

Используя Приложение 1, выражаем геометрические характеристики отсеченной части сечения (рис.4,б) через параметр t :

$\alpha = \arccos(1-h/R) = \arccos(1 - 0,586/2) = \arccos(1 - 0,293) = 0,785$ (α – в радианах); $b = 2R\sin\alpha = 2 \times 2t\sin(0,785) = 2,82t$;

$$y_c = 4R\sin^3\alpha / [3(2\alpha - \sin 2\alpha)] = 4 \times 2t\sin^3(0,785) / [3(2 \cdot 0,785 - \sin(2 \cdot 0,785))] = 1,654t;$$

$$A = 0,5R^2(2\alpha - \sin 2\alpha) = 0,5(2t)^2(2 \cdot 0,785 - \sin(2 \cdot 0,785)) = 1,14t^2;$$

$$J_x = R^4 [2\alpha - \sin 2\alpha + 4\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha - 64\sin^6\alpha / (9(2\alpha - \sin 2\alpha))] / 8 =$$

$$= (2t)^4 \{2 \cdot 0,785 - \sin(2 \cdot 0,785) + 4 \times 2\sin^3(0,785)\cos(0,785) - 64\sin^6(0,785) /$$

$$/ (9(2 \cdot 0,785 - \sin(2 \cdot 0,785)))\} / 8 = 0,018t^4;$$

$$J_y = R^4 (2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3}\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha) / 8 = (2t)^4 \{2 \cdot 0,785 - \sin(2 \cdot 0,785) -$$

$$- \frac{4}{3}\sin^3(0,785) \cdot \cos(0,785)\} / 8 = 0,472t^4.$$

Отметим геометрические характеристики отсеченной части сечения (рис.4,б) индексом 1: $y_{c1} = 1,654t$; $A_1 = 1,14t^2$; $J_{x1} = 0,018t^4$; $J_{y1} = 0,472t^4$.

Поскольку ось y является осью симметрии сечения по рис.4,а, координата x_c центра площади сечения равна 0. Расстояние y_c от центра площади сечения до оси x_0 определим по формуле

$$y_c = S_{x0} / A,$$

где S_{x0} – статический момент площади сечения по рис.4,а относительно оси x_0 , перпендикулярной y и проходящей через центр площади круга с радиусом $R = 2t$; A – площадь сечения по рис.4,а.

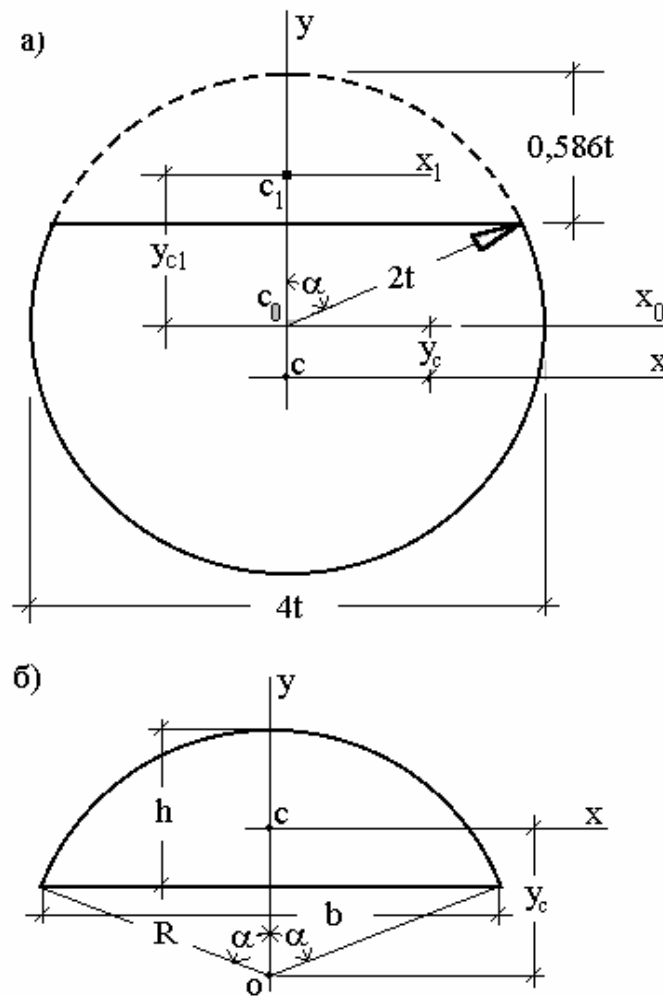


Рис.4. Бревно с одним кантом.

Статический момент площади круга относительно оси x_0 равен 0, поэтому $S_{x_0} = -A_1 \times y_{c1} = -1,14t^2 \times 1,654t = -1,886t^3$.

Площадь сечения по рис.4,а: $A = \pi R^2 - A_1 = 3,14(2t)^2 - 1,14t^2 = 11,42t^2$.

Расстояние y_c от центра площади сечения до оси x_0 :

$$y_c = -1,886t^3 / 11,42t^2 = -0,165t.$$

Осевые моменты инерции круга относительно центральных осей x_0 , y_0 равны между собой: $J_{x_0} = J_{y_0} = \pi R^4 / 4$.

По формулам (6) составляем выражения для осевых моментов инерции сечения по рис.4,а, беря со знаком «минус» осевые моменты инерции отсеченной части сечения (рис.4,б):

$$J_{xc} = J_{x_0} + y_c^2 \times \pi R^2 - J_{x1} - (y_{c1} + y_c)^2 \times A_1 = 3,14(2t)^4 / 4 + (0,165t)^2 \times 3,14(2t)^2 - 0,018t^4 - (1,654t + 0,165t)^2 \times 1,14t^2 = 9,105t^4;$$

$$J_{yc} = J_{y_0} - J_{y1} = 3,14(2t)^4 / 4 - 0,472t^4 = 12,088t^4.$$

Минимальный осевой момент инерции $J_{\min} = J_{xc} = 9,105t^4$.

Минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min}/A} = \sqrt{\frac{9,105t^4}{11,42t^2}} = 0,893t.$$

Применяем способ изменения коэффициента φ .

Первое приближение. Назначаем $\varphi_0 = 0,5$. Определяем требуемую площадь сечения и параметр t :

$$\text{а) } \tilde{A} \geq \frac{F}{\varphi_0 \sigma_{\text{adm}}} = \frac{50 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2; t = \sqrt{\frac{\tilde{A}}{11,42}} = 2,96 \text{ см};$$

$$\text{б) минимальный радиус инерции: } i_{\min} = 0,893 t = 0,893 \times 2,96 = 2,64 \text{ см};$$

в) гибкость стержня при $\mu = 1,0$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 300}{2,64} = 114;$$

г) с помощью таблицы Приложения 10 для дерева вычисляем:

$$\begin{aligned} \varphi_{|\lambda=110} &= 0,25; \quad \varphi_{|\lambda=120} = 0,22; \quad \varphi_{|\lambda=114} = \varphi_{|\lambda=110} - 0,1 \cdot 4 (\varphi_{|\lambda=110} - \varphi_{|\lambda=120}) = \\ &= 0,25 - 0,012 = 0,238; \end{aligned}$$

принимаем $\varphi_1 = 0,24$;

д) допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \varphi_1 \sigma_{\text{adm}} = 0,24 \cdot 10 = 2,4 \text{ МПа};$$

е) действующие в стержне напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5 \text{ МПа};$$

ж) сопоставляем напряжения в стержне с допускаемыми напряжениями на устойчивость:

$$\sigma = 5 \text{ МПа} > \sigma_{\text{adm,st}} = 2,4 \text{ МПа};$$

стержень перегружен;

з) расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{\sigma - \sigma_{\text{adm,st}}}{\sigma_{\text{adm,st}}} 100\% = \frac{5 - 2,4}{2,4} \cdot 100\% = 108\%.$$

Такая значительная перегрузка недопустима и следует изменить размеры сечения.

Второе приближение. Назначаем $\varphi_2 = 0,5(\varphi_1 + \varphi_0) = 0,5(0,24+0,5) = 0,37$. Определяем требуемую площадь сечения и параметр t :

$$а) \quad \tilde{A} \geq \frac{F}{\varphi_2 \sigma_{adm}} = \frac{50 \cdot 10^3}{0,37 \cdot 10 \cdot 10^6} = 1,35 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 135 \text{ см}^2;$$

$$t = \sqrt{\frac{\tilde{A}}{11,42}} = 3,44 \text{ см};$$

б) минимальный радиус инерции: $i_{min} = 0,893t = 0,893 \times 3,44 = 3,1 \text{ см};$

в) гибкость стержня при $\mu = 1,0$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 300}{3,1} = 97;$$

г) с помощью таблицы Приложения 10 для дерева вычисляем:

$$\varphi|_{\lambda=90} = 0,38; \quad \varphi|_{\lambda=100} = 0,31; \quad \varphi|_{\lambda=97} = \varphi|_{\lambda=90} - 0,1 \cdot 7 (\varphi|_{\lambda=90} - \varphi|_{\lambda=100}) = 0,38 - 0,049 = 0,331;$$

принимаем $\varphi_3 = 0,33$;

д) допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\sigma_{adm,st} = \varphi_3 \sigma_{adm} = 0,33 \cdot 10 = 3,3 \text{ МПа};$$

е) действующие в стержне напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50 \cdot 10^3}{135 \cdot 10^{-4}} = 3,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,7 \text{ МПа};$$

ж) сопоставляем напряжения в стержне с допускаемыми напряжениями на устойчивость: $\sigma = 3,7 \text{ МПа} > \sigma_{adm,st} = 3,3 \text{ МПа}$; стержень перегружен;

з) расхождение напряжений: $\delta = \frac{3,7 - 3,3}{3,3} \cdot 100\% = 12\%$.

Такая перегрузка недопустима и следует изменить размеры сечения.

Третье приближение. Назначаем $\varphi_4 = 0,5(\varphi_3 + \varphi_2) = 0,5(0,33 + 0,37) = 0,35$. Определяем требуемую площадь сечения и параметр t :

$$а) \quad \tilde{A} \geq \frac{F}{\varphi_4 \sigma_{adm}} = \frac{50 \cdot 10^3}{0,35 \cdot 10 \cdot 10^6} = 1,43 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 143 \text{ см}^2; \quad t = \sqrt{\frac{\tilde{A}}{11,42}} = 3,54 \text{ см};$$

б) минимальный радиус инерции: $i_{min} = 0,893t = 0,893 \times 3,54 = 3,16 \text{ см};$

в) гибкость стержня при $\mu = 1,0$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 300}{3,16} = 95;$$

г) с помощью таблицы Приложения 10 для дерева вычисляем:

$$\begin{aligned} \varphi|_{\lambda=90} &= 0,38; \quad \varphi|_{\lambda=100} = 0,31; \quad \varphi|_{\lambda=95} = \varphi|_{\lambda=90} - 0,1 \cdot 5 (\varphi|_{\lambda=90} - \varphi|_{\lambda=100}) = \\ &= 0,38 - 0,035 = 0,345; \end{aligned}$$

принимаем $\varphi_5 = 0,34$;

д) допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\sigma_{\text{adm,ст}} = \varphi_1 \sigma_{\text{adm}} = 0,34 \cdot 10 = 3,4 \text{ МПа};$$

е) действующие в стержне напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-4}} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,5 \text{ МПа};$$

ж) сопоставляем напряжения в стержне с допускаемыми напряжениями на устойчивость:

$$\sigma = 3,5 \text{ МПа} > \sigma_{\text{adm,ст}} = 3,4 \text{ МПа};$$

стержень немного перегружен;

$$\text{з) расхождение напряжений: } \delta = \frac{3,5 - 3,4}{3,4} \cdot 100\% = 2,9\% .$$

Такая перегрузка допустима. Вычисляем: $t = 3,54 \text{ см}$, $2R = 4t = 4 \cdot 3,54 = 14,16 \text{ см}$.

С учётом перегрузки принимаем диаметр бревна равным 16 см.

Пример 4. Для стальной колонны (схема 5 на рис. 1,а) при $l = 18 \text{ м}$, $k = 1$, $m = 1$, $F = 300 \text{ кН}$ подобрать сечение, состоящее из трёх швеллеров (рис.5). Материал – сталь, $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}$. Коэффициент приведения длины стержня $\mu = 0,5$. Соотношение между площадями первого швеллера и примыкающих к нему двух сдвоенных швеллеров $s_2 = A_1/(2A_2) = 1,2$; общая площадь $A = A_1 + 2A_2$. Доля площади каждого швеллера: $A_1/A_2 = 2 \cdot 1,2 = 2,4$; $A_2 = A_1/2,4 = 0,417A_1$; $A = A_1 + 2 \cdot 0,417A_1 = 1,834A_1$; $A_1 = A/1,834 = 0,545A$; $A_2 = 0,417A_1 = (0,417/1,834)A = 0,227A$.

Первое приближение. Назначаем $\varphi_0 = 0,5$.

а) Определяем требуемые площади сечений швеллеров:

– требуемая общая площадь сечения

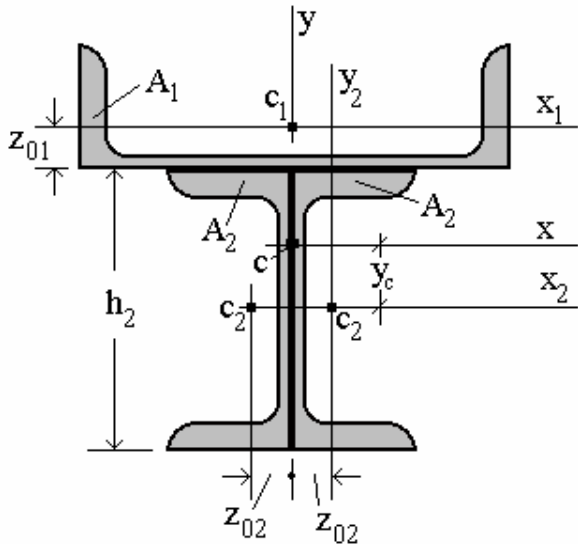


Рис.5. Сечение к примеру 4.

$$\tilde{A} \geq \frac{F}{\varphi_0 \sigma_{adm}} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 37,5 \text{ см}^2.$$

Так как ось y является осью симметрии составного сечения, то эта ось будет главной центральной осью.

Требуемые площади сечений швеллеров

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}/1,834 = \frac{37,5}{1,833} = 20,4 \text{ см}^2; \quad \tilde{A}_2 = \tilde{A}_1/2,4 = \frac{20,4}{2,4} = 8,5 \text{ см}^2;$$

б) из сортамента швеллеров (Приложение 4) выбираем:

– швеллер № 18 с геометрическими характеристиками:

$$A_1 = 20,7 \text{ см}^2; J_{x1} = 86 \text{ см}^4; J_{y1} = 1090 \text{ см}^4; z_{01} = 1,94 \text{ см};$$

– два швеллера № 8 с геометрическими характеристиками:

$$A_2 = 8,98 \text{ см}^2; J_{x2} = 89,4 \text{ см}^4; J_{y2} = 12,8 \text{ см}^4; h_2 = 8 \text{ см};$$

– общая площадь сечения колонны:

$$A = 20,7 + 2 \cdot 8,98 = 38,66 \text{ см}^2;$$

в) вычисляем расстояние y_c между осями x_2 и x :

– статический момент составного сечения относительно оси x_2 :

$$S_{x2} = A_1(z_{01} + h_2/2) = 20,7(1,94 + 4) = 122,96 \text{ см}^3;$$

– расстояние $y_c = S_{x2}/A = 122,96/38,66 = 3,18 \text{ см};$

г) вычисляем главный момент инерции сечения J_x :

$$J_x = J_{x1} + A_1(z_{01} + h_2/2 - y_c)^2 + 2J_{x2} + 2A_2(y_c)^2 = 86 + 20,7(1,94 + 4 - 3,18)^2 + 2 \cdot 89,4 + 2 \cdot 8,98 \cdot (3,18)^2 = 604,1 \text{ см}^4;$$

д) выбираем минимальный момент инерции:

$$\text{так как } J_y > J_{y1} = 1090 \text{ см}^4, \text{ то } J_{\min} = J_x = 604,1 \text{ см}^4;$$

е) минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{604,1}{38,66}} = 3,95 \text{ см};$$

ж) гибкость стержня при $\mu = 0,5$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1800}{3,95} = 228;$$

з) в таблице Приложения 10 для стали с пределом текучести $\sigma_y = 240$ МПа отсутствуют значения ϕ , соответствующие гибкости $\lambda > 220$, поэтому принимаем $\phi_1 = 0,135$;

и) допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \phi_1 \sigma_{\text{adm}} = 0,135 \cdot 160 = 21,6 \text{ МПа};$$

к) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{38,36 \cdot 10^{-4}} = 78 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78 \text{ МПа};$$

л) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 78 \text{ МПа} > \sigma_{\text{adm,st}} = 21,6 \text{ МПа};$$

стержень с выбранным сечением перегружен;

м) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{\sigma - \sigma_{\text{adm,st}}}{\sigma_{\text{adm,st}}} 100\% = \frac{78 - 21,6}{21,6} \cdot 100\% = 262\%.$$

Выбранные размеры швеллеров не подходят, так как перегрузка превышает 5%.

Далее используем способ поправок площади сечений $\Delta A = 0,5\delta \cdot A$.

Второе приближение.

а) вычисляем поправку к требуемой общей площади сечения колонны:

$$\Delta A = 0,5\delta \cdot A = 0,5 \cdot 2,62 \cdot 38,36 = 50,25 \text{ см}^2;$$

б) определяем требуемую общую площадь сечения колонны:

$$\tilde{A} = 38,36 + 50,25 = 88,61 \text{ см}^2;$$

в) требуемые площади сечений швеллеров:

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}/1,834 = \frac{88,61}{1,834} = 48,32 \text{ см}^2; \quad \tilde{A}_2 = \tilde{A}_1/2,4 = \frac{48,32}{2,4} = 20,13 \text{ см}^2;$$

г) из сортамента швеллеров (Приложение 4) выбираем:

– швеллер № 33 с геометрическими характеристиками:

$$A_1 = 46,5 \text{ см}^2; J_{x1} = 410 \text{ см}^4; J_{y1} = 7980 \text{ см}^4; z_{01} = 2,59 \text{ см};$$

– два швеллера № 18 с геометрическими характеристиками:

$$A_2 = 20,7 \text{ см}^2; J_{x2} = 1090 \text{ см}^4; J_{y2} = 86 \text{ см}^4; h_2 = 18 \text{ см};$$

– площадь составного сечения: $A = 46,5 + 2 \cdot 20,7 = 87,9 \text{ см}^2$;

д) вычисляем расстояние y_c между осями x_2 и x :

– статический момент составного сечения относительно оси x_2 :

$$S_{x2} = A_1(z_{01} + h_2/2) = 46,5(2,59 + 9) = 538,94 \text{ см}^3;$$

– расстояние между осями: $y_c = S_{x2}/A = 538,94/87,9 = 6,13 \text{ см}$;

е) вычисляем главный момент инерции сечения J_x :

$$J_x = J_{x1} + A_1(z_{01} + h_2/2 - y_c)^2 + 2 \cdot [J_{x2} + A_2(y_c)^2] = 410 + 46,5(2,59 + 9 - 6,13)^2 \\ + 2 \cdot [1090 + 20,7 \cdot (6,13)^2] = 5532 \text{ см}^4;$$

ж) выбираем минимальный момент инерции:

так как $J_x < J_{y1} = 7980 \text{ см}^4$, то $J_{\min} = J_x = 5532 \text{ см}^4$;

и) минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{5532}{87,9}} = 7,93 \text{ см};$$

к) гибкость колонны при $\mu = 0,5$:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1800}{7,93} = 113;$$

л) из таблицы Приложения 10 для стали при $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$ находим:

$$\varphi|_{\lambda=110} = 0,478; \quad \varphi|_{\lambda=120} = 0,419;$$

принимаем $\varphi_2 = 0,46$;

м) допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \varphi_2 \sigma_{\text{adm}} = 0,46 \cdot 160 = 73,6 \text{ МПа};$$

н) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{87,9 \cdot 10^{-4}} = 34,12 \cdot 10^6 \text{ Па} = 34,12 \text{ МПа};$$

о) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 34,12 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm,st}} = 73,6 \text{ МПа};$$

колонна с выбранным сечением недогружена;

п) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{34,12 - 73,6}{73,6} \cdot 100\% = -53,6\%.$$

Выбранные размеры швеллеров не подходят, так как недогрузка превышает 5%.

Третье приближение.

а) вычисляем поправку к требуемой общей площади сечения колонны:

$$\Delta A = 0,5 \delta \cdot A = -0,5 \cdot 0,536 \cdot 87,9 = -23,58 \text{ см}^2;$$

б) определяем требуемую общую площадь сечения колонны:

$$\tilde{A} = 87,9 - 22,15 = 64,32 \text{ см}^2;$$

в) требуемые площади сечений швеллеров:

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}/1,834 = \frac{64,32}{1,834} = 35,07 \text{ см}^2; \quad \tilde{A}_2 = \tilde{A}_1/2,4 = \frac{35,07}{2,4} = 14,61 \text{ см}^2;$$

г) из сортамента швеллеров (Приложение 4) выбираем:

– швеллер № 27 с геометрическими характеристиками:

$$A_1 = 35,2 \text{ см}^2; J_{x1} = 262 \text{ см}^4; J_{y1} = 4160 \text{ см}^4; z_{01} = 2,47 \text{ см};$$

– два швеллера № 14 с геометрическими характеристиками:

$$A_2 = 15,6 \text{ см}^2; J_{x2} = 491 \text{ см}^4; J_{y2} = 45,4 \text{ см}^4; h_2 = 14 \text{ см};$$

д) вычисляем расстояние y_c между осями x_2 и x :

– статический момент составного сечения относительно оси x_2 :

$$S_{x2} = A_1(z_{01} + h_2/2) = 35,2(2,47 + 7) = 333,34 \text{ см}^3;$$

– площадь составного сечения: $A = 35,2 + 2 \cdot 15,6 = 66,4 \text{ см}^2$;

– расстояние между осями: $y_c = S_{x2}/A = 333,34/66,4 = 5,02 \text{ см}$;

е) вычисляем главный момент инерции сечения J_x :

$$J_x = J_{x1} + A_1(z_{01} + h_2/2 - y_c)^2 + 2J_{x2} + 2A_2(y_c)^2 = 262 + 35,2 \cdot (2,47 + 7 - 5,02)^2 + 2 \cdot 491 + 2 \cdot 15,6 \cdot (5,02)^2 = 2186,9 \text{ см}^4;$$

ж) выбираем минимальный момент инерции:

$$\text{так как } J_x < J_{y1} = 4160 \text{ см}^4, \text{ то } J_{\min} = J_x = 2187 \text{ см}^4;$$

и) минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{2187}{66,4}} = 5,74 \text{ см};$$

к) гибкость колонны при $\mu = 0,5$:

$$\lambda = \frac{\mu}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1800}{5,74} = 157;$$

л) из таблицы Приложения 10 для стали при $\sigma_y = 240$ МПа находим:

$$\varphi|_{\lambda=150} = 0,276; \quad \varphi|_{\lambda=160} = 0,244;$$

принимаем $\varphi_3 = 0,254$;

м) допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\sigma_{\text{adm, st}} = \varphi_3 \sigma_{\text{adm}} = 0,254 \cdot 160 = 40,6 \text{ МПа};$$

н) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{66,4 \cdot 10^{-4}} = 45,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 45,2 \text{ МПа};$$

о) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 45,2 \text{ МПа} > \sigma_{\text{adm, st}} = 40,6 \text{ МПа};$$

колонна с выбранным сечением перегружена;

п) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{45,2 - 40,6}{40,6} \cdot 100\% = 11,2\%.$$

Выбранные размеры швеллеров не подходят, так как перегрузка превышает 5%.

Четвертое приближение.

а) вычисляем поправку к требуемой общей площади сечения колонны:

$$\Delta A = 0,5\delta \cdot A = 0,5 \cdot 0,112 \cdot 66,4 = 3,72 \text{ см}^2;$$

б) определяем требуемую общую площадь сечения колонны:

$$\tilde{A} = 66,4 + 3,72 = 70,12 \text{ см}^2;$$

в) требуемые площади сечений швеллеров:

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}/1,834 = \frac{70,12}{1,834} = 38,23 \text{ см}^2; \quad \tilde{A}_2 = \tilde{A}_1/2,4 = \frac{38,23}{2,4} = 15,93 \text{ см}^2;$$

г) из сортамента швеллеров (Приложение 4) выбираем:

– швеллер № 30 с геометрическими характеристиками:

$$A_1 = 40,5 \text{ см}^2; J_{x1} = 327 \text{ см}^4; J_{y1} = 5810 \text{ см}^4; z_{01} = 2,52 \text{ см};$$

– два швеллера № 14 с геометрическими характеристиками:

$$A_2 = 15,6 \text{ см}^2; J_{x2} = 491 \text{ см}^4; J_{y2} = 45,4 \text{ см}^4; h_2 = 14 \text{ см};$$

– общая площадь $A = 40,5 + 2 \cdot 15,6 = 71,7 \text{ см}^2$;

д) вычисляем расстояние y_c между осями x_2 и x :

– статический момент составного сечения относительно оси x_2 :

$$S_{x2} = A_1(z_{01} + h_2/2) = 40,5(2,52 + 7) = 385,56 \text{ см}^3;$$

– расстояние между осями: $y_c = S_{x2}/A = 385,56/71,7 = 5,38 \text{ см}$;

е) вычисляем главный момент инерции сечения J_x :

$$J_x = J_{x1} + A_1(z_{01} + h_2/2 - y_c)^2 + 2 \cdot [J_{x2} + A_2(y_c)^2] = 327 + 40,5 \cdot (2,52 + 7 - 5,38)^2 + 2 \cdot [491 + 15,6 \cdot (5,38)^2] = 2906 \text{ см}^4;$$

ж) выбираем минимальный момент инерции:

$$\text{так как } J_x < J_{y1} = 5810 \text{ см}^4, \text{ то } J_{\min} = J_x = 2906 \text{ см}^4;$$

и) минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{2906}{71,7}} = 6,37 \text{ см};$$

к) гибкость колонны при $\mu = 0,5$:

$$\lambda = \frac{\mu}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1800}{6,37} = 141;$$

л) из таблицы Приложения 10 для стали при $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$ находим:

$$\varphi|_{\lambda=140} = 0,315; \quad \varphi|_{\lambda=150} = 0,276;$$

принимаем $\varphi_4 = 0,31$;

м) допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \varphi_4 \sigma_{\text{adm}} = 0,31 \cdot 160 = 49,6 \text{ МПа};$$

н) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{71,7 \cdot 10^{-4}} = 41,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 41,84 \text{ МПа};$$

о) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 41,84 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm,st}} = 49,6 \text{ МПа};$$

колонна с выбранным сечением недогружена;

п) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{41,84 - 49,6}{49,6} \cdot 100\% = -15,6\%.$$

Выбранные размеры швеллеров не подходят, так как недогрузка превышает 5%.

Пятое приближение.

а) вычисляем поправку к требуемой общей площади сечения колонны:

$$\Delta A = 0,5\delta \cdot A = -0,5 \cdot 0,156 \cdot 71,7 = -5,59 \text{ см}^2;$$

б) определяем требуемую общую площадь сечения колонны:

$$\tilde{A} = 71,7 - 5,59 = 66,11 \text{ см}^2;$$

в) требуемые площади сечений швеллеров:

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A} / 1,834 = \frac{66,11}{1,834} = 36,05 \text{ см}^2; \quad \tilde{A}_2 = \tilde{A}_1 / 2,4 = \frac{36,05}{2,4} = 15,02 \text{ см}^2;$$

г) из сортамента швеллеров (Приложение 4) выбираем:

– швеллер № 24 с геометрическими характеристиками:

$$A_1 = 30,6 \text{ см}^2; \quad J_{x1} = 208 \text{ см}^4; \quad J_{y1} = 2900 \text{ см}^4; \quad z_{01} = 2,42 \text{ см};$$

– два швеллера № 14 с геометрическими характеристиками:

$$A_2 = 15,6 \text{ см}^2; J_{x2} = 491 \text{ см}^4; J_{y2} = 45,4 \text{ см}^4; h_2 = 14 \text{ см}.$$

– общая площадь $A = 30,6 + 2 \cdot 15,6 = 61,8 \text{ см}^2$;

д) вычисляем расстояние y_c между осями x_2 и x :

– статический момент составного сечения относительно оси x_2 :

$$S_{x2} = A_1(z_{01} + h_2/2) = 30,6(2,42 + 7) = 288,22 \text{ см}^3;$$

– расстояние между осями: $y_c = S_{x2}/A = 288,22/61,8 = 4,66 \text{ см}$;

е) вычисляем главный момент инерции сечения J_x :

$$J_x = J_{x1} + A_1(z_{01} + h_2/2 - y_c)^2 + 2 \cdot [J_{x2} + A_2(y_c)^2] = 208 + 30,6 \cdot (2,42 + 7 - 4,66)^2 + 2 \cdot [491 + 15,6 \cdot (4,66)^2] = 2561 \text{ см}^4;$$

ж) выбираем минимальный момент инерции:

$$\text{так как } J_x < J_{y1} = 2900 \text{ см}^4, \text{ то } J_{\min} = J_x = 2561 \text{ см}^4;$$

и) минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{2561}{61,8}} = 6,44 \text{ см};$$

к) гибкость колонны при $\mu = 0,5$:

$$\lambda = \frac{\mu}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 1800}{6,44} = 140;$$

л) из таблицы Приложения 10 для стали при $\sigma_y = 240 \text{ МПа}$ находим:

$$\varphi|_{\lambda=140} = 0,315;$$

принимаем $\varphi_5 = 0,315$;

м) допускаемое напряжение на устойчивость:

$$\sigma_{\text{adm,st}} = \varphi_5 \sigma_{\text{adm}} = 0,315 \cdot 160 = 50,4 \text{ МПа};$$

н) действующие напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{61,8 \cdot 10^{-4}} = 48,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48,5 \text{ МПа};$$

о) сопоставляем действующие напряжения с допускаемыми:

$$\sigma = 48,5 \text{ МПа} < \sigma_{\text{adm,st}} = 50,4 \text{ МПа};$$

колонна с выбранным сечением недогружена;

п) вычисляем расхождение напряжений:

$$\delta = \frac{48,5 - 50,4}{50,4} \cdot 100\% = -3,7\%.$$

Выбранные размеры швеллеров подходят, так как недогрузка не превышает 5%.

Принимаем швеллер № 24 и два швеллера № 14.

Расчеты закончены.

Задание № 7. Проектировочный расчет статически неопределимой шарнирно-стержневой конструкции

1. **Постановка задачи.** В качестве расчетной схемы ковша погрузочного механизма может служить шарнирно-стержневая конструкция, состоящая из жесткого Г-образного стержня и системы деформируемых подвесок, как показано на рис.1, где использованы следующие обозначения: F – сосредоточенная сила, ВОС – абсолютно жесткий брус; 1, 2, 3, 4 – деформируемые стальные стержни; светлые кружки – конструктивные цилиндрические шарниры, затемненные прямоугольники – опоры.

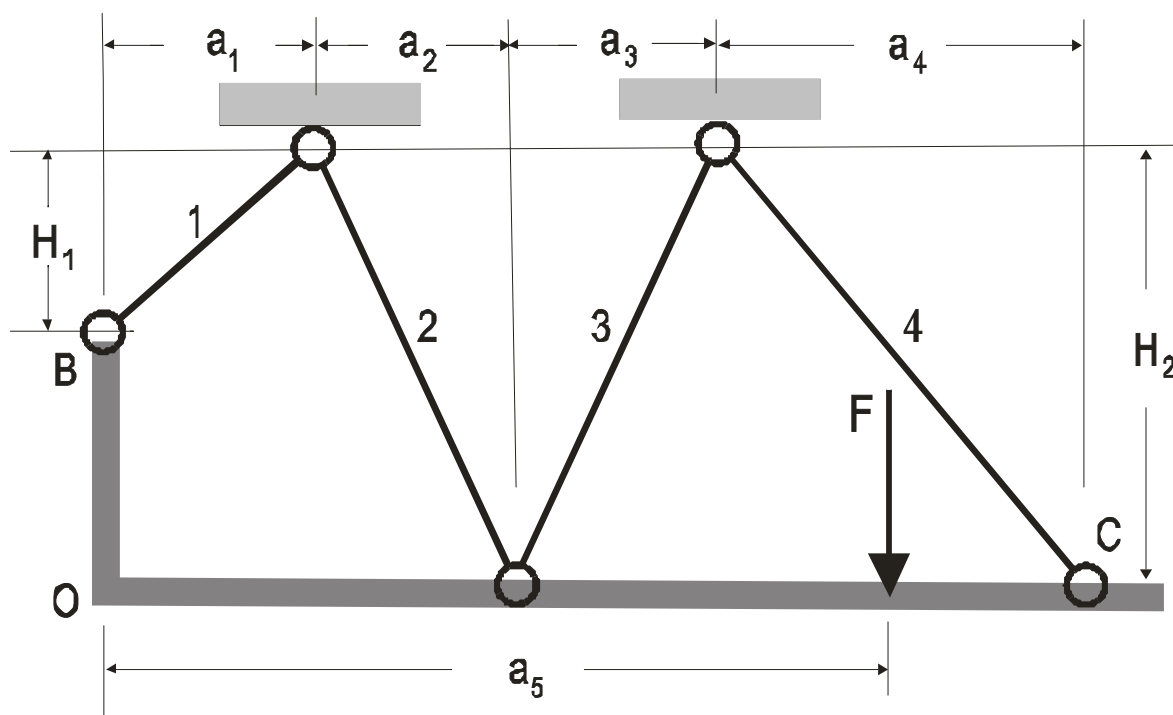


Рис.1. Расчетная схема шарнирно-стержневой конструкции.

Стержни изготовлены из малоуглеродистой стали. Предел текучести стали $\sigma_y = 240$ МПа, предел пропорциональности $\sigma_{pr} = 200$ МПа, допускаемое напряжение $\sigma_{adm} = 160$ МПа, модуль упругости стали $E = 200$ ГПа, коэффициент запаса прочности по пределу текучести $n_y = 1,50$.

Требуется подобрать форму и размеры поперечных сечений деформируемых стержней расчетом по допускаемым напряжениям.

Влияние собственного веса деформируемых стержней и жесткого бруса ВОС на напряженное состояние конструкции не учитывается.

Поскольку стержни 1÷4 плоской конструкции, представленной на рис.1, оканчиваются шарнирами и не нагружены поперек своих осей внешними силами, возникающие в них внутренние усилия могут быть только продольными силами.

В задании выполняется упругий проектировочный расчет конструкции по допускаемым напряжениям.

Целью работы служит овладение методами расчета статически неопределимых шарнирно-стержневых конструкций, стержни которых работают на осевое растяжение или сжатие.

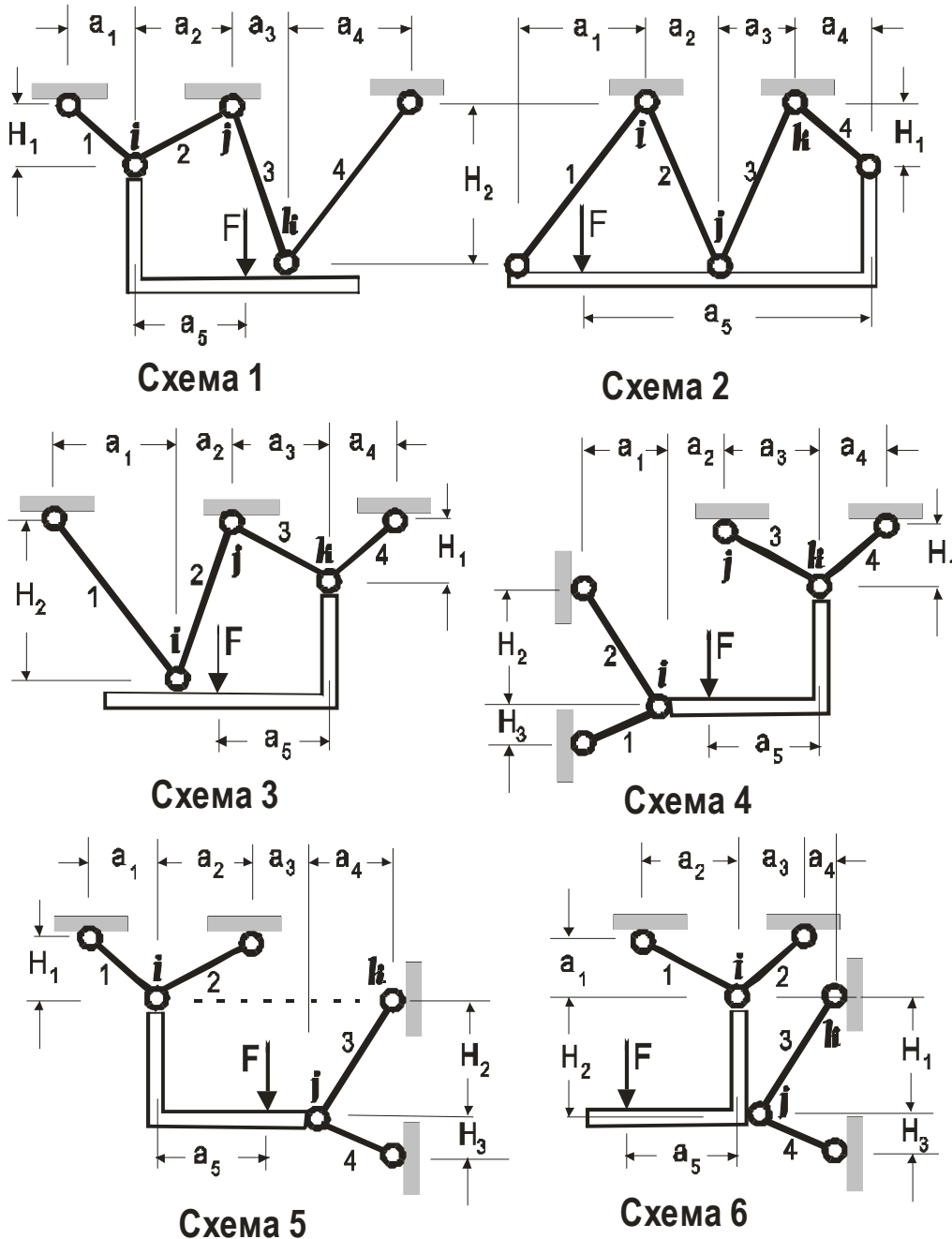


Рис.2. Расчетные схемы 1÷6 к заданию №7.

“Раскрытие” статической неопределимости конструкции выполняется двумя способами из трех: с использованием уравнения совместности перемещений (плана перемещений), методом сил, с помощью теоремы Кастильяно.

Исходные данные к заданию выбираются из табл.1 по трем цифрам n_2, n_1 и n_0 трехзначного шифра, который выдает преподаватель. Расчетные схемы выбираются по рис.2 или рис.3 в соответствии с цифрой n_0 .

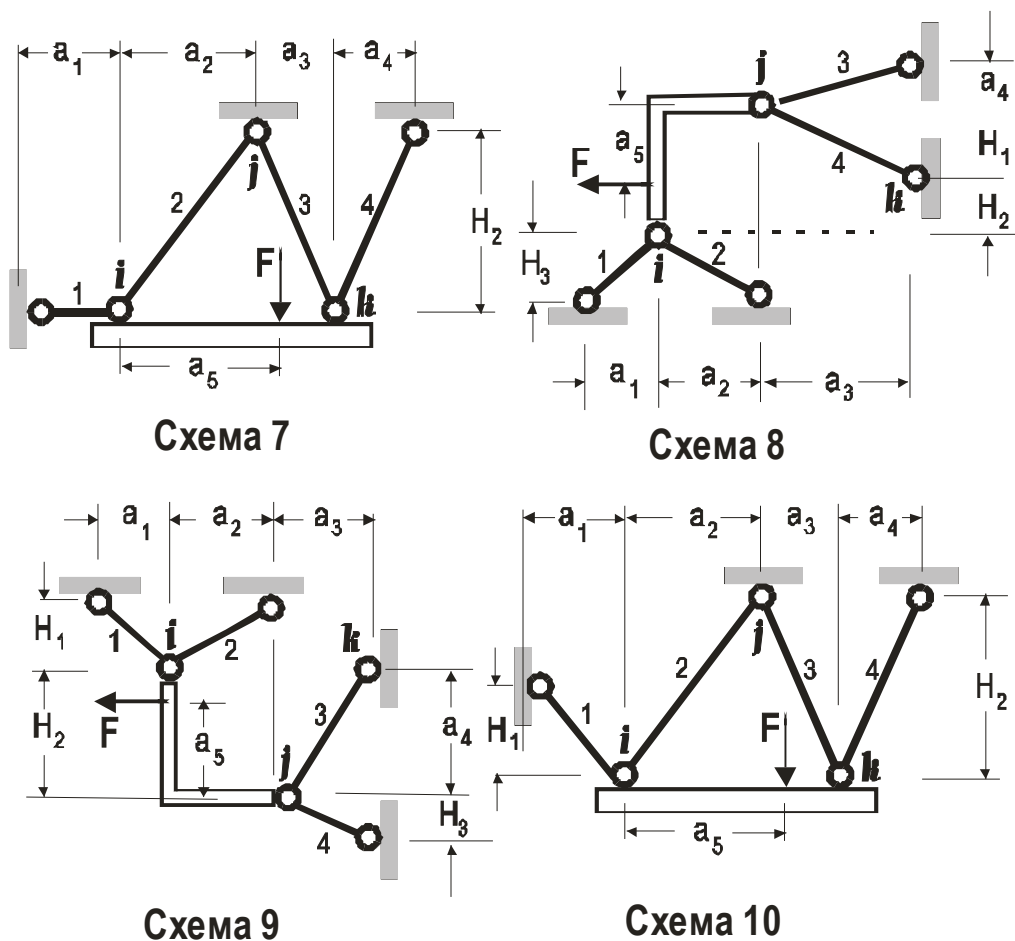


Рис.3. Расчетные схемы 7÷10 к заданию №7.

При оформлении выполненной работы в нее необходимо включить следующие рисунки:

- расчетную схему конструкции (см. рис.1);
- отсеченную часть расчетной схемы с действующими на нее силами (см. рис.4);
- план перемещений конструкции, если используется этот план (см. рис.5);
- эквивалентную систему метода сил (см. рис.8) или схему сил при использовании теоремы Кастильяно (см. рис.10).

2. Методика расчета. Расчеты выполняются по допускаемым напряжениям. Так как в расчетах по допускаемым напряжениям в любой точке конструкции должно быть выполнено условие прочности (полагаем, что устойчивость стержней обеспечена)

$$\sigma^{(k)} = N_k / A_k \leq \sigma_{adm}, \quad (1)$$

Таблица 1

Исходные данные к проектировочному расчету статически неопределимой шарнирно-стержневой конструкции

n ₂	F, кН	$\frac{A_2}{A_1}$	$\frac{A_3}{A_1}$	$\frac{A_4}{A_1}$	n ₁	Размеры конструкции, м					n ₀	Расчетная схема, рис.2,3	H ₃	Расстояние a ₅	
						a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	H ₁					H ₂
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	400	1,50	1,25	0,75	1	1,25	2	1,75	1,25	1,2	2,7	1	1	-	a ₂ +0,75a ₃
2	500	0,75	1,25	1,50	2	1	1,75	1,50	1,75	1,5	2,4	2	2	-	a ₂ +a ₃ +a ₄ +0,75a ₁
3	600	1,75	0,75	1,25	3	1,75	1	1,25	1,5	0,9	2,7	3	3	-	a ₂ +a ₃ +0,5a ₁
4	700	1,75	0,75	1,50	4	1,5	1,25	1,5	1	1,2	2,4	4	4	0,75H ₂	a ₂ +0,75a ₃
5	800	1,25	1,50	1,75	5	1,25	1,50	1	1,75	1,5	2,1	5	5	0,75H ₂	0,9a ₂
6	800	1,75	1,50	1,75	6	1	1,25	1,5	1,75	0,9	2,4	6	6	0,5H ₁	0,6a ₂
7	700	0,75	1,25	1,50	7	1,5	1,75	1	1,25	1,2	2,1	7	7	-	a ₂ +0,75a ₃
8	600	1,50	0,75	1,25	8	1,75	1,50	1,25	1	1,5	2,4	8	8	0,75H ₂	0,50H ₁
9	500	1,25	0,75	1,75	9	1,25	1,75	1,5	1	0,9	2,4	9	9	0,5a ₄	1,25a ₄
0	400	0,75	1,25	1,50	0	0,75	1	1,25	1,75	1,2	2,4	0	10	-	a ₂ +0,6a ₃

причем допускаемые напряжения не должны превосходить предела пропорциональности ($\sigma_{adm} \leq \sigma_{pr}$), то стержни подвески будут деформироваться в упругой стадии, следовательно, расчеты по допускаемым напряжениям – это расчеты по упругой стадии деформирования.

Системы на рис.2, 3 – один раз статически неопределимые, поскольку внешняя сила уравнивается 4-мя продольными усилиями N_k в стержнях ($k = 1, 2, 3, 4$), а для плоской системы сил можно составить только 3 независимых уравнения статики

Одно из неизвестных усилий N_k является "лишним", поэтому для "раскрытия" статической неопределимости необходимо либо составить дополнительное уравнение совместности деформаций, либо применить методы, специально разработанные для расчета статически неопределимых систем. В примере расчета "раскрытие" статической неопределимости выполняется тремя способами: с использованием уравнения совместности перемещений (плана перемещений), методом сил и с помощью теоремы Кастильяно.

Пример расчета.

Абсолютно жесткий брус ВОС подвешен на 4-х деформируемых стальных стержнях 1, 2, 3, 4 к опорам (рис.1). Стержни соединены с брусом ВОС и с опорами конструктивными цилиндрическими шарнирами, расстояния между которыми по горизонтали $a_1 = 1\text{м}$, $a_2 = 1,5\text{м}$, $a_3 = 1,25\text{м}$, $a_4 = 1,75\text{м}$. Расстояния от шарниров В, С до опор $H_1 = 1\text{м}$, $H_2 = 2\text{м}$ соответственно. Поперечные сечения стержней выбираются из числа профилей, показанных на рис. 11: а – кольцевое, б – коробчатое, в – сплошное круглое, г – сплошное квадратное. Соотношения между площадями поперечных сечений стержней заданы: $A_2/A_1 = 1,20$, $A_3/A_1 = 1,50$, $A_4/A_1 = 1,70$. На брус ВОС действует вертикальная сосредоточенная сила $F = 200\text{кН}$, приложенная на расстоянии $a_5 = 4,5\text{м}$ от шарнира В.

Система 1 раз статически неопределимая.

Требуется подобрать форму и размеры поперечных сечений деформируемых стержней расчетом по допускаемым напряжениям.

Влиянием собственного веса деформируемых стержней и жесткого бруса ВОС на напряженное состояние конструкции пренебрегаем.

3. Определение усилий в стержнях при использовании плана перемещений.

3.1. Уравнения равновесия. В дальнейшем потребуются следующие геометрические характеристики системы:

$$\alpha_1 = \arctg (H_1/a_1) = 0,785 \text{ рад}, \quad l_1 = \sqrt{H_1^2 + a_1^2} = 1,414\text{м};$$

$$\alpha_2 = \arctg (H_2/a_2) = 0,927 \text{ рад}, \quad l_2 = \sqrt{H_2^2 + a_2^2} = 2,5\text{м};$$

$$\alpha_3 = \arctg (H_2/a_3) = 1,012 \text{ рад}, \quad l_3 = \sqrt{H_2^2 + a_3^2} = 2,358 \text{ м};$$

$$\alpha_4 = \arctg (H_2/a_4) = 0,852 \text{ рад}, \quad l_4 = \sqrt{H_2^2 + a_4^2} = 2,658 \text{ м},$$

где l_k - длины стержней; α_k - углы наклона стержней к горизонтальной прямой, $k = 1, 2, 3, 4$ (см. рис.4).

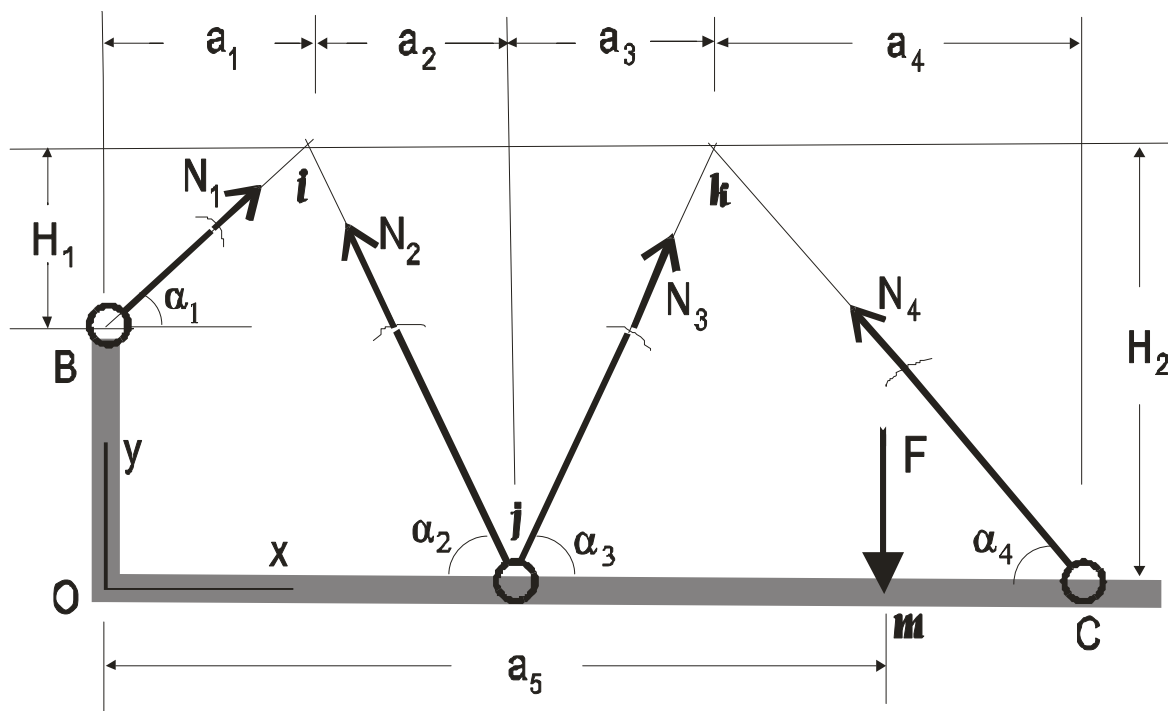


Рис.4. Нижняя отсеченная часть конструкции.

Для составления уравнений равновесия используем метод сечений. Рассекаем все стержни, отбрасываем верхнюю часть конструкции, прикладываем к стержням реакцию отброшенной верхней части – продольные силы N_k ($k = 1, 2, 3, 4$) и рассматриваем равновесие нижней части конструкции (см. рис.4). Направления усилий N_k выбираем вдоль внешних нормалей к сечениям стержней и полагаем их положительными.

Составляем уравнения равновесия – суммы моментов сил относительно узлов i, j, k :

$$\begin{aligned} \sum M_{(i)} = 0: \quad N_3 l_2 \sin(\pi - \alpha_2 - \alpha_3) + N_4 (a_2 + a_3) \sin \alpha_4 &= F(a_5 - a_1), \\ 2,332N_3 + 2,071N_4 &= 3,5F; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{(j)} = 0: \quad -N_1 l_2 \sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2) + N_4 (a_3 + a_4) \sin \alpha_4 &= F(a_5 - a_1 - a_2), \\ -2,475N_1 + 2,258N_4 &= 2F; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{(k)} = 0: \quad -N_1 (a_2 + a_3) \sin \alpha_1 - N_2 l_3 \sin(\pi - \alpha_2 - \alpha_3) &= F(a_5 - a_1 - a_2 - a_3), \\ -1,944N_1 - 2,2N_2 &= 0,75F. \end{aligned} \quad (4)$$

Три уравнения равновесия (2), (3), (4) содержат четыре неизвестных N_k , $k = 1, 2, 3, 4$, поэтому для их определения необходимо рассмотреть деформации конструкции и составить еще одно уравнение – уравнение совместности перемещений. Уравнение совместности перемещений можно составить несколькими способами: путем непосредственного рассмотрения деформаций конструкции с использованием так называемого плана перемещений, используя метод сил, с помощью теоремы Кастильяно и др.

3.2. Уравнение совместности деформаций, соответствующее плану перемещений. Перемещения бруса ВОС под действием силы F обусловлены деформациями (удлинением и укорочением) стержней 1-4; эти деформации взаимно зависимы. Уравнение совместности деформаций (перемещений) выражает взаимную зависимость удлинений и укорочений стержней 1-4 при перемещениях бруса ВОС.

Рассмотрим одно из возможных перемещений бруса ВОС в плоскости чертежа – рис.5.

Известно, что плоское перемещение твердого тела можно осуществить поступательным перемещением и поворотом около произвольно выбранной в теле точки (полюса) параллельно заданной плоскости (плоскости чертежа).

Переместим брус ВОС поступательно в положение $B_2O_1C_2$. При этом все точки бруса сместятся вдоль осей u, v на расстояния u_0, v_0 (на рис.5 положение $B_2O_1C_2$ показано пунктиром). Возьмем в качестве полюса точку O_1 и повернем брус по часовой стрелке на малый угол φ . Брус займет положение $B_1O_1C_1$.

Ввиду малости угла φ траектории движения точек B_2, j_2, C_2 при повороте бруса ВОС вокруг полюса O_1 заменим отрезками соответствующих касательных к дугам траекторий. Тогда узлы B_2, j_2, C_2 займут положения B_1, j_1, C_1 . Поворот бруса ВОС вокруг точки O_1 на угол φ вызовет приращение горизонтального перемещения узла В:

$$\Delta u = (H_2 - H_1) \operatorname{tg} \varphi \approx (H_2 - H_1) \varphi, \quad (a)$$

а также приращения вертикальных перемещений узлов j и C :

$$\Delta v_j = v_j - v_0 = (a_1 + a_2) \operatorname{tg} \varphi \approx (a_1 + a_2) \varphi, \quad (b)$$

$$\Delta v_c = v_c - v_0 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \operatorname{tg} \varphi \approx (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \varphi. \quad (c)$$

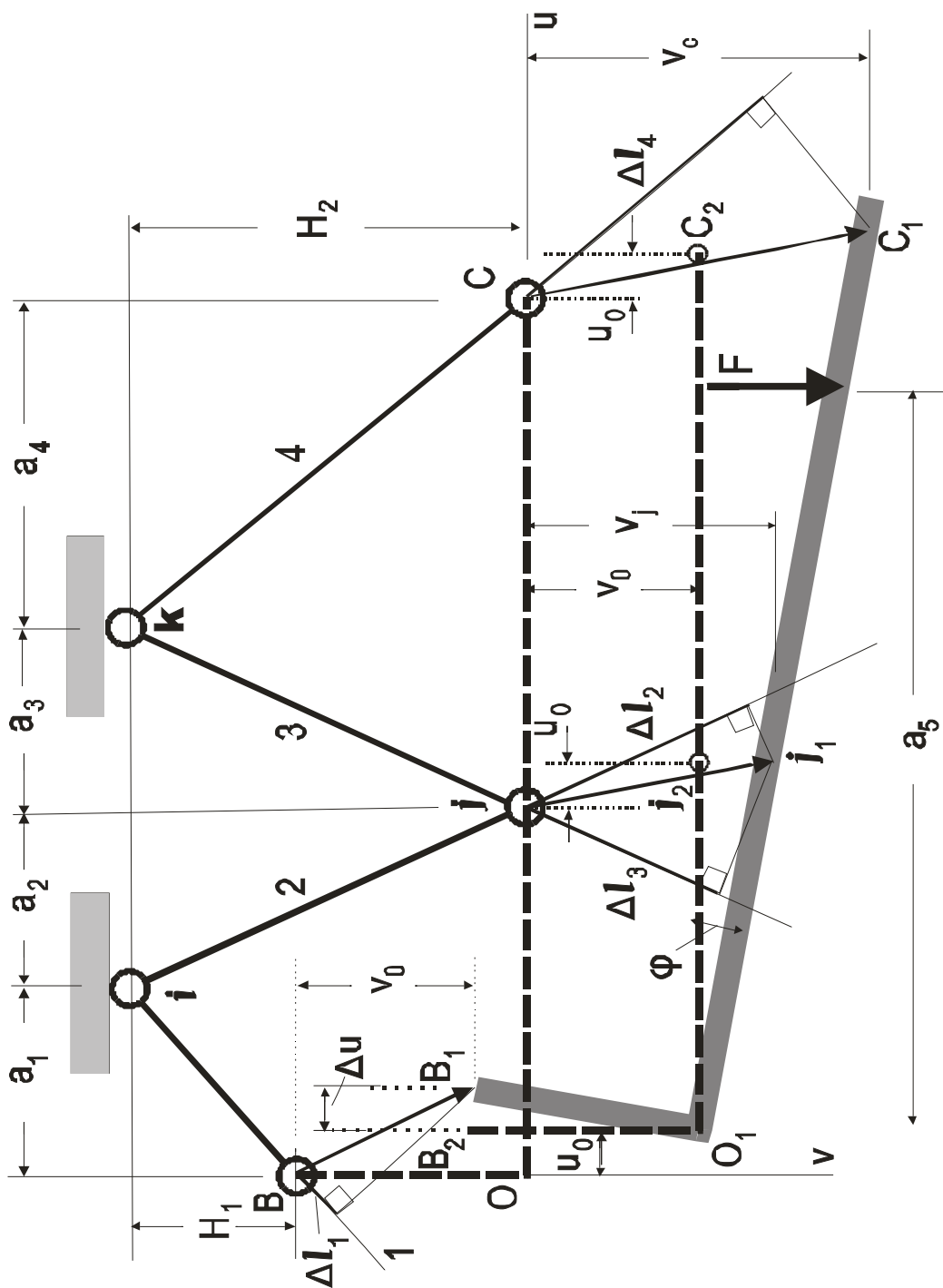


Рис.5. План перемещений бруса ВОС (повернуто на 90°).

Полные перемещения узлов В, j, С в результате поступательного и вращательного движений абсолютно жесткого бруса ВОС можно определить суммированием горизонтальных и вертикальных составляющих:

- узел В: $u_B = u_0 + \Delta u,$ $v_B = v_0;$
- узел j: $u_j = u_0,$ $v_j = v_0 + \Delta v_j;$
- узел С: $u_C = u_0,$ $v_C = v_0 + \Delta v_C.$

Ввиду малости полных перемещений узлов В, j, С изменениями углов α_k , $k = 1, 2, 3, 4$, пренебрегаем и направления стержней 1-4 на рис.5 принимаем по недеформированной схеме (рис.1).

Схема на рис.5 имеет название – план перемещений. Векторы перемещений $\vec{BB}_1, \vec{jj}_1, \vec{CC}_1$ показаны на рис.5 стрелками. Как видно из рис.5, проекции этих перемещений на направления стержней 1-4 дают удлинения или укорочения стержней Δl_k , $k = 1, 2, 3, 4$; согласно схеме перемещений на рис.5 все стержни удлиняются.

Выразим удлинения стержней Δl_k через полные горизонтальные и вертикальные перемещения узлов В, j, С, пользуясь тем, что проекция вектора на какое-либо направление равна алгебраической сумме проекций его составляющих.

Имеем:

$$\Delta l_1 = -(u_0 + \Delta u)\cos\alpha_1 + v_0\sin\alpha_1 = -0,707[(u_0 + \Delta u) - v_0], \quad (5)$$

$$\Delta l_2 = u_0\cos\alpha_2 + v_j\sin\alpha_2 = 0,6u_0 + 0,8v_j, \quad (6)$$

$$\Delta l_3 = -u_0\cos\alpha_3 + v_j\sin\alpha_3 = -0,53u_0 + 0,848v_j, \quad (7)$$

$$\Delta l_4 = u_0\cos\alpha_4 + v_c\sin\alpha_4 = 0,658u_0 + 0,753v_c, \quad (8)$$

На рис.6 показано геометрическое построение приращения Δl_2 длины стержня № 2, записанное в соотношении (6).

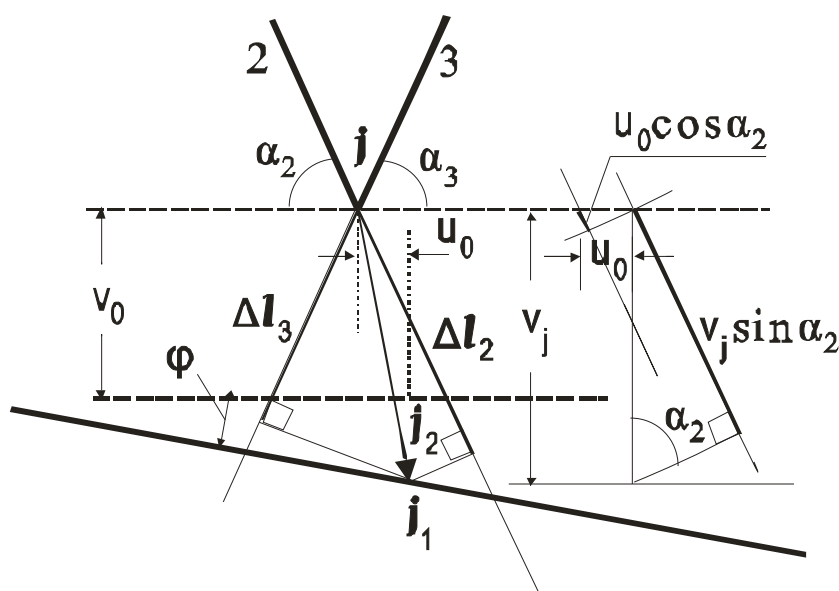


Рис.6. Схема к определению Δl_2 .

Уравнения (6), (7) могут быть разрешены относительно u_0 и v_j :

$$u_0 = 0,909\Delta l_2 - 0,857\Delta l_3, \quad (9)$$

$$v_j = 0,568\Delta l_2 + 0,643\Delta l_3 . \quad (10)$$

Из уравнения (b) можно выразить угол поворота φ : $\varphi = (v_j - v_0)/(a_1+a_2)$. Подставив это φ в уравнение (a), выражаем Δu через v_j, v_0 :

$$\Delta u = (v_j - v_0)(H_2 - H_1) / (a_1+a_2) = 0,4v_j - 0,4v_0 . \quad (11)$$

Из подобия треугольников на плане перемещений конструкции на рис.5 можно вывести отношение:

$$(v_j - v_0) / (v_c - v_0) = (a_1+a_2) / (a_1+a_2+a_3+a_4) = 5/11. \quad (12)$$

Из соотношения (12) получается:

$$v_c = 2,2v_j - 1,2v_0. \quad (13)$$

Подставив (10) в (11) и (13), найдем:

$$\Delta u = 0,227\Delta l_2 + 0,257\Delta l_3 - 0,4v_0 , \quad (14)$$

$$v_c = 1,25\Delta l_2 + 1,415\Delta l_3 - 1,2v_0 . \quad (15)$$

Далее выражение (14) для Δu внесем в уравнение (5), а выражение (15) для v_c – в (8); получим систему уравнений для определения u_0, v_0 :

$$-0,707u_0 + 0,99v_0 = \Delta l_1 + 0,16\Delta l_2 + 0,182\Delta l_3, \quad (16)$$

$$0,658u_0 - 0,904v_0 = -0,941\Delta l_2 - 1,065\Delta l_3 + \Delta l_4 .$$

Из системы (16) определим u_0 :

$$u_0 = 75,333\Delta l_1 - 65,583\Delta l_2 - 74,167\Delta l_3 + 82,5\Delta l_4 . \quad (17)$$

Приравнявая выражения u_0 из соотношений (17) и (9), получим уравнение совместности перемещений:

$$\Delta l_1 - 0,883\Delta l_2 - 0,973\Delta l_3 + 1,095\Delta l_4 = 0. \quad (18)$$

В последнем уравнении все члены поделены на коэффициент при Δl_1 .

3.3. Определение усилий в стержнях. Используя закон Гука

$$\Delta l_k = N_k l_k / (E_k A_k), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (19)$$

преобразуем уравнение совместности деформаций (18) к усилиям:

$$\frac{l_1}{EA_1} N_1 - 0,883 \frac{l_2}{EA_2} N_2 - 0,973 \frac{l_3}{EA_3} N_3 + 1,095 \frac{l_4}{EA_4} N_4 = 0. \quad (20)$$

После умножения всех членов уравнения (20) на EA_1/l_1 , подстановки заданных отношений площадей поперечных сечений стержней A_k/A_1 ($k = 2,3,4$) и присоединения уравнений равновесия, приходим к линейной алгебраической системе уравнений относительно усилий N_k :

$$\begin{aligned} N_1 - 1,300N_2 - 1,081N_3 + 1,211N_4 &= 0, \\ 2,332N_3 + 2,071N_4 &= 3,5F, \end{aligned} \quad (21)$$

$$- 2,475N_1 + \quad \quad \quad + 2,258N_4 = 2F,$$

$$- 1,944N_1 - 2,2N_2 \quad \quad \quad = 0,75F.$$

Решив систему (21) одним из известных способов, найдем:

$$N_1 = - 0,165F, \quad N_2 = - 0,195F, \quad N_3 = 0,875F, \quad N_4 = 0,705F. \quad (22)$$

Из соотношений (22) вытекает, что стержни 1 и 2 сжаты.

Для проверки правильности определения усилий N_k (22) выберем уравнения равновесия, не использованные при составлении (21):

– сумму проекций всех сил, действующих на абсолютно жесткий брус, на вертикальную ось:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= N_1 \sin \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + N_3 \sin \alpha_3 + N_4 \sin \alpha_4 - F = \\ &= - (0,165F) \cdot 0,707 + (- 0,195F) \cdot 0,8 + (0,875F) \cdot 0,848 + (0,705F) \cdot 0,753 - F = \\ &= - 0,117F - 0,156F + 0,742F + 0,531F - F = 1,00021F - F = 2,1 \cdot 10^{-4}F \approx 0; \end{aligned} \quad (23)$$

– сумму проекций всех сил, действующих на абсолютно жесткий брус, на горизонтальную ось:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= N_1 \cos \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3 - N_4 \cos \alpha_4 = \\ &= (- 0,165F) \cdot 0,707 - (- 0,195F) \cdot 0,6 + (0,875F) \cdot 0,53 - (0,705F) \cdot 0,658 = \\ &= - 0,117F - 0,117F + 0,464F - 0,464F = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом ошибок округлений при вычислениях можно принять значения N_k ($k = 1, 2, 3, 4$) по (22).

Таким образом, при $F = 200$ кН с учетом принятых направлений векторов на рис.4 усилия N_k получают значения:

$$N_1 = -32,8\text{кН}, \quad N_2 = -39,2\text{кН}, \quad N_3 = 174,8\text{кН}, \quad N_4 = 141,2\text{кН}.$$

4. Определение усилий в стержнях статически неопределимой шарнирно-стержневой системы методом сил.

4.1. *Метод сил для шарнирно-стержневой системы.* В общем случае каноническая система метода сил для плоской конструкции имеет вид:

$$\sum_m \delta_{jm} X_m + \Delta_{jp} = 0, \quad (25)$$

где

$$\delta_{jm} = \sum_n \int_{(l_n)} \left[\frac{\bar{M}_j \bar{M}_m}{EJ_n} + \frac{\bar{N}_j \bar{N}_m}{EA_n} + K_Q \frac{\bar{Q}_j \bar{Q}_m}{GA_n} \right] dz; \quad (26)$$

$$\Delta_{jp} = \sum_n \int_{(l_n)} \left[\frac{M_p \bar{M}_j}{EJ_n} + \frac{N_p \bar{N}_j}{EA_n} + K_Q \frac{Q_p \bar{Q}_j}{GA_n} \right] dz; \quad j=1,2,\dots \quad (27)$$

$\bar{M}_j, \bar{Q}_j, \bar{N}_j$ – эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, обусловленные действием на основную систему единичной силы $\bar{X}_j = 1$;

M_p, Q_p, N_p – эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, обусловленные действием заданной обобщенной силы $P = \{q, F, M\}$ на основную систему; E, G – модули Юнга и сдвига; J_n, A_n – момент инерции и площадь поперечного сечения n -го стержня; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения на сдвиговые деформации; l_n – длина участка стержня, в пределах которого остаются неизменными внешние силы, поперечное сечение стержня и механические свойства материала.

Поскольку в стержнях шарнирно-стержневой системы отличны от нуля только продольные силы, причем в пределах участков интегрирования продольные силы имеют постоянное значение, каноническая система уравнений (25) упрощается.

Выберем в качестве "лишней" неизвестной продольную силу в 1-ом стержне: $X_1 \equiv N_1$, а основную систему – по рис.7, отбросив 1-ый стержень.

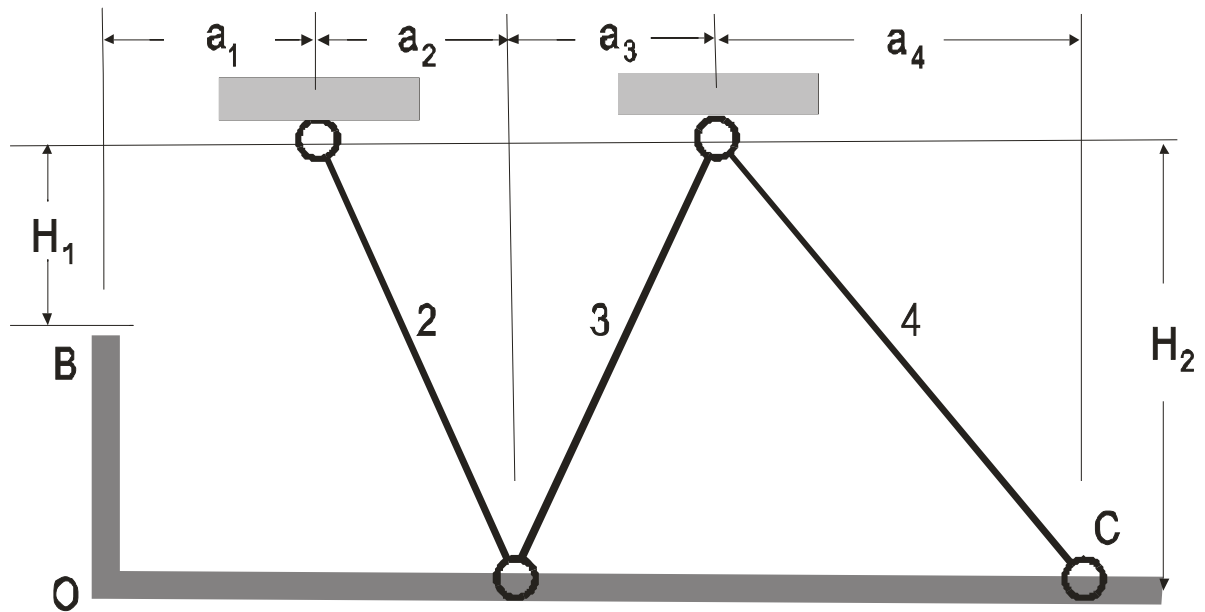


Рис.7. Основная система.

Эквивалентная система (рис.8) получается из основной системы (рис.7) добавлением X_1 и F .

Рассекаем 1-ый стержень возле шарнира i и прикладываем две противоположно направленные силы X_1 и X_1 к шарниру и к сечению. Относительное (взаимное) перемещение сечения равно нулю, поэтому единственное каноническое уравнение метода сил принимает вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (28)$$

где δ_{11} – перемещение узла i в основной системе под действием силы $\bar{X}_1 = 1$ по направлению стержня 1:

$$\delta_{11} = \sum_{m=1}^4 \int_{(l_m)} \frac{\bar{N}_m \bar{N}_m}{EA_m} dz = \sum_{m=1}^4 \frac{\bar{N}_m^2}{EA_m} l_m; \quad (29)$$

Δ_{1p} – перемещение узла i в основной системе под действием заданной силы F по направлению стержня 1:

$$\Delta_{1p} = \sum_{m=2}^4 \int_{(l_m)} \frac{\bar{N}_m \bar{N}_{pm}}{EA_m} dz = \sum_{m=2}^4 \frac{\bar{N}_m N_{pm}}{EA_m} l_m; \quad (30)$$

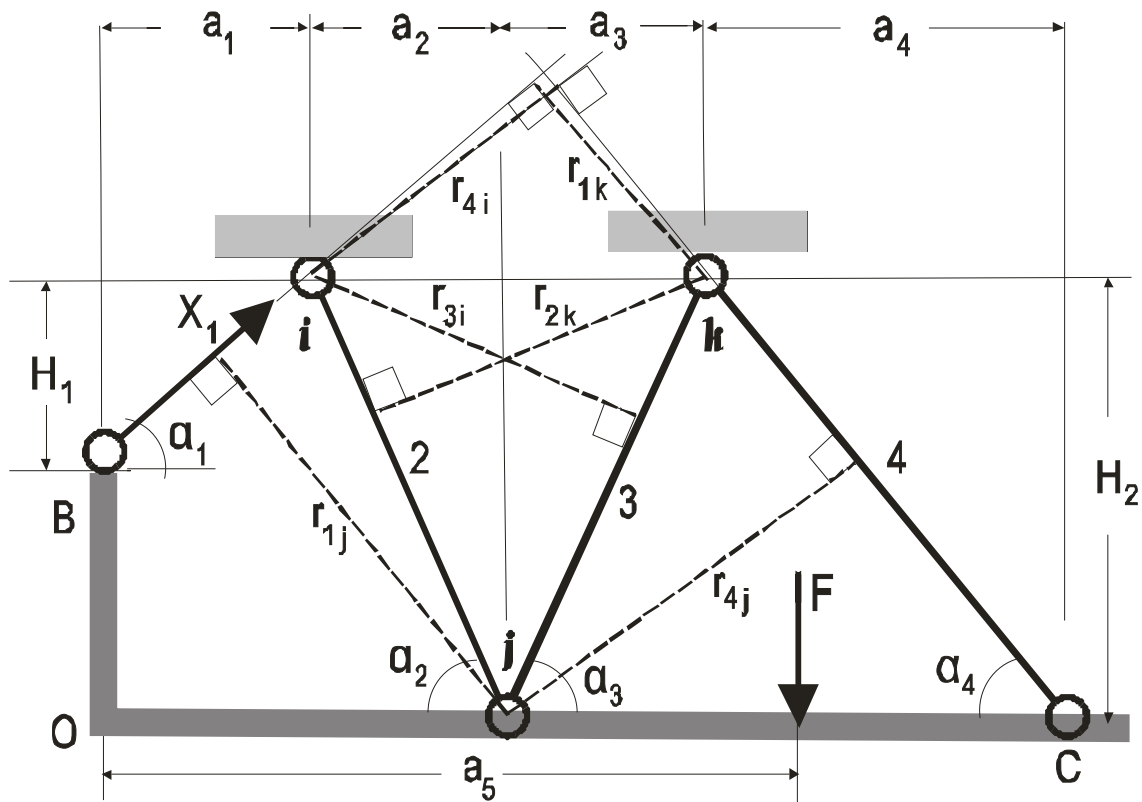


Рис.8. Эквивалентная система.

\bar{N}_m – эпюры продольных сил в стержнях 1, 2, 3, 4 от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ в основной системе;

N_{mp} – эпюры продольных сил в стержнях 2, 3, 4 от заданной силы F в основной системе.

4.2. *Определение усилий \bar{N}_m в основной системе при действии $\bar{X}_1 = 1$. Усилие в 1-ом стержне определяется непосредственно: $\bar{N}_1 = 1$. Для определения усилия \bar{N}_2 во 2-ом стержне составим сумму моментов всех сил, действующих на основную систему, относительно шарнира k :*

$$\sum M_{(k)} = 0: 1 \cdot r_{1k} + \bar{N}_2 \cdot r_{2k} = 0.$$

Опускаем перпендикуляр из шарнира k на направление 1-го стержня и получаем плечо r_{1k} силы \bar{N}_1 относительно шарнира k (см. рис.8) :

$$r_{1k} = (a_2 + a_3) \sin \alpha_1 = (1,5 + 1,25) \cdot 0,707 = 1,944 \text{ м.}$$

Опускаем перпендикуляр из шарнира k на направление 2-го стержня и получаем плечо r_{2k} силы \bar{N}_2 относительно шарнира k :

$$r_{2k} = (a_2 + a_3) \sin \alpha_2 = 2,75 \cdot 0,8 = 2,2 \text{ м.}$$

Усилие \bar{N}_2 во 2-ом стержне: $\bar{N}_2 = -\frac{r_{1k}}{r_{2k}} = -0,884.$

Для определения усилия \bar{N}_4 в 4-ом стержне составим сумму моментов действующих сил относительно шарнира j :

$$\sum M(j) = 0: \quad 1 \cdot r_{1j} - \bar{N}_4 \cdot r_{4j} = 0.$$

Опускаем перпендикуляры из точки j на направления 1-го и 4-го стержней и получаем плечи r_{1j} и r_{4j} сил \bar{N}_1 и \bar{N}_4 относительно шарнира j :

$$\begin{aligned} r_{1j} &= l_2 \sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2) = 2,5 \sin(3,142 - 0,785 - 0,927) = \\ &= 2,5 \sin(1,43) = 2,5 \cdot 0,99 = 2,475 \text{ м;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{4j} &= l_3 \sin(\pi - \alpha_3 - \alpha_4) = 2,358 \sin(3,142 - 1,012 - 0,852) = \\ &= 2,358 \sin(1,278) = 2,358 \cdot 0,957 = 2,257 \text{ м.} \end{aligned}$$

Далее потребуются плечи r_{3i} и r_{4i} сил N_3 и N_4 относительно шарнира i :

$$\begin{aligned} r_{3i} &= l_2 \sin(\pi - \alpha_2 - \alpha_3) = 2,5 \cdot (3,142 - 0,927 - 1,012) = \\ &= 2,5 \cdot \sin(1,203) = 2,332 \text{ м.} \end{aligned}$$

$$r_{4i} = (a_2 + a_3) \sin \alpha_4 = 2,75 \cdot \sin(0,852) = 2,07 \text{ м.}$$

Усилие \bar{N}_4 в 4-ом стержне: $\bar{N}_4 = \frac{r_{1j}}{r_{4j}} = \frac{2,475}{2,257} = 1,097.$

Для определения усилия \bar{N}_3 в 3-ом стержне составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось:

$$\sum F_x = 0: \quad 1 \cdot \cos \alpha_1 - \bar{N}_2 \cos \alpha_2 + \bar{N}_3 \cos \alpha_3 - \bar{N}_4 \cos \alpha_4 = 0,$$

$$\bar{N}_3 = (-\cos \alpha_1 + \bar{N}_2 \cos \alpha_2 + \bar{N}_4 \cos \alpha_4) / \cos \alpha_3 =$$

$$= (-0,707 - 0,884 \cdot 0,6 + 1,097 \cdot 0,658) / 0,53 = -0,972.$$

Таким образом, получаем:

$$\bar{N}_1 = 1; \quad \bar{N}_2 = -0,884; \quad \bar{N}_3 = -0,972; \quad \bar{N}_4 = 1,097.$$

4.3. *Определение усилий N_{mp} в стержнях основной системы при действии заданной силы F .* Расчетная схема представлена на рис.9.

Так как основная система – статически определимая, то для отыскания усилий N_{mp} , $m=2,3,4$, используем три уравнения равновесия.

$$\Sigma M_{(k)} = 0: \quad N_{2p} \cdot r_{2k} + F(a_5 - a_1 - a_2 - a_3) = 0,$$

$$N_{2p} \cdot 2,2 + F(4,5 - 1 - 1,5 - 1,25) = 0,$$

$$N_{2p} = -\frac{0,75}{2,2} F = -0,341F.$$

$$\Sigma M_{(j)} = 0: \quad N_{4p} \cdot r_{4j} - F(a_5 - a_1 - a_2) = 0; \quad 2,257 \cdot N_{4p} = 2F,$$

$$N_{4p} = \frac{2}{2,257} F = 0,886F.$$

$$\Sigma F_x = 0: \quad -N_{2p} \cos \alpha_2 + N_{3p} \cos \alpha_3 - N_{4p} \cos \alpha_4 = 0,$$

$$N_{3p} = (N_{2p} \cos \alpha_2 + N_{4p} \cos \alpha_4) / \cos \alpha_3 =$$

$$= (-0,341 \cdot 0,6 + 0,886 \cdot 0,658)F / 0,53 = \frac{0,378}{0,53} F = 0,714F.$$

Таким образом, имеем:

$$N_{2p} = -0,341F; \quad N_{3p} = 0,714F; \quad N_{4p} = 0,886F.$$

4.4. *Вычисление удельного смещения δ_{i1} .* Смещение δ_{i1} узла i в основной системе под действием силы $\bar{X}_1 = 1$ по направлению стержня 1 определяем по формуле (29):

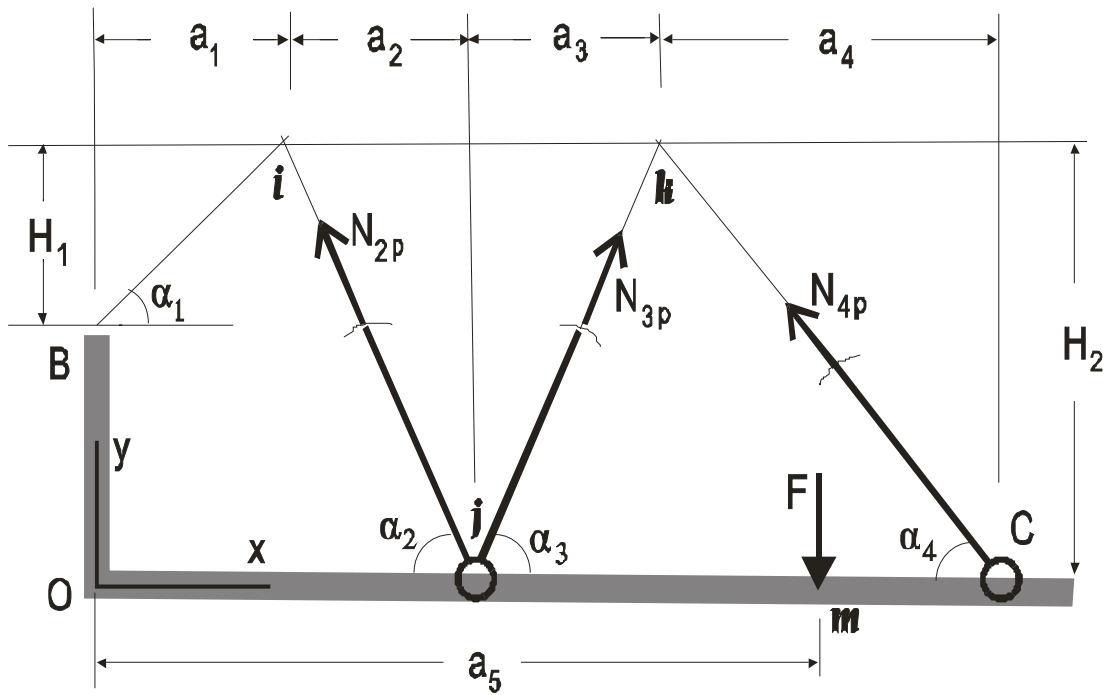


Рис.9. Определение усилий в основной системе от внешней силы F.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA_1} l_1 + \frac{\bar{N}_2^2}{EA_2} l_2 + \frac{\bar{N}_3^2}{EA_3} l_3 + \frac{\bar{N}_4^2}{EA_4} l_4 = \frac{1}{EA_1} \left[l_1 + \bar{N}_2^2 l_2 \frac{A_1}{A_2} + \bar{N}_3^2 l_3 \frac{A_1}{A_3} + \bar{N}_4^2 l_4 \frac{A_1}{A_4} \right] = \frac{1}{EA_1} \left[1,414 + (0,884)^2 \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{1,2} + (0,972)^2 \cdot 2,358 \cdot \frac{1}{1,5} + (1,097)^2 \cdot 2,658 \cdot \frac{1}{1,7} \right] = \frac{6,409}{EA_1}.$$

4.5. Вычисление смещения Δ_{1p} . Перемещение Δ_{1p} узла i в основной системе под действием заданной силы F по направлению стержня 1 определяем по формуле (30):

$$\Delta_{1p} = \frac{N_{2p} \bar{N}_2}{EA_2} l_2 + \frac{N_{3p} \bar{N}_3}{EA_3} l_3 + \frac{N_{4p} \bar{N}_4}{EA_4} l_4 = \frac{1}{EA_1} \left[\frac{N_{2p} \bar{N}_2 l_2 A_1}{A_2} + \frac{N_{3p} \bar{N}_3 l_3 A_1}{A_3} + \frac{N_{4p} \bar{N}_4 l_4 A_1}{A_4} \right] = \frac{F}{EA_1} \left[\frac{(-0,341)(-0,884)}{1,2} \cdot 2,5 + \right.$$

$$+ \frac{0,714 \cdot (-0,972)}{1,5} \cdot 2,358 + \frac{0,886 \cdot 1,097}{1,7} \cdot 2,658 \Big] = \frac{1,057F}{EA_1}.$$

4.6. *Определение “лишней” неизвестной $X_1 \equiv N_1$. Используя уравнение (28), находим:*

$$\frac{6,409}{EA_1} X_1 = -\frac{1,057F}{EA_1}, \quad X_1 = -\frac{1,057F}{6,409} = -0,165F.$$

4.7. *Определение усилий во 2-ом, 3-ем и 4-ом стержнях. Используем эквивалентную систему на рис.8.*

$$\Sigma M(k) = 0: X_1 \cdot r_{1k} + N_2 \cdot r_{2k} + F(a_5 - a_1 - a_2 - a_3) = 0,$$

$$N_2 = -((-0,165F) \cdot 1,944 + 0,75F) / 2,2 = -0,195F.$$

$$\Sigma M(j) = 0: X_1 r_{1j} - N_4 \cdot r_{4j} + F(a_5 - a_1 - a_2) = 0,$$

$$N_4 = ((-0,165F) \cdot 2,475 + 2F) / 2,257 = 0,705F.$$

$$\Sigma M(i) = 0: N_3 r_{3i} + N_4 \cdot r_{4i} - F(a_5 - a_1) = 0,$$

$$N_3 = -(2,07 \cdot 0,705F - 3,5F) / 2,332 = 0,875F.$$

Таким образом, усилия, определенные методом сил, имеют значения:

$$N_1 = -0,165F; \quad N_2 = -0,195F; \quad N_3 = 0,875F; \quad N_4 = 0,705F.$$

Эти значения совпадают с полученными в п.3, так как задача имеет единственное решение.

5. **Определение усилий в статически неопределимой шарнирно - стержневой системе с помощью теоремы Кастильяно.**

Согласно теореме Кастильяно, обобщенное перемещение Δ_m точки m упругого тела, закрепленного в пространстве, по направлению обобщенной силы P_m можно определить как частную производную от потенциальной энергии деформации тела U по обобщенной силе P_m :

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (31)$$

Потенциальная энергия деформации плоской упругой стержневой конструкции, состоящей из n стержней, выражается через внутренние усилия:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \left(\frac{N_k^2}{EA_k} + \frac{M_k^2}{EJ_k} + k_Q \frac{Q_k^2}{GA_k} \right) dz, \quad (32)$$

где M_k , Q_k , N_k – эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в стержнях; E , G – модули Юнга и сдвига; J_k , A_k – момент инерции и площадь поперечного сечения k -го стержня; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения на сдвиговые деформации; l_n – длина участка стержня, в пределах которого остаются неизменными внешние силы, поперечное сечение стержня и механические свойства материала.

Поскольку в стержнях шарнирно-стержневой системы отличны от нуля только продольные силы, причем в пределах участков интегрирования продольные силы имеют постоянное значение, потенциальная энергия деформации выражается простой формулой:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{N_k^2 l_k}{EA_k}. \quad (33)$$

Перемещение Δ_m точки m шарнирно-стержневой системы можно определить как частную производную от потенциальной энергии деформации тела U (33) по силе P_m :

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m} = \sum_{k=1}^n \frac{N_k l_k}{E_k A_k} \cdot \frac{\partial N_k}{\partial P_m}. \quad (34)$$

Для того чтобы фактически вычислить перемещение Δ_m , необходимо выразить силы N_k через P_m : $N_k = N_k(P_1, P_2, \dots, P_j)$.

Рассматриваемая шарнирно-стержневая конструкция (рис.1) – один раз статически неопределимая, поэтому для "раскрытия" ее статической неопределимости необходимо составить дополнительное уравнение, выражающее заранее известное перемещение какой-либо точки конструкции.

Обозначим перемещение шарнира i по направлению продольной силы N_1 в первом стержне символом Δ_1 (см. рис.10).

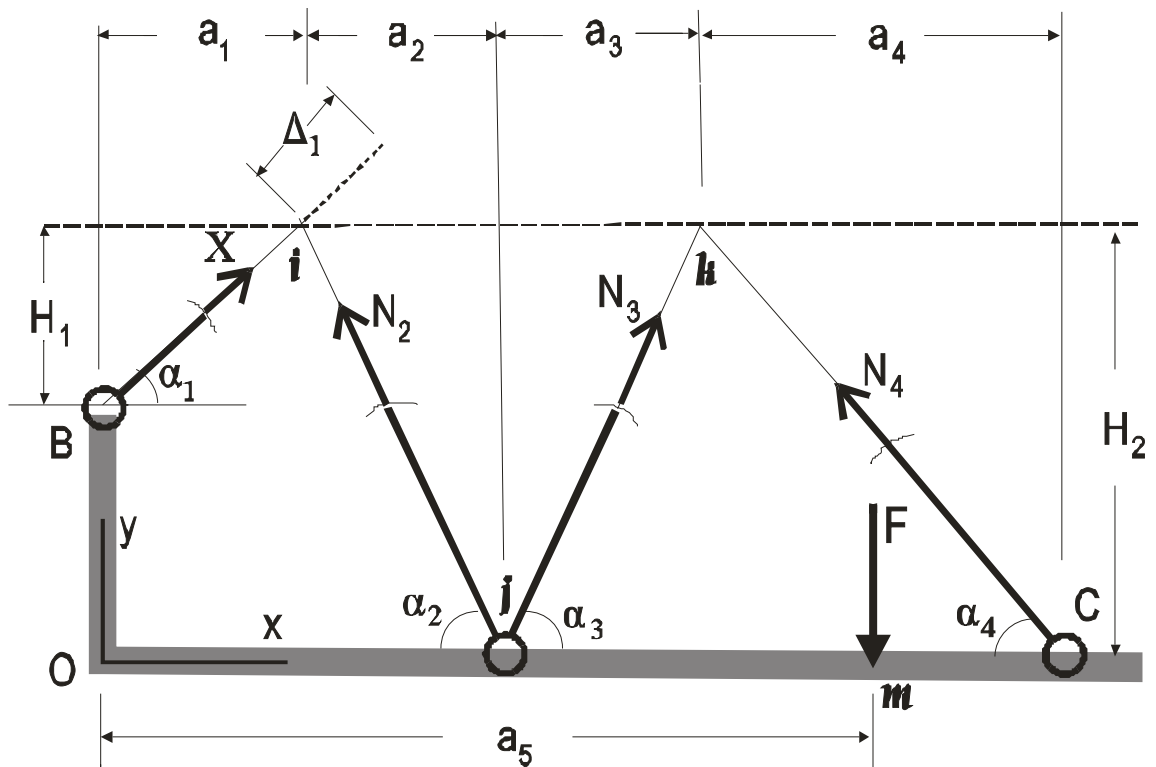


Рис.10. Использование теоремы Кастильяно.

Продольную силу N_1 обозначим буквой X : $X \equiv N_1$. Перемещение Δ_1 шарнира i по направлению силы X заведомо равно нулю: $\Delta_1 = 0$. По теореме Кастильяно выражаем перемещение Δ_1 через искомые усилия и заданную внешнюю силу F :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{N_k l_k}{E_k A_k} \cdot \frac{\partial N_k}{\partial P_m} = 0, \quad (35)$$

где $N_k = N_k(X, F)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

С помощью трех уравнений равновесия продольные силы N_2, N_3, N_4 можно выразить через искомое усилие X и заданную внешнюю силу F , после подстановки которых в уравнение (35) можно найти X .

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_{(i)} = 0: N_3 r_{3i} + N_4 \cdot r_{4i} - F(a_5 - a_1) = 0,$$

$$\sum M_{(j)} = 0: X \cdot r_{1j} - N_4 \cdot r_{4j} + F(a_5 - a_1 - a_2) = 0, \quad (36)$$

$$\sum M_{(k)} = 0: X \cdot r_{1k} + N_2 \cdot r_{2k} + F(a_5 - a_1 - a_2 - a_3) = 0.$$

Полагая известными X и F , решаем систему уравнений (36) относительно N_2, N_3, N_4 . После подстановки числовых значений r_{ij} и a_m , получаем:

$$N_2 = -(0,34F + 0,884X); N_3 = 0,714F - 0,974X; N_4 = 0,886F + 1,097X. (37)$$

Подставив эти выражения N_2, N_3, N_4 под знак производной в уравнении (35), при $P_m = X$ найдем:

$$\frac{Xl_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} \cdot (-0,884) + \frac{N_3 l_3}{EA_3} \cdot (-0,974) + \frac{N_4 l_4}{EA_4} \cdot 1,097 = 0. \quad (38)$$

Далее с учетом соотношений между площадями поперечных сечений стержней ($A_2/A_1 = 1,2$; $A_3/A_1 = 1,5$; $A_4/A_1 = 1,7$) и выражений N_2, N_3, N_4 (37) преобразуем уравнение (38):

$$1,414X + 1,842 \cdot (0,34F + 0,864X) - 1,531 \cdot (0,714F - 0,974X) + 1,715 \cdot (0,886F + 1,097F) = 0; \quad 6,414X = -1,052F.$$

Из последнего уравнения находим усилие в 1-ом стержне:

$$N_1 \equiv X = -0,165F.$$

Усилия в остальных стержнях находим по выражениям (37):

$$\begin{aligned} N_2 &= -(0,34F + 0,884 \cdot (-0,164F)) = -0,195F; \\ N_3 &= 0,714F - 0,974 \cdot (-0,164F) = 0,875F; \\ N_4 &= 0,886F + 1,097 \cdot (-0,164F) = 0,705F. \end{aligned} \quad (39)$$

Эти значения совпадают с полученными в п.3 и в п.4, так как задача имеет единственное решение.

Рекомендация. Плечи r_{ij} сил N_i относительно шарниров j определялись аналитически. Приблизительно числовые значения r_{ij} можно найти графически. С этой целью необходимо в крупном масштабе вычертить схему конструкции (например, эквивалентную систему на рис.8) на миллиметровке, опустить соответствующие перпендикуляры из шарниров на направления сил и измерить их.

6. Подбор формы и размеров поперечных сечений стержней.

При действии на конструкцию (рис.1) внешней силы $F = 200$ кН усилия в стержнях, рассчитанные по упругой стадии деформирования, принимают следующие числовые значения: $N_1 = -32,8$ кН, $N_2 = -39,2$ кН, $N_3 = 174,8$ кН, $N_4 = 141,2$ кН.

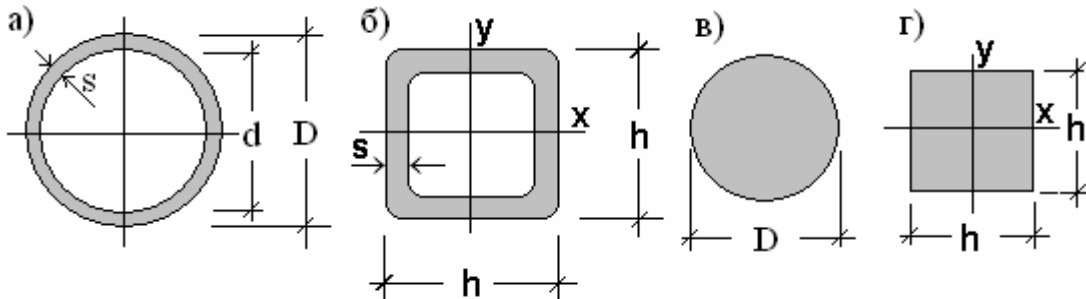


Рис.11. Формы поперечных сечений стержней.

В реальном проектировании, исходя из технологической целесообразности, форму и размеры поперечных сечений всех стержней конструкции следует принять одинаковой. Однако в учебных целях мы подберем для каждого стержня конструкции свои форму и размеры поперечных сечений.

Поскольку 1-ый и 2-ой стержни оказались сжатыми, для них выбираем кольцевой (рис.11,а) и коробчатый (рис.11,б) профили соответственно; для растянутых стержней 3 и 4 принимаем сплошные круглый (рис.11,в) и квадратный (рис.11,г) профили соответственно.

Находим наиболее напряженный стержень:

$$\sigma^{(1)} = -\frac{0,164F}{A_1}, \quad \sigma^{(2)} = -\frac{0,196F}{A_2} \frac{A_1}{A_1} = -\frac{0,196F}{1,20A_1} = -\frac{0,163F}{A_1};$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{0,874F}{A_3} \frac{A_1}{A_1} = \frac{0,874F}{1,50A_1} = \frac{0,583F}{A_1}, \quad \sigma^{(4)} = \frac{0,706F}{A_4} \frac{A_1}{A_1} = \frac{0,415F}{A_1}.$$

Как видим, $\sigma^{(3)} > \sigma^{(4)} > |\sigma^{(1)}| > |\sigma^{(2)}|$, следовательно, наиболее напряженным является 3-й стержень.

Используя условие прочности (5.1) и соотношения площадей поперечных сечений стержней, найдем необходимые площади:

$$A_1' = 0,583 \cdot 200 \cdot 10^3 / (160 \cdot 10^6) = 0,728 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,28 \text{ см}^2;$$

$$A_2' = 1,20 \cdot 7,28 = 8,74 \text{ см}^2; \quad A_3' = 1,50 \cdot 7,28 = 10,93 \text{ см}^2;$$

$$A_4' = 1,70 \cdot 7,28 = 12,38 \text{ см}^2.$$

Обращаясь к сортаменту стальных электросварных труб (Приложение 5 – ГОСТ 10704-76), для требуемой площади 1-го стержня $A_1 = 7,28 \text{ см}^2$ выбираем ближайший больший диаметр $D = 70 \text{ мм}$. Другие геометрические характеристики трубы: площадь $A_1 = 7,3 \text{ см}^2$, толщина стенки $s = 3,5 \text{ мм}$, радиус инерции $i = 2,4 \text{ см}$.

Для 2-го стержня по Приложению 6 выбираем квадратный гнутый замкнутый сварной коробчатый профиль с площадью сечения $A_2 = 9,24 \text{ см}^2$. Другие геометрические характеристики коробчатого профиля: высота $h = 80 \text{ мм}$, толщина стенки $s = 3 \text{ мм}$, осевой момент инерции $J = 91,4 \text{ см}^4$, радиус инерции $i = 3,14 \text{ см}$.

Для 3-го стержня по Приложению 7 (ГОСТ 2590-71*) выбираем круглый профиль диаметром $D = 38 \text{ мм}$ с площадью сечения $A_3 = 11,34 \text{ см}^2$.

Для 4-го стержня по ГОСТ 2591-71 выбираем квадратный профиль с высотой ребра $h = 35 \text{ мм}$ и площадью сечения $A_4 = 12,25 \text{ см}^2$.

(Заметим, что по ГОСТ 2591-71 высота ребра квадратного профиля h изменяется от 5 до 80 мм с шагом 1 мм и пропусками размеров $h = 27, 43, 44, 47, 53, 54, 56, 62, 67, 68, 69, 72 \div 77, 79 \text{ мм}$; от 80 до 150 мм с шагом 5 мм и пропуском размера $h = 135 \text{ мм}$; от 150 до 200 мм с шагом 10 мм, без пропуска размеров).

Соотношения площадей подобранных профилей $A_2/A_1 = 1,26$; $A_3/A_1 = 1,55$, $A_4/A_1 = 1,68$ достаточно близки к заданным, поэтому перерасчет усилий не производим.

7. Проверка устойчивости сжатых стержней.

Сжатыми оказались 1-й и 2-й стержни. Устойчивость центрально сжатых стержней обеспечена, если выполнено условие:

$$\sigma^{(k)} = \frac{N_k}{A_k} \leq \varphi \sigma_{adm}, \quad (40)$$

где σ_{adm} – общее допускаемое напряжение; φ - коэффициент продольного изгиба (коэффициент снижения основного допускаемого напряжения), определяемый по Приложению 9 (СНиП П-23-84) в зависимости от гибкости λ стержня.

Гибкость стержня определяется по формуле $\lambda = \mu l / i_{min}$, где μ - коэффициент приведения длины стержня; i_{min} - минимальный радиус инерции сечения:

$$i_{min} = \sqrt{J_{min} / A}, \quad (41)$$

где J_{min} – минимальный момент инерции сечения.

В рассматриваемом примере $\mu = 1$.

Для 1-го стержня имеем:

$$J_{\min} = \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{D-2t}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14(7 \cdot 10^{-2})^4}{64} \left[1 - \left(\frac{70-7}{70} \right)^4 \right] =$$

$$= 40,52 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{40,52 \cdot 10^{-8} / 0,73 \cdot 10^{-3}} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \lambda = 1,414 / 2,4 \cdot 10^{-2} = 58,9.$$

По Приложению 9 (табл.72 СНиП) при $\sigma_y = 240$ МПа выбираем $\varphi = 0,80$. По формуле (40):

$$\sigma^{(1)} = \frac{32,8 \cdot 10^3}{0,731 \cdot 10^{-3}} = 45 \text{ МПа} < \varphi \cdot \sigma_{\text{adm}} = 128 \text{ МПа}.$$

Устойчивость 1-го стержня обеспечена.

Для 2-го стержня имеем: $A_2 = 9,24 \text{ см}^2$, $i = 3,14 \text{ см}$,
 $\lambda = 2,5 / 3,14 \cdot 10^{-2} = 80$. По Приложению 9 (табл.72 СНиП) при $\sigma_y = 240$ МПа
выбираем $\varphi = 0,73$. По формуле (40):

$$\sigma^{(2)} = \frac{39,2 \cdot 10^3}{0,924 \cdot 10^{-3}} = 42 \text{ МПа} < \varphi \cdot \sigma_{\text{adm}} = 117 \text{ МПа}.$$

Устойчивость 2-го стержня обеспечена.

Расчеты закончены.

Задание № 8. Проектировочный расчет стержневых систем по предельному равновесию

1. **Формулировка задания.** В задании № 8 необходимо определить размеры поперечных сечений стержней статически неопределимой стержневой конструкции (ячейки фермы) расчетом по допускаемым напряжениям и методом предельного равновесия.

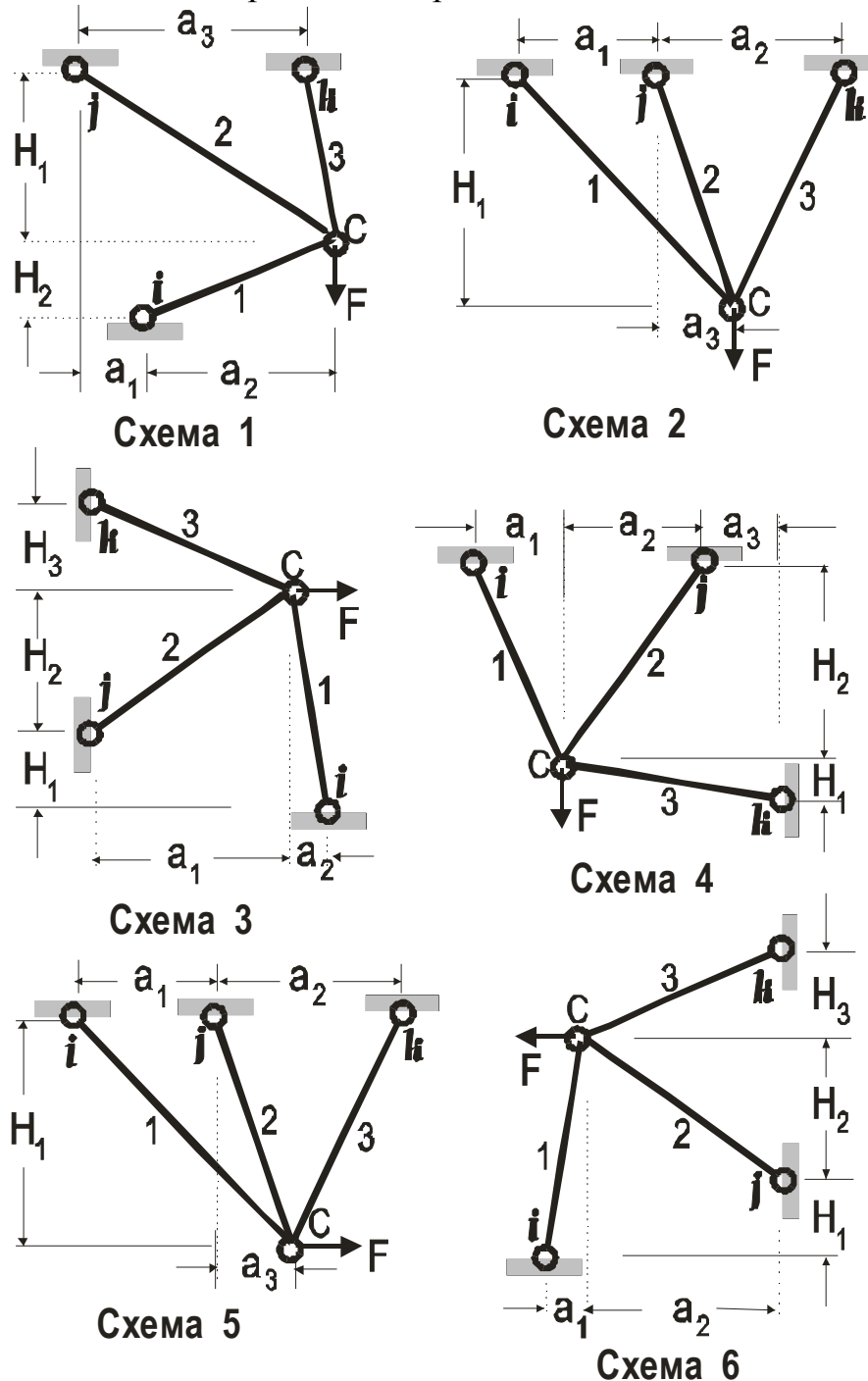


Рис.1,а. Расчетные схемы 1÷6 к заданию № 8.

Задачами работы являются:

- упругий проектировочный расчет конструкции (по допускаемым напряжениям);

- определение размеров поперечных сечений стержней конструкции с учетом упруго-пластических деформаций по предельным нагрузкам двумя способами: последовательных догрузений и кинематическим или статическим;
- сравнительная оценка металлоемкости конструкции, рассчитанной по допускаемым напряжениям и по предельным нагрузкам.

Расчетные схемы выбираются по рис.1,а (схемы 1÷6) или рис.1,б (схемы 7÷10) по последней цифре (n_0) трехзначного шифра $n_2n_1n_0$, который выдает преподаватель.

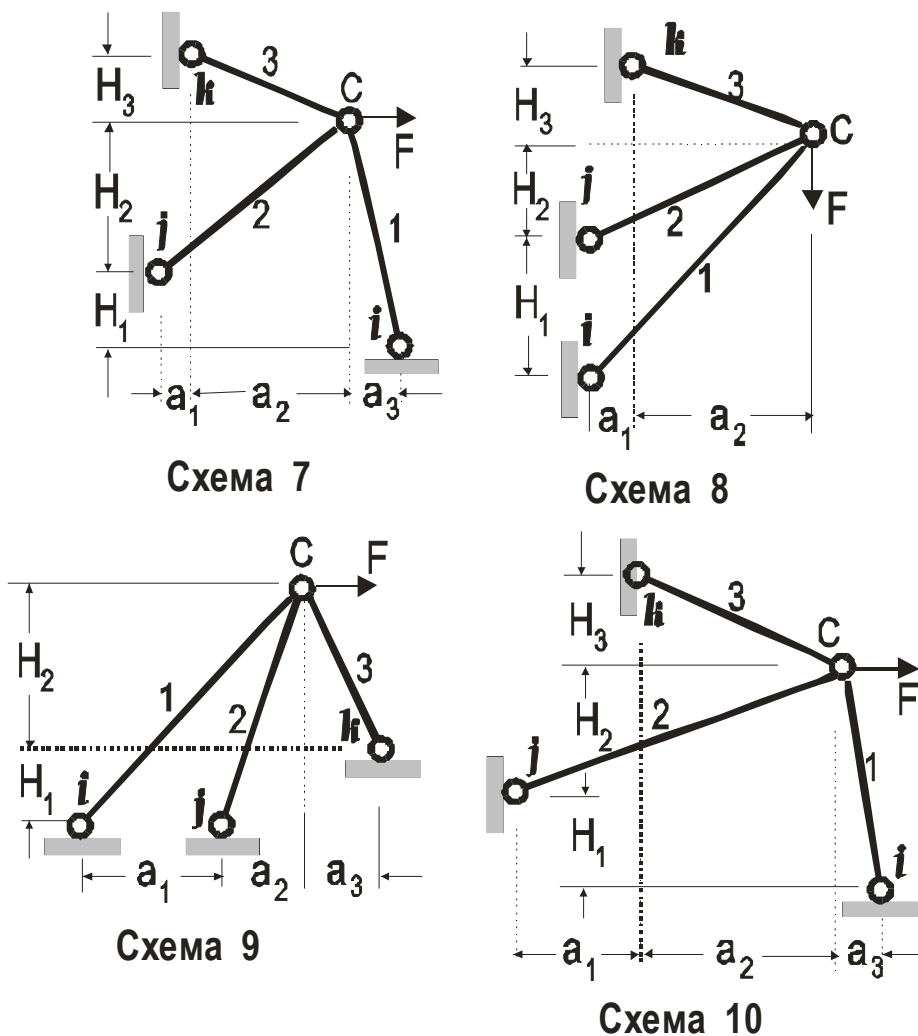


Рис.1,б. Расчетные схемы 7÷10 к заданию № 8.

Исходные данные для работы выбираются из табл.1 по трем цифрам n_2 , n_1 и n_0 трехзначного шифра, выданного преподавателем.

Стержни стальные. Предел текучести стали $\sigma_y = 240$ МПа, допускаемое напряжение $\sigma_{adm} = 160$ МПа, коэффициент запаса прочности $n_y = 1,50$, модуль продольной упругости стали $E = 200$ ГПа.

При выполнении задания рекомендуется придерживаться той последовательности, в которой изложен пример расчета аналогичной конструкции в п.2.2.

Таблица 1

Проектировочный упруго-пластический расчет трехстержневой конструкции

n ₂	F, кН	$\frac{A_2}{A_1}$	$\frac{A_3}{A_1}$	n ₁	Размеры конструкции, м				n ₀	Схема, рис.1,2	a ₃	H ₃
					a ₁	a ₂	H ₁	H ₂				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	400	1,25	1,50	1	1,5	1,8	2,4	2,4	1	1	0,8(a ₁ +a ₂)	-
2	500	1,50	1,75	2	2,1	2,4	1,5	1,8	2	2	0,4a ₂	-
3	600	1,75	1,50	3	2,7	2,4	2,1	1,8	3	3	-	H ₁
4	700	1,50	1,25	4	2,4	2,1	1,8	2,7	4	4	a ₁	-
5	800	1,25	0,75	5	2,1	1,8	2,7	2,4	5	5	0,4a ₂	-
6	800	0,75	1,25	6	1,3	2,4	2,1	1,5	6	6	-	H ₁
7	700	1,25	1,50	7	1,2	1,8	2,4	3,0	7	7	1,25a ₁	H ₁
8	600	1,50	1,75	8	2,1	1,5	2,7	1,8	8	8	-	0,8H ₁
9	500	1,75	1,50	9	1,8	2,1	2,4	1,5	9	9	1,25a ₂	-
0	400	1,50	1,75	0	2,1	2,4	1,8	1,2	0	10	0,8a ₁	0,8H ₁

При оформлении выполненной работы в нее необходимо включить следующие рисунки:

- расчетную схему конструкции (аналогично рис.3);
- схему равновесия действующих сил (план сил) – рис. 4;
- план перемещений конструкции (аналогично рис.5);
- возможные схемы предельного деформированного состояния (рис.6), если используется кинематический способ определения размеров поперечных сечений.

В текст изложения выполненной работы включается таблица сравнительной оценки металлоемкости конструкции, рассчитанной по допускаемым напряжениям и по предельным нагрузкам (табл.2).

2. Основные гипотезы и допущения метода предельного равновесия. Теория предельного равновесия конструкций основана на положениях, в определенной степени идеализирующих свойства материала и условия работы отдельных элементов конструкций. В этой теории, как и вообще в механике деформируемого твердого тела, термины “сила” и “перемещение” следует понимать в обобщенном смысле. “Сила” – любая внешняя или внутренняя сила или их совокупность: сосредоточенные внешние силы F_e , распределенные по линии или поверхности силы q , пары сил с моментами M_e , продольные и поперечные силы N, Q , изгибающие или крутящие моменты M, T . “Перемещения” – деформации, соответствующие обобщенным силам в смысле определения работы сил. “Перемещения” обычно измеряются по направлению действия сил и представляют собой линейные и угловые деформации: удлинения Δl , прогибы v , изменения кривизны оси Δk , углы поворота сечений θ , углы закручивания φ .

Обобщенные перемещения, характеризующие конфигурацию конструкции в процессе деформирования под действием приложенных внешних сил, считаются малыми, так что при определении опорных реакций и внутренних усилий в стержнях можно использовать принцип отвердевания или начальных размеров, т.е. вести расчеты по недеформированной схеме.

Гипотезы плоских сечений при растяжении-сжатии, изгибе стержней и кручении валов, используемые в расчетах по упругой стадии деформирования, сохраняются и в расчетах по предельным нагрузкам.

Принимается, что материал конструкции обладает идеально упруго-пластическими свойствами. Связь напряжений с деформациями при одноосном растяжении или сжатии стандартного образца имеет вид прямолинейных отрезков (диаграмма Прандтля), представленный на рис.2. При растяжении или сжатии образца до предела текучести σ_y (отрезок 5-0-1 на рис.2) связь напряжений с деформациями отвечает закону Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad -\varepsilon_{el} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{el}, \quad (a)$$

где ε_{el} - предел упругих деформаций.

Пределы пропорциональности σ_{pr} , упругости σ_{el} и текучести σ_y на диаграмме Прандтля совпадают. Упрочнение материала при деформировании за пределом упругости ε_{el} не учитывается.

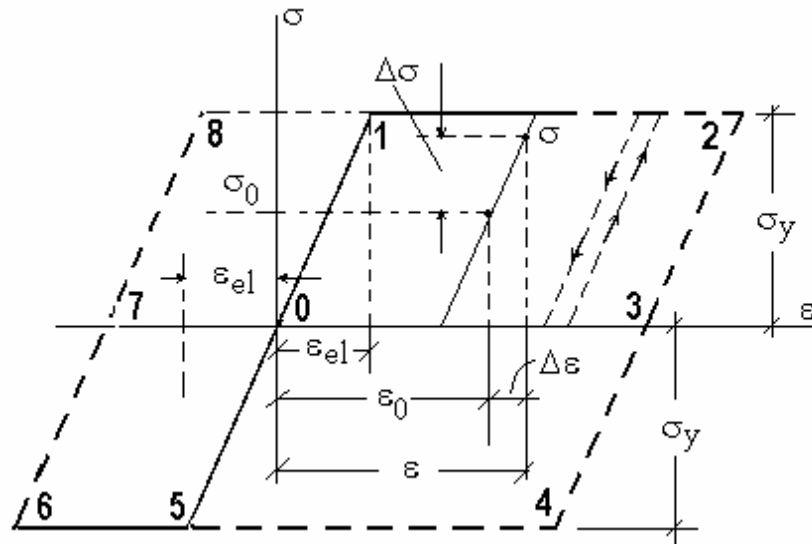


Рис.2. Диаграмма Прандтля.

При последующем монотонном растяжении или сжатии образца за пределами упругих деформаций ε_{el} (отрезки 1-2 и 5-6 на рис.2) напряжения остаются постоянными и равными пределу текучести σ_y :

$$\sigma = \sigma_y, \quad |\varepsilon| > \varepsilon_{el}, \quad \text{sign}(\varepsilon) \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} > 0, \quad (b)$$

где sign – знак ε : $\text{sign} \varepsilon = \varepsilon / |\varepsilon|$ или, по-другому, $\text{sign}(\varepsilon) = 1$, если $\varepsilon \geq 0$ и $\text{sign}(\varepsilon) = -1$, если $\varepsilon < 0$; t – параметр, например, время.

При разгрузке образца и последующем нагружении после деформирования за пределом упругости (отрезки 2-4 и 6-8 на рис.2) связь напряжений с деформациями отвечает закону Гука.

Таким образом, в зависимости от положения точки (ε, σ) на диаграмме Прандтля напряжения определяются по формуле:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{если } |\varepsilon| \leq \varepsilon_{el}; \\ \sigma_0 + E(\varepsilon - \varepsilon_0), & \text{если } |\varepsilon| > \varepsilon_{el} \text{ и } |\sigma| < \sigma_y; \\ \sigma_y \cdot \text{sign}(\varepsilon), & \text{если } |\varepsilon| > \varepsilon_{el} \text{ и } |\sigma| \geq \sigma_y \end{cases} \quad (c)$$

где σ_0 – предыдущее значение напряжений; ε_{el} – условный предел упругих деформаций; $\varepsilon_0, \varepsilon$ – предыдущее и последующее значения деформаций.

Упругие деформации настолько малы по сравнению с пластическими, что их можно не учитывать в изменениях геометрических размеров конструкции (геометрическая схема не изменяется), однако деформации пластичности могут быть любой величины, необходимой для реализации перераспределения напряжений.

Это предположение о так называемых идеально жестко-пластических свойствах фактически приводит к дальнейшему упрощению идеализированной диаграммы напряжений на рис.2, когда принимается, что при напряжениях $\sigma < \sigma_y$ никаких деформаций нет ($\varepsilon_{el} = 0$), а при напряжениях $\sigma = \sigma_y$ деформации могут принимать любые значения. Напряжений $\sigma > \sigma_y$ не может быть.

Строго говоря, подобная идеализация находится в противоречии с действительными физико-механическими свойствами материалов конструкций. Тем не менее, она существенно упрощает исследование стадии исчерпания несущей способности и дает результаты, весьма близкие к экспериментальным, получаемым для конструкций из различных материалов.

Внешнюю статическую нагрузку на конструкцию можно представлять обобщенной силой P , определяемой распределением нагрузки на конструкцию и соотношениями между ее характерными значениями.

Например, если внешняя нагрузка на конструкцию задана сосредоточенными силами F_1, F_2, \dots, F_n , сосредоточенными моментами M_1, M_2, \dots, M_j и распределенными нагрузками q_1, q_2, \dots, q_m , то в качестве обобщенной силы можно выбрать сосредоточенную силу $P = F_k$, и выразить все остальные нагрузки через P и характерный линейный размер l :

$$\begin{aligned} F_1 &= \kappa_1 P, F_2 = \kappa_2 P, \dots, F_k = P, \dots, F_n = \kappa_n P; \\ M_1 &= \kappa_{n+1} Pl, M_2 = \kappa_{n+2} Pl, \dots, M_j = \kappa_{n+j} Pl; \\ q_1 &= \kappa_{n+j+1} P/l, q_2 = \kappa_{n+j+2} P/l, \dots, q_m = \kappa_{n+j+m} P/l, \end{aligned} \quad (d)$$

где κ_i – числовые коэффициенты, $i = 1, 2, \dots, n+j+m$.

Предполагается, что обобщенная сила P прикладывается статически и возрастает от своего начального значения до предельного P_{lim} пропорционально параметру $\lambda = \lambda(t)$:

$$P_{lim} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_u} \lambda P = \lambda_u P, \quad (e)$$

где λ_u – предельное значение параметра λ : $0 < \lambda \leq \lambda_u$, определяемое в расчете.

При этом принимается, что распределение нагрузки и соотношения (d) между ее величинами остаются неизменными, т.е. $\kappa_i = \text{const}$.

Нагружение (нарастание обобщенной силы P от нуля до своего конечного значения), величина которого изменяется пропорционально одному параметру, называется *простым*.

В процессе нагружения конструкции, особенно за пределами упругости, ее элементы могут потерять устойчивость, вследствие чего будет исчерпана несущая способность; в связи с этим в процессе расчета необходимо проверять устойчивость сжатых элементов конструкции.

В частности, при наличии в составе конструкции сжатых, сжато-изогнутых или тонкостенных изгибаемых стержней открытого профиля необходимо, как и в расчете по допускаемым напряжениям, производить проверку устойчивости этих элементов и обеспечить ее конструктивными мерами.

Критерием прочности (несущей способности) конструкции служит предельная обобщенная сила P_{lim} (предельная нагрузка).

Предельной нагрузкой P_{lim} называется такое значение обобщенной внешней силы P , при котором конструкция переходит в предельное деформированное состояние, характеризующееся тем, что при бесконечно малом приращении ΔP предельной нагрузки P_{lim} ($P = P_{lim} + \Delta P$) конструкция либо разрушается, либо теряет свою геометрическую неизменяемость, либо становится неустойчивой, либо приобретает недопустимо большие деформации: $\Delta > \Delta_{adm}$.

Зная предельное значение обобщенной силы P_{lim} с помощью соотношений (d) можно найти предельные значения всех внешних сил:

$$\lim F_i = \kappa_i \lambda_u P, \quad \lim M_i = \kappa_{n+i} \lambda_u Pl, \quad \lim q_i = \kappa_{n+j+i} \lambda_u P/l. \quad (f)$$

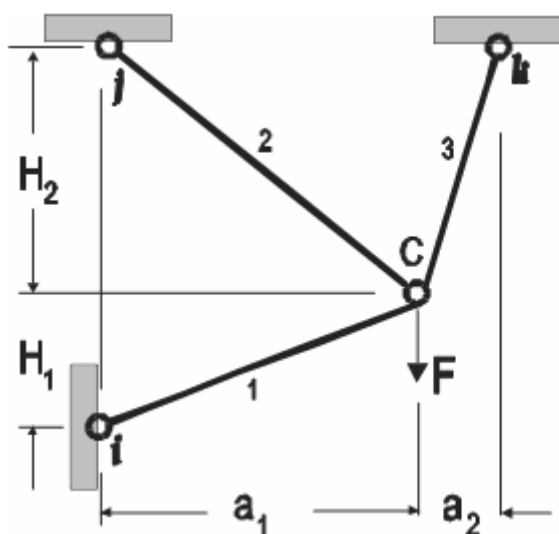
Если действующая на конструкцию внешняя обобщенная сила P не превосходит некоторой доли предельного значения, определяемой коэффициентом запаса прочности n , то несущая способность конструкции считается достаточной. Это значение обобщенной силы называется допускаемым и обозначается символом P_{adm} : $P_{adm} = P_{lim}/n$ (n – коэффициент запаса прочности).

Методом предельного равновесия для конструкций из пластичного материала с определенными механическими характеристиками (предел текучести σ_y , предел прочности σ_u , относительное остаточное удлинение ϵ_r) могут быть решены следующие задачи:

- при известных распределении статической внешней нагрузки, форме и размерах поперечных сечений конструкций отыскивается значение предельной нагрузки (определение несущей способности);
- при известных распределении и величине статической внешней нагрузки и форме конструкции определяются размеры ее поперечных сечений (проектировочный расчет).

Пример проектировочного упруго-пластического расчета.

Методику проектировочного упруго-пластического расчета (определения размеров поперечных сечений стержней) рассмотрим на примере системы, представленной на рис.3.



Три стальных стержня соединены между собой и с неподвижным недеформируемым основанием с помощью четырех цилиндрических шарниров i , j , k , C . Геометрия конструкции определяется размерами: $a_1 = 3$; $a_2 = 0,5$; $H_1 = 0,5$; $H_2 = 2$ м. Форма поперечных сечений стержней выбирается из стальных прокатных профилей. Соотношения между площадями поперечных сечений стержней заданы:

$$A_2/A_1 = 1/1,2; \quad A_3 = A_2 .$$

Рис.3. Ячейка фермы из трех стержней.

В общем узле C конструкция нагружена сосредоточенной силой $F = 320$ кН, направленной вертикально вниз.

Требуется подобрать форму и размеры поперечных сечений стержней конструкции расчетами по предельным нагрузкам тремя способами: последовательных догрузений, кинематическим и статическим; определить экономию металла, которая может быть получена в результате расчетов по предельным нагрузкам по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям.

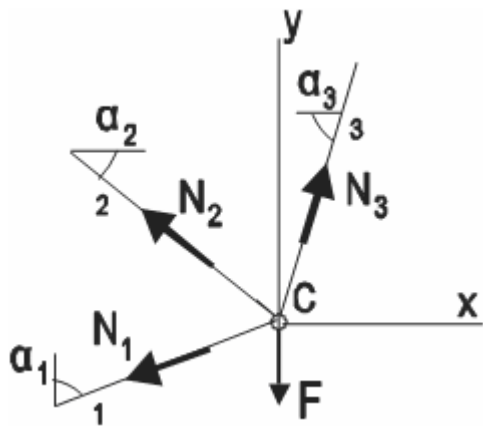
3. Расчет по допускаемым напряжениям.

3.1. *План сил.* Так как стержни 1÷3 плоской конструкции на рис.3 соединены в узле C и с неподвижным основанием цилиндрическими шарнирами, внешняя сила F приложена в узле C и других внешних сил нет, то в поперечных сечениях стержней действуют только продольные силы N_1, N_2, N_3 – рис.4.

Условия прочности стержней имеют вид:

$$\sigma^{(k)} = \frac{N_k}{A_k} \leq \sigma_{adm} , \quad (1)$$

где N_k – продольные силы действующие в стержнях; A_k – площади поперечных сечений стержней; σ_{adm} – допускаемое напряжение.



Вычисляем геометрические величины:

$$\alpha_1 = \arctg(a_1/H_1) = 1,406 \text{ рад},$$

$$\alpha_2 = \arctg(H_2/a_1) = 0,588 \text{ рад},$$

$$\alpha_3 = \arctg(H_2/a_2) = 1,326 \text{ рад},$$

Рис.4. План сил.

$$l_1 = \sqrt{a_1^2 + H_1^2} = 3,04 \text{ м}, \quad l_2 = \sqrt{a_1^2 + H_2^2} = 3,6 \text{ м}, \quad l_3 = \sqrt{a_2^2 + H_2^2} = 2,06 \text{ м},$$

где l_1, l_2, l_3 – длины стержней 1, 2, 3 соответственно.

Так как стержни 1, 2, 3 сходятся в узле С, усилия в них и внешняя сила F образуют систему сходящихся сил.

Как известно, для плоской системы сходящихся сил можно составить только два независимых уравнения равновесия, так как система сходящихся сил эквивалентна своей равнодействующей, которая на плоскости имеет только две независимые компоненты, например, по осям x и y прямоугольной системы координат.

3.2. Уравнение совместности деформаций. Уравнение совместности деформаций составляем с помощью плана перемещений конструкции, представленного на рис.5. Незвестных усилий три, а независимых уравнений равновесия два, следовательно, конструкция один раз статически неопределимая и имеет одну "лишнюю" связь, которой соответствует одна "лишняя" неизвестная.

Для раскрытия статической неопределимости необходимо составить одно уравнение совместности деформаций.

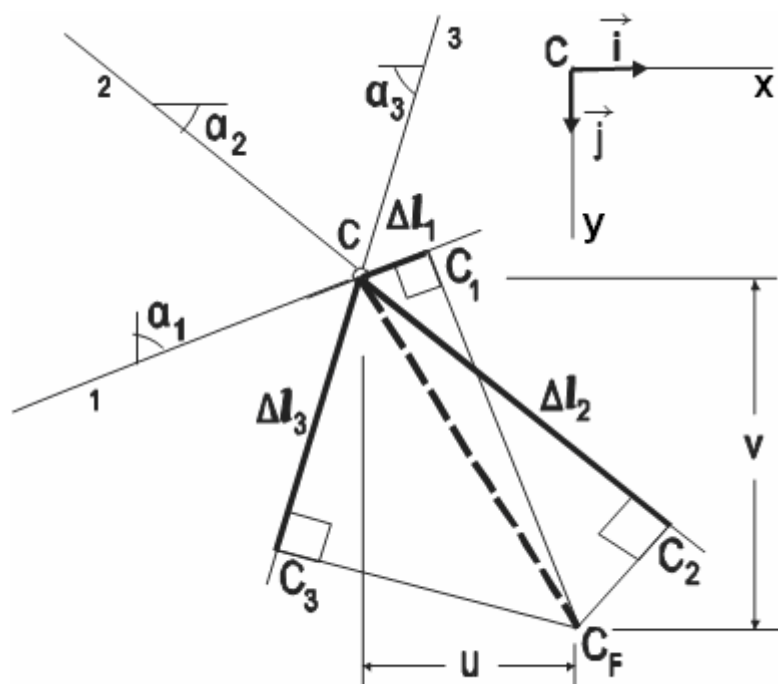
Допустим, что узел С в результате упругого деформирования стержней под действием силы F переместился в точку C_F (см. рис.5).

Назовем \vec{CC}_F – вектором перемещений узла С:

$$\vec{CC}_F = u \vec{i} + v \vec{j}, \quad (2)$$

где \vec{i}, \vec{j} – единичные векторы прямоугольной системы координат; u, v – компоненты вектора перемещений по осям прямоугольной системы координат.

Под действием силы F стержни удлиняются на $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ – отрезки CC_1, CC_2, CC_3 на рис.5 соответственно.



Эти удлинения не могут быть независимыми, так как стержни соединены в узле C . Если удлинения $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ зафиксировать и разъединить стержни в узле C , то для определения местоположения точки C_F достаточно было бы найти точку пересечения дуг, описываемых радиусами $l_1 + \Delta l_1, l_2 + \Delta l_2, l_3 + \Delta l_3$ с центрами

Рис.5. План перемещений узла C .

в неподвижных шарнирах. Ввиду малости $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3$ эти дуги можно заменить отрезками касательных в точках C_1, C_2, C_3 , следовательно, проекции вектора перемещений \vec{CC}_F на оси стержней равны их удлинениям.

Изменения углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в результате деформирования конструкции пренебрегаем, поскольку эти изменения малы по сравнению с самими углами. Согласно формуле (2), суммы проекций компонент u, v вектора \vec{CC}_F также равны удлинениям стержней:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= u \cdot \sin \alpha_1 - v \cdot \cos \alpha_1, \\ \Delta l_2 &= u \cdot \cos \alpha_2 + v \cdot \sin \alpha_2, \\ \Delta l_3 &= -u \cdot \cos \alpha_3 + v \cdot \sin \alpha_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Выразим u, v из 2-го и 3-го уравнений системы (3) и подставим в 1-е уравнение.

По правилу Крамера находим:

$$u = \frac{\Delta l_2 \sin \alpha_3 - \Delta l_3 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}, \quad v = \frac{\Delta l_2 \cos \alpha_3 + \Delta l_3 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}. \quad (g)$$

После подстановки u, v по (г) в первое из уравнений (3) получаем уравнение совместности деформаций:

$$\Delta_1 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) + \Delta_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_3) + \Delta_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \quad (4)$$

Как видно из уравнения (4), удлинения стержней не могут изменяться независимо друг от друга; если два удлинения заданы, то третье однозначно определяется уравнением (4). В этом состоит физический смысл уравнений совместности деформаций.

3.3. *Уравнения равновесия.* Рассекаем все стержни и рассматриваем равновесие узла С под действием продольных сил N_k ($k = 1, 2, 3$) и внешней силы F (рис.4). Направления усилий N_k выбираем в соответствии с направлением удлинений Δl_k стержней – в данном случае все усилия принимаем растягивающими.

Составим суммы проекций всех сил на оси x и y :

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0: & -N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3 = 0, \\ \Sigma Y = 0: & -N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \sin \alpha_2 + N_3 \sin \alpha_3 = F. \end{aligned} \quad (5)$$

Два уравнения равновесия (5) и уравнение совместности деформаций (4) позволяют найти все N_k ($k = 1, 2, 3$).

3.4. *Определение усилий в стержнях.* Используем закон Гука для определения удлинений стержней:

$$\Delta l_k = \frac{N_k l_k}{E_k A_k}, \quad (h)$$

где Δl_k – удлинений стержней; l_k, A_k – длина и площадь поперечных сечений стержней; E_k – модуль упругости.

Подставив Δl_k по (h) в уравнение совместности деформаций (4) преобразуем его к усилиям:

$$\frac{l_1 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{EA_1} N_1 + \frac{l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_3)}{EA_2} N_2 + \frac{l_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{EA_3} N_3 = 0. \quad (6)$$

После умножения всех членов (6) на EA_1 , подстановки значений l_k, α_k ($k = 1, 2, 3$), заданных соотношений между площадями поперечных сечений стержней $A_1/A_2, A_1/A_3$ и присоединения уравнений равновесия (5), приходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
2,864 N_1 - 3,961 N_2 + 1,691 N_3 &= 0, \\
-0,986 N_1 - 0,832 N_2 + 0,242 N_3 &= 0, \\
-0,164 N_1 + 0,555 N_2 + 0,970 N_3 &= F.
\end{aligned}
\tag{7}$$

Решив систему (7), например, методом исключения неизвестных Гаусса, найдем:

$$N_1 = -5,9913 \cdot 10^{-2} F, \quad N_2 = 0,3154 F, \quad N_3 = 0,8403 F. \tag{8}$$

Знак "-" у продольной силы N_1 означает, что стержень 1 сжат и, следовательно, выбранное на рис.5 направление вектора перемещений $\vec{\Delta}_F$ отличается от действительного, так как величина Δl_1 должна быть отложена в противоположном направлении.

3.5. Проверка решения. Для проверки правильности определения усилий в стержнях составим сумму моментов сил, приложенных к узлу С на рис.4, относительно какой-либо точки плоскости xy , например, относительно точки j – точки крепления стержня с номером 2 (рис.3):

$$\begin{aligned}
\sum m_{(j)} &= F \cdot l_2 \cdot \cos \alpha_2 + N_1 \cdot (H_1 + H_2) \cdot \sin \alpha_1 - N_3 \cdot l_2 \cdot \sin(\pi - (\alpha_2 + \alpha_3)) = F[3,6 \cdot \cos(0,588) \\
&- 5,99 \cdot 10^{-2} \cdot (0,5 + 2) \cdot \sin(1,406) - 0,84 \cdot 3,6 \cdot \sin(0,588 + 1,326)] = F(2,995 - \\
&- 0,148 - 2,849) = -0,002F.
\end{aligned}$$

Как видим, сумма моментов сил, приложенных к узлу С, относительно точки j – малая по сравнению с F величина, поэтому полученное решение (8) – правильное.

Для дальнейших расчетов принимаем:

$$\begin{aligned}
N_1 &= -5,99 \cdot 10^{-2} F, \quad N_2 = 0,315 F, \quad N_3 = 0,840 F; \\
N_1 &= -19,17 \text{ кН}, \quad N_2 = 100,8 \text{ кН}, \quad N_3 = 268,8 \text{ кН}.
\end{aligned}
\tag{9}$$

3.6. Подбор формы и размеров поперечных сечений стержней.

Определяем наиболее напряженный стержень:

$$\begin{aligned}
\sigma^{(1)} &= -\frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{A_1}, \quad \sigma^{(2)} = \frac{0,315 F}{A_2} \cdot \frac{A_1}{A_1} = \frac{1,2 \cdot 0,315 F}{A_1} = \frac{0,378 F}{A_1}, \\
\sigma^{(3)} &= \frac{0,84 F}{A_3} \cdot \frac{A_1}{A_1} = \frac{1,2 \cdot 0,84 F}{A_1} = \frac{1,008 F}{A_1}, \quad \sigma^{(3)} > \sigma^{(2)} > |\sigma^{(1)}|.
\end{aligned}
\tag{10}$$

Наиболее напряженным является 3-й стержень.

Используя условие прочности (1) и заданные соотношения площадей A_2/A_1 , A_3/A_1 , найдем требуемые площади поперечных сечений (m^2):

$$A_1' \geq \frac{1,008 \cdot 320 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,016 \cdot 10^{-3}; \quad A_2' = A_3' = \frac{2,016 \cdot 10^{-3}}{1,2} = 1,68 \cdot 10^{-3}.$$

Поскольку стержень 1 оказался сжатым, для него выбираем коробчатый профиль (Приложение 6), а для растянутых стержней 2 и 3 – квадратный профиль (ГОСТ 2591- 71).

Для 1-го стержня по Приложению 6 выбираем коробчатый профиль с высотой грани $h = 100$ мм, толщиной стенки $s = 6$ мм и площадью сечения $A_1 = 22,56 \text{ см}^2 = 2,256 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

Для 2-го и 3-го стержней по ГОСТ 2591- 71 выбираем квадратные профили с высотой ребра $h = 42$ мм и площадью сечения $A_2 = A_3 = 17,64 \text{ см}^2 = 1,764 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. Соотношения площадей $A_2/A_1 = 1/1,28$, $A_3/A_1 = 1/1,28$ близки к заданным.

3.7. Проверка устойчивости сжатого стержня. Сжатым оказался первый стержень. Проверку устойчивости этого стержня производим по методике, изложенной в Задании 6.

Для 1-го стержня имеем: площадь – $A_1 = 22,56 \text{ см}^2 = 22,56 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, радиус инерции – $i = 3,84$ см, гибкость – $\lambda = 2,5/ 3,84 \cdot 10^{-2} = 65$. По Приложению 10 при $R_y = 240$ МПа выбираем $\varphi = 0,78$. По условию устойчивости центрально сжатых стержней:

$$\sigma^{(1)} = \frac{19,17 \cdot 10^3}{22,56 \cdot 10^{-3}} = 8,5 \text{ МПа} < \varphi \cdot \sigma_{adm} = 125 \text{ МПа}.$$

Устойчивость 1-го стержня обеспечена.

4. Расчеты по предельным нагрузкам.

4.1. Предельная нагрузка. Определение размеров поперечных сечений стержней по предельным нагрузкам производят исходя из распределений усилий в предельном деформированном состоянии системы.

В рассматриваемом примере предельные деформированные состояния шарнирно-стержневой системы на рис.3 могут возникнуть при пропорциональном увеличении напряжений до предела текучести, когда усилия в двух из трех стержней станут предельными, и конструкция превратится в пластический механизм.

При этом рост напряжений в стержнях может происходить либо за счет увеличения нагрузки на конструкцию при фиксированных площадях поперечных сечений стержней, либо за счет уменьшения этих площадей при фиксированной нагрузке на конструкцию.

Предельные значения усилий определяются формулами:

$$N_{lim}^{(1)} = \alpha_y \tilde{A}_1, \quad N_{lim}^{(2)} = \alpha_y \tilde{A}_2, \quad N_{lim}^{(3)} = \alpha_y \tilde{A}_3,$$

где σ_y – предел текучести материала стержней; $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ – искомые предельные значения площадей поперечных сечений стержней 1, 2, 3 соответственно.

Форму поперечных сечений и соотношения $\tilde{A}_2/\tilde{A}_1, \tilde{A}_3/\tilde{A}_1$ оставляем такими же, как в упругом расчете.

Действующая на конструкцию внешняя сила F должна быть принята в качестве допускаемой $P_{adm} = F = 320$ кН, тогда предельная нагрузка

$$P_{lim} = n_y P_{adm} = 1,5 \cdot 320 = 480 \text{ кН},$$

где n_y – коэффициент запаса по пределу текучести.

4.2. *Способ последовательных догрузений.* Будем увеличивать напряжения $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$ в стержнях за счет уменьшения площадей поперечных сечений A_1, A_2, A_3 , найденных в п.3.6, при фиксированной внешней силе F .

Согласно расчету в п.3, усилия в стержнях определены соотношениями (9), а наиболее напряженным является 3-й стержень.

При пропорциональном уменьшении площадей $A_k, k = 1, 2, 3$, напряжения в 3-м стержне достигнут предельного значения σ_y раньше, чем в 1-м и 2-м. В этот момент внешняя сила F станет равной P_{lim} , а распределение напряжений в стержнях будет:

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(1)} &= -\frac{5,99 \cdot 10^{-2}}{\tilde{A}_1} P_{lim}^{(1)} = -5,99 \cdot 10^{-2} \frac{P_{lim}^{(1)}}{\tilde{A}_3} \cdot \frac{\tilde{A}_3}{\tilde{A}_1} = -4,99 \cdot 10^{-2} \frac{P_{lim}^{(1)}}{\tilde{A}_3}, \\ \sigma_0^{(2)} &= 0,315 \frac{P_{lim}^{(1)}}{\tilde{A}_2} = 0,315 \frac{P_{lim}^{(1)}}{\tilde{A}_3}, \sigma_0^{(3)} = \sigma_y = 0,840 \cdot \frac{P_{lim}^{(1)}}{\tilde{A}_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из последнего соотношения (11) найдем $P_{lim}^{(1)}/\tilde{A}_3$, из первых двух – $\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}$:

$$\frac{P_{lim}^{(1)}}{\tilde{A}_3} = \frac{\sigma_y}{0,840} = \frac{240 \cdot 10^6}{0,840} = 285,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_0^{(1)} = -4,99 \cdot 10^{-2} \cdot 285,7 = -14,26 \text{ МПа},$$

$$\sigma_0^{(2)} = 0,315 \cdot 285,7 = 90 \text{ МПа}.$$

При дальнейшем уменьшении площадей A_k третий стержень не будет оказывать сопротивления деформациям конструкции и может быть удален из нее.

Уменьшим еще A_k таким образом, чтобы напряжения во 2-м стержне достигли предельного значения σ_y . Приращение напряжений во 2-м стержне определяется так:

$$\Delta \sigma^{(2)} = \sigma_y - \sigma_0^{(2)} = 240 - 90 = 150 \text{ МПа.}$$

Приращениям напряжений $\Delta \sigma^{(2)}$ и $\Delta \sigma^{(1)}$ во 2-м и 1-м стержнях соответствует приращение нагрузки ΔP_1 на систему по рис.3 с выключенным 3-м стержнем, а уравнения равновесия получаются из (5) при $\Delta \sigma^{(3)} = 0$:

$$\begin{cases} -0,986 \Delta \sigma^{(1)} \tilde{A}_1 - 0,832 \Delta \sigma^{(2)} \tilde{A}_2 = 0; \\ -0,164 \Delta \sigma^{(1)} \tilde{A}_1 + 0,555 \Delta \sigma^{(2)} \tilde{A}_2 = \Delta P_1. \end{cases} \quad (12)$$

Разделив (12) на \tilde{A}_2 придем к системе уравнений

$$\begin{cases} -1,1832 \Delta \sigma^{(1)} - 0,832 \Delta \sigma^{(2)} = 0; \\ -0,1968 \Delta \sigma^{(1)} + 0,555 \Delta \sigma^{(2)} = \Delta P_1 / \tilde{A}_2. \end{cases} \quad (13)$$

Решив (13) относительно $\Delta \sigma^{(1)}$ и $\Delta P_1 / \tilde{A}_2$, получим:

$$\Delta \sigma^{(1)} = -105,5 \text{ МПа}, \quad \Delta P_1 / \tilde{A}_2 = 104,0 \text{ МПа.}$$

Поскольку $P_{\text{lim}} = P_{\text{lim}}^{(1)} + \Delta P_1$, то разделив это выражение на \tilde{A}_2 и используя заданное соотношение между площадями \tilde{A}_k , $k = 1, 2, 3$, найдем:

$$\frac{P_{\text{lim}}}{\tilde{A}_2} = \frac{P_{\text{lim}}^{(1)}}{\tilde{A}_2} + \frac{\Delta P_1}{\tilde{A}_2} = \frac{P_{\text{lim}}^{(1)}}{\tilde{A}_3} \frac{\tilde{A}_3}{\tilde{A}_2} + \frac{\Delta P_1}{\tilde{A}_2}. \quad (14)$$

Правая часть (14) и P_{lim} известны:

$$\frac{P_{\text{lim}}^{(1)}}{\tilde{A}_2} \frac{\tilde{A}_3}{\tilde{A}_2} + \frac{\Delta P_1}{\tilde{A}_2} = 285,7 + 104,0 = 389,7; \quad P_{\text{lim}} = 480 \text{ кН.}$$

$$\text{Определяем } \tilde{A}_2 = \frac{480 \cdot 10^3}{389,7 \cdot 10^6} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Из соотношения площадей $\tilde{A}_2 / \tilde{A}_1 = 1 / 1,2$; $\tilde{A}_3 = \tilde{A}_2$ находим \tilde{A}_1 и \tilde{A}_3 : $\tilde{A}_1 = 1,2 \cdot \tilde{A}_2 = 1,48 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, $\tilde{A}_3 = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

4.3. *Кинематический способ.* Конструкция на рис.3 может потерять кинематическую неизменяемость в соответствии со схемами предельных деформированных состояний, представленными на рис.6, когда в двух из трех стержней при пропорциональном уменьшении площадей A_k ($k = 1, 2, 3$) усилия достигнут предельных значений (стержни "потекут"), и конструкция превратится в пластический механизм.

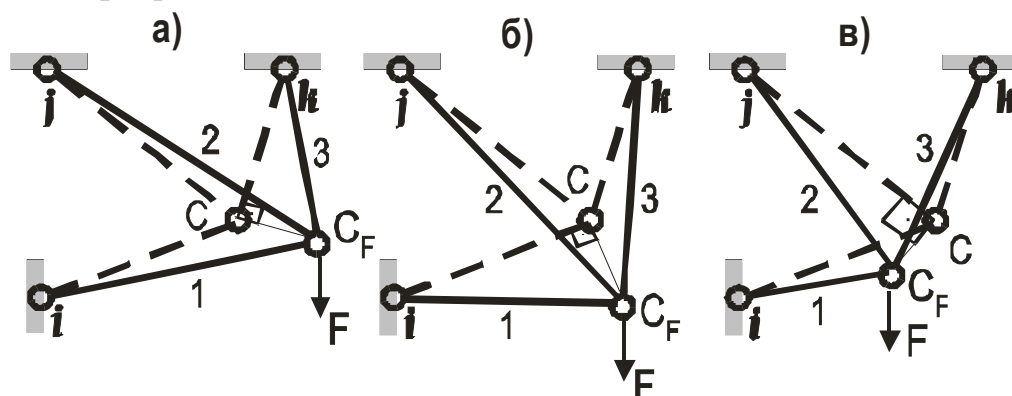


Рис.6. Схемы предельных деформированных состояний.

При построении схем предельных деформированных состояний конструкции учтено, что упругие деформации (удлинения или укорочения) стержня, усилие в котором меньше предельного значения, пренебрежимо малы по сравнению с деформациями тех 2-х стержней, в которых усилия достигли предельных значений, и упругими деформациями в них можно пренебречь по сравнению с пластическими. При этом условии перемещения узла С будут происходить за счет поворота упруго деформирующегося стержня вокруг своего неподвижного шарнира таким образом, чтобы точка приложения внешней силы F опускалась вниз, и сила F производила бы положительную работу.

Недеформированное состояние конструкции на рис.6 обозначено пунктирными линиями, деформированное – сплошными. При составлении уравнений равновесия приращениями $\Delta \alpha_k$ углов α_k вследствие поворотов стержней пренебрегаем, поскольку они малы по сравнению с самими углами, т.е. принимаем $\alpha_k + \Delta \alpha_k \approx \alpha_k$, $k = 1, 2, 3$.

Схема а. "Текут" стержни 1 и 2, стержень 3, не изменяя своей длины, поворачивается вокруг шарнира k :

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = \sigma_y, \quad \sigma^{(3)} < \sigma_y. \quad (15)$$

Уравнения предельного равновесия конструкции:

$$\begin{aligned}\Sigma X = 0: & -\sigma_y \tilde{A}_1 \cdot \sin \alpha_1 - \sigma_y \tilde{A}_2 \cos \alpha_2 + \sigma^{(3)} \tilde{A}_3 \cdot \cos \alpha_3 = 0; \\ \Sigma Y = 0: & -\sigma_y \tilde{A}_1 \cdot \cos \alpha_1 + \sigma_y \tilde{A}_2 \sin \alpha_2 + \sigma^{(3)} \tilde{A}_3 \cdot \sin \alpha_3 = P_{\text{lim}}.\end{aligned}\quad (16)$$

Из 1-го уравнения (16), учитывая соотношения между площадями поперечных сечений стержней, находим:

$$\sigma^{(3)} = \frac{\sigma_y (1,2 \sin \alpha_1 + \cos \alpha_2)}{\cos \alpha_3} = \frac{240 \cdot 10^6 (1,2 \cdot 0,986 + 0,832)}{0,242} = 1998 \text{ МПа}.$$

Поскольку $\sigma^{(3)} > \sigma_y$, что противоречит принятому распределению усилий в стержнях, схема а) исключается из рассмотрения.

Схема б. "Текут" стержни 2 и 3, стержень 1, не изменяя своей длины, поворачивается вокруг шарнира i :

$$\sigma^{(1)} < \sigma_y, \sigma^{(2)} = \sigma_y, \sigma^{(3)} = \sigma_y. \quad (17)$$

Уравнения предельного равновесия конструкции:

$$\begin{cases} -\sigma^{(1)} \tilde{A}_1 \sin \alpha_1 - \sigma_y \tilde{A}_2 \cos \alpha_2 + \sigma_y \tilde{A}_3 \cos \alpha_3 = 0, \\ -\sigma^{(1)} \tilde{A}_1 \cos \alpha_1 + \sigma_y \tilde{A}_2 \sin \alpha_2 + \sigma_y \tilde{A}_3 \sin \alpha_3 = P_{\text{lim}}. \end{cases} \quad (18)$$

Из 1-го уравнения системы (18) находим $\sigma^{(1)} = -105,8$ МПа.

Поскольку $|\sigma^{(1)}| < \sigma_y$, схема б) возможна.

Из 2-го уравнения системы (18) при $P_{\text{lim}} = 480$ кН находим $\tilde{A}_1 = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, а по соотношениям между площадями поперечных сечений $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_3 = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

Схема в. "Текут" стержни 1 и 3, стержень 2 не изменяя своей длины, поворачивается вокруг шарнира j :

$$\sigma^{(1)} = \sigma_y, \sigma^{(2)} < \sigma_y, \sigma^{(3)} = \sigma_y. \quad (19)$$

Уравнения предельного равновесия конструкции:

$$\begin{cases} -\sigma_y \tilde{A}_1 \sin \alpha_1 - \sigma^{(2)} \tilde{A}_2 \cos \alpha_2 + \sigma_y \tilde{A}_3 \cos \alpha_3 = 0, \\ -\sigma_y \tilde{A}_1 \cos \alpha_1 + \sigma^{(2)} \tilde{A}_2 \sin \alpha_2 + \sigma_y \tilde{A}_3 \sin \alpha_3 = P_{\text{lim}}. \end{cases} \quad (20)$$

Из 1-го уравнения системы (20) находим:

$$\sigma^{(2)} = \frac{\sigma_y (\cos \alpha_3 - 1,2 \sin \alpha_1)}{\cos \alpha_2} = \frac{240 \cdot 10^6 (0,242 - 0,986 \cdot 1,2)}{0,832} = -272 \text{ МПа.}$$

Поскольку $|\sigma^{(2)}| > \sigma_y$, что противоречит принятому распределению усилий в стержнях, схема в) исключается из рассмотрения.

Таким образом, кинематический способ приводит к тому же результату, что и способ догружений:

$$\tilde{A}_1 = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad \tilde{A}_2 = A_3 = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

4.4. *Статический способ.* Рассматриваемая конструкция (рис.3) один раз статически неопределимая, поэтому потеря ею несущей способности произойдет, если при пропорциональном уменьшении площадей поперечных сечений в двух из трех стержней напряжения достигнут предела текучести, а третий стержень будет работать в упругой стадии деформирования. Это напряженное состояние следует считать предельным.

Для отыскания предельного напряженного состояния конструкции исследуются все возможные схемы одновременного достижения напряжениями в двух из трех стержней пределов текучести путем добавления к упругому напряженному состоянию, определенному формулами (10):

$$\sigma_0^{(1)} = -\frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{A_1}, \quad \sigma_0^{(2)} = \frac{0,378 F}{A_1}, \quad \sigma_0^{(3)} = \frac{1,008 F}{A_1}, \quad (21)$$

дополнительных напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия (5) при некотором значении внешней силы F.

Таким путем полученные предельные состояния являются статически допустимыми и должны удовлетворять уравнениям равновесия конструкции. Из статически допустимых выберем те состояния, в которых напряжения достигают пределов текучести не более, чем в 2-х стержнях. Эти напряженные состояния являются безопасными статически допустимыми. Из числа последних остановимся на том безопасном состоянии, которому соответствует предельная нагрузка $P_{\text{lim}} = 480 \text{ кН}$.

Для определения дополнительных напряжений $\Delta\sigma^{(1)}$, $\Delta\sigma^{(2)}$, $\Delta\sigma^{(3)}$, используем 1-е уравнение системы (5):

$$-\Delta\sigma^{(1)} \cdot \tilde{A}_1 \sin \alpha_1 - \Delta\sigma^{(2)} \tilde{A}_2 \cos \alpha_2 + \Delta\sigma^{(3)} \cdot \tilde{A}_3 \cos \alpha_3 = 0. \quad (22)$$

Схема а. "Текут" 1-ый и 2-ой стержни:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{(1)} &= -\sigma_y - \sigma_0^{(1)} = -\sigma_y + \frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1}, \\ \Delta\sigma^{(2)} &= \sigma_y - \sigma_0^{(2)} = \sigma_y - \frac{0,378F}{\tilde{A}_1}, \quad |\Delta\sigma_a^{(3)}| < \sigma_y - \frac{1,008F}{\tilde{A}_1}.\end{aligned}\quad (23)$$

Подставив $\Delta\sigma^{(1)}$, $\Delta\sigma^{(2)}$ из (23) в (22), получим:

$$\begin{aligned}\left(\sigma_y - \frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1}\right) \tilde{A}_1 \sin \alpha_1 - \left(\sigma_y - \frac{0,378F}{\tilde{A}_1}\right) \frac{\tilde{A}_1}{1,2} \cos \alpha_2 + \Delta\sigma_a^{(3)} \frac{\tilde{A}_1}{1,2} \cos \alpha_3 = 0 \\ 0,986 \sigma_y - \frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1} - 0,693 \sigma_y + \frac{0,262F}{\tilde{A}_1} + 0,202 \Delta\sigma_a^{(3)} = 0.\end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим

$$\Delta\sigma_a^{(3)} = -1,145\sigma_y - \frac{0,846F}{\tilde{A}_1}.$$

Поскольку $|\Delta\sigma_a^{(3)}| > \sigma_y - F/\tilde{A}_1$, что противоречит третьему условию (23), схема "а" дает опасное напряженное состояние и из рассмотрения исключается.

Схема б. "Текут" 2-й и 3-й стержни:

$$\begin{aligned}|\Delta\sigma_b^{(1)}| < \sigma_y + \sigma_0^{(1)} = \sigma_y - \frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1}, \quad \Delta\sigma^{(2)} = \sigma_y - \frac{0,378F}{\tilde{A}_1}, \\ \Delta\sigma^{(3)} = \sigma_y - \sigma_0^{(3)} = \sigma_y - \frac{1,008F}{\tilde{A}_1}.\end{aligned}\quad (24)$$

Подставив $\Delta\sigma^{(2)}$, $\Delta\sigma^{(3)}$ из (24) в (22), получим:

$$-0,986 \sigma_b^{(1)} - 0,693 \sigma_y + \frac{0,262F}{\tilde{A}_1} + 0,202 \sigma_y - \frac{0,203F}{\tilde{A}_1} = 0.$$

Из последнего уравнения находим $\Delta\sigma_b^{(1)}$:

$$\Delta \sigma^{(1)} = -0,498 \sigma_y + \frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1}.$$

Поскольку $|\Delta \sigma^{(1)}| < \sigma_y - 5,99 \cdot 10^{-2} F/\tilde{A}_1$, что соответствует первому условию (24), схема "b" является безопасной.

Схема с. "Текут" 1-й и 3-й стержни:

$$\Delta \sigma^{(1)} = -\sigma_y + \frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1},$$

$$|\Delta \sigma_c^{(2)}| < \sigma_y - \frac{0,378 F}{\tilde{A}_1}, \quad \Delta \sigma^{(3)} = \sigma_y - \frac{1,008 F}{\tilde{A}_1}. \quad (25)$$

Подставив $\Delta \sigma^{(1)}$, $\Delta \sigma^{(3)}$ из (25) в (22), получим:

$$\left(\sigma_y - \frac{5,99 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1} \right) \tilde{A}_1 \sin \alpha_1 - \Delta \sigma_c^{(2)} \frac{\tilde{A}_1}{1,2} \cdot \cos \alpha_2 + \left(\sigma_y - \frac{F}{\tilde{A}_1} \right) \frac{\tilde{A}_1}{1,2} \cos \alpha_3 = 0,$$

$$0,986 \sigma_y - \frac{5,91 \cdot 10^{-2} F}{\tilde{A}_1} - 0,693 \Delta \sigma_c^{(2)} + 0,202 \sigma_y - \frac{0,202 F}{\tilde{A}_1} = 0.$$

Из последнего уравнения находим $\Delta \sigma_c^{(2)}$:

$$\Delta \sigma_c^{(2)} = 1,71 \sigma_y - \frac{0,30 F}{\tilde{A}_1}.$$

Поскольку полученное значение $\Delta \sigma_c^{(2)} > \sigma_y - F/\tilde{A}_1$, что противоречит второму условию (25), схема "с" дает опасное напряженное состояние и из рассмотрения исключается.

Таким образом, предельное напряженное состояние конструкции на рис.3 возникает, если "текут" 2-й и 3-й стержни, т.е. если выполнено условие $\sigma^{(1)} < \sigma_y$, $\sigma^{(2)} = \sigma_y$, $\sigma^{(3)} = \sigma_y$.

Подставив значения $\sigma^{(2)} = \sigma_y$, $\sigma^{(3)} = \sigma_y$ в уравнения равновесия конструкции, приходим к системе (18), решение которой получено в п.4.3:

$$\sigma^{(1)} = -105,8 \text{ МПа}, \quad \tilde{A}_1 = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad \tilde{A}_2 = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Статический способ приводит к результату, полученному ранее двумя другими способами.

4.5. Подбор формы и размеров поперечных сечений.

Для сжатого стержня примем коробчатый профиль по Приложению 6 с площадью сечения $A = 15 \text{ см}^2$, высотой ребра $h = 80 \text{ мм}$, толщиной стенки $s = 5 \text{ мм}$, осевым моментом инерции $J = 141,2 \text{ см}^4$, радиусом инерции $i = 3,07 \text{ см}$.

Для 2-го и 3-го стержней по ГОСТ 2591-71 выбираем квадратные профили с высотой ребра $h = 35 \text{ мм}$ и площадью сечения $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_3 = 12,25 \text{ см}^2$.

Соотношения площадей $\tilde{A}_2/\tilde{A}_1 = \tilde{A}_3/\tilde{A}_1 = 1/1,22$, что почти совпадает с заданными.

Проверка устойчивости сжатого стержня. Сжатым является 1-й стержень. Для определения усилия в нем можно воспользоваться упругим решением, поскольку допускаемая нагрузка $F_{adm} = P_{lim}/n_y = 480/1,5 = 320 \text{ кН}$, а не $P_{lim} = 480 \text{ кН}$, как принималось при определении площадей \tilde{A}_k ($k = 1, 2, 3$).

Используем формулы (9) и найдем напряжения:

$$\sigma^{(1)} = \frac{5,99 \cdot 10^{-2} \cdot 320 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 12,78 \text{ МПа}, \quad \sigma^{(2)} = \frac{0,315 \cdot 320 \cdot 10^3}{1,225 \cdot 10^{-3}} = 82,31 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{0,840 \cdot 320 \cdot 10^3}{1,225 \cdot 10^{-3}} = 219,25 \text{ МПа} < \sigma_y = 240 \text{ МПа} \quad .$$

Проверку устойчивости 1-го стержня производим по методике, изложенной в Задании 6. Определяем гибкость стержня:

$$\lambda = 3,04/3,07 \cdot 10^{-2} \cong 100 .$$

По Приложению 10 для стали с пределом текучести $R_y = 240 \text{ МПа}$ выбираем коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0,54$. Сравниваем действующее напряжение с допускаемым значением:

$$\sigma^{(1)} = 12,78 \text{ МПа} < \sigma_{adm,st} = \varphi \cdot \sigma_{adm} = 0,54 \cdot 160 \text{ МПа} = 86,4 \text{ МПа}.$$

Устойчивость 1-го стержня обеспечена.

5. Сравнительная оценка металлоемкости конструкции.

Сравним металлоемкость конструкции (рис.3), рассчитанной методами допускаемых напряжений и предельных нагрузок. Результаты расчетов сведем в табл.2.

Таблица 2

Металлоемкость конструкции

Но мер стер- жня	Длина, м	По допускаемым напряжениям			По предельным нагрузкам		
		Площадь сеч. A_k , m^2	Масса, кг		Площадь сеч. A_k , m^2	Масса, кг	
			1 м длины	всего стер- жня		1 м дли- ны	всего стер- жня
1	3,08	$2,256 \cdot 10^{-3}$	17,71	49,03	$1,5 \cdot 10^{-3}$	11,78	35,73
2	3,6	$1,764 \cdot 10^{-3}$	13,85	47,52	$1,225 \cdot 10^{-3}$	9,62	34,63
3	2,1	$1,764 \cdot 10^{-3}$	13,85	27,72	$1,225 \cdot 10^{-3}$	9,62	20,20
Всего:				136,63			90,56

Как следует из табл.2, снижение массы конструкции за счет перехода от расчета на прочность по допускаемым напряжениям к расчету по предельным нагрузкам $\Delta M = 136,63 - 90,56 = 46,07$ кг.

Относительное снижение металлоемкости при замене расчетов по допускаемым напряжениям на расчеты по предельным нагрузкам составляет $\delta M = \Delta M / M = 46,07 / 136,63 = 0,337$, т.е. около 34 %.

Расчеты закончены.

Задание 9. Предельная несущая способность статически неопределимых балок.

1. **Формулировка задачи.** Для балок, расчетные схемы которых представлены на рис.1,а и рис. 1,б, методом предельного равновесия определить предельную несущую способность.

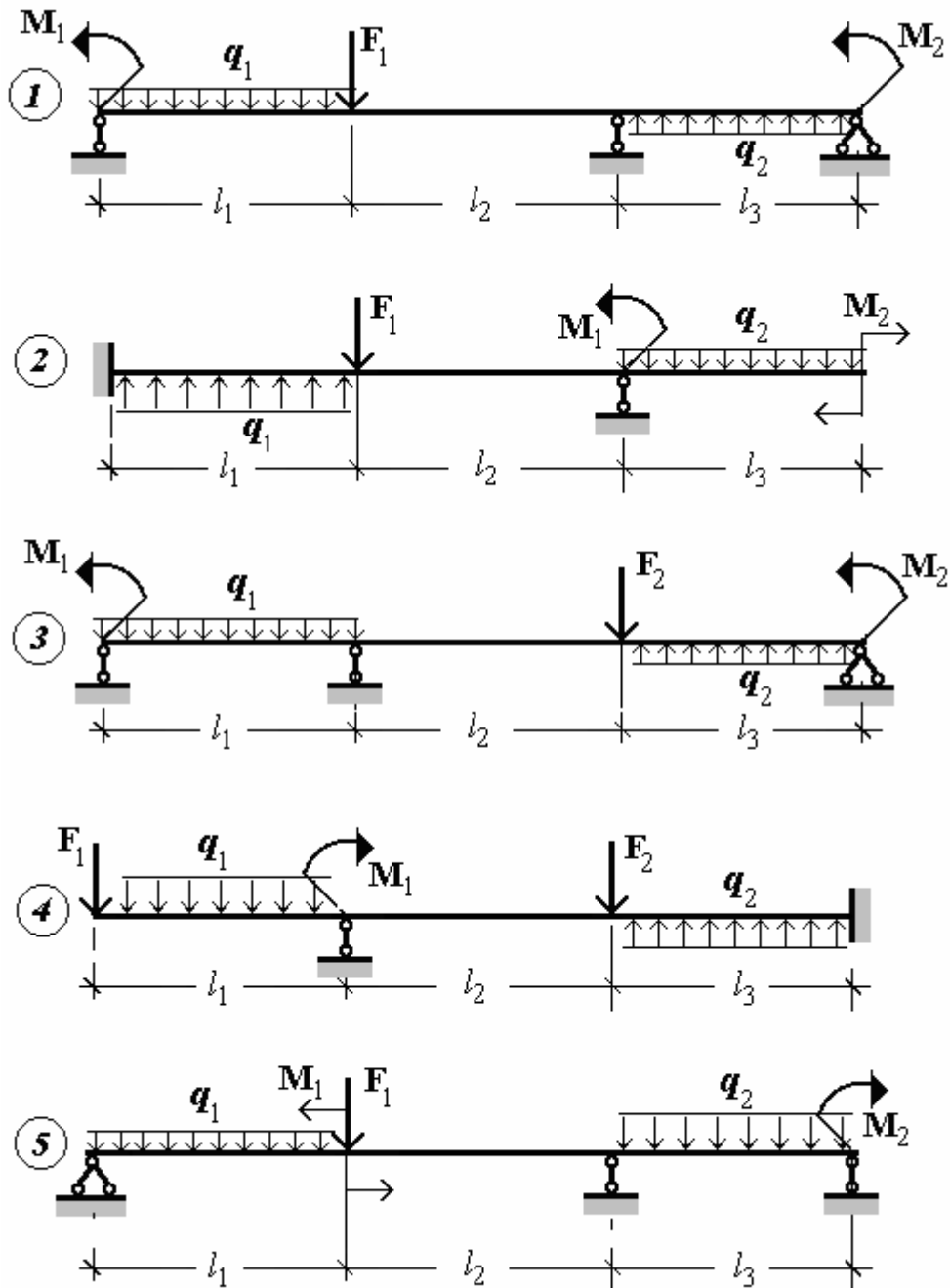


Рис.1,а. Расчетные схемы балок 1÷5 к заданию № 9.

Балки на рис.1 один раз статически неопределимые. На балки действуют статически приложенные внешние силы – равномерно распределенные нагрузки интенсивностью q , сосредоточенные силы F ,

пары сил с моментами M . Величины F , M выражаются через q следующим образом:

$$F_1 = l_1 \cdot q_1, F_2 = l_2 \cdot q_1, M_1 = l_1^2 \cdot q_1, M_2 = l_2^2 \cdot q_1, q_2 = 2q_1.$$

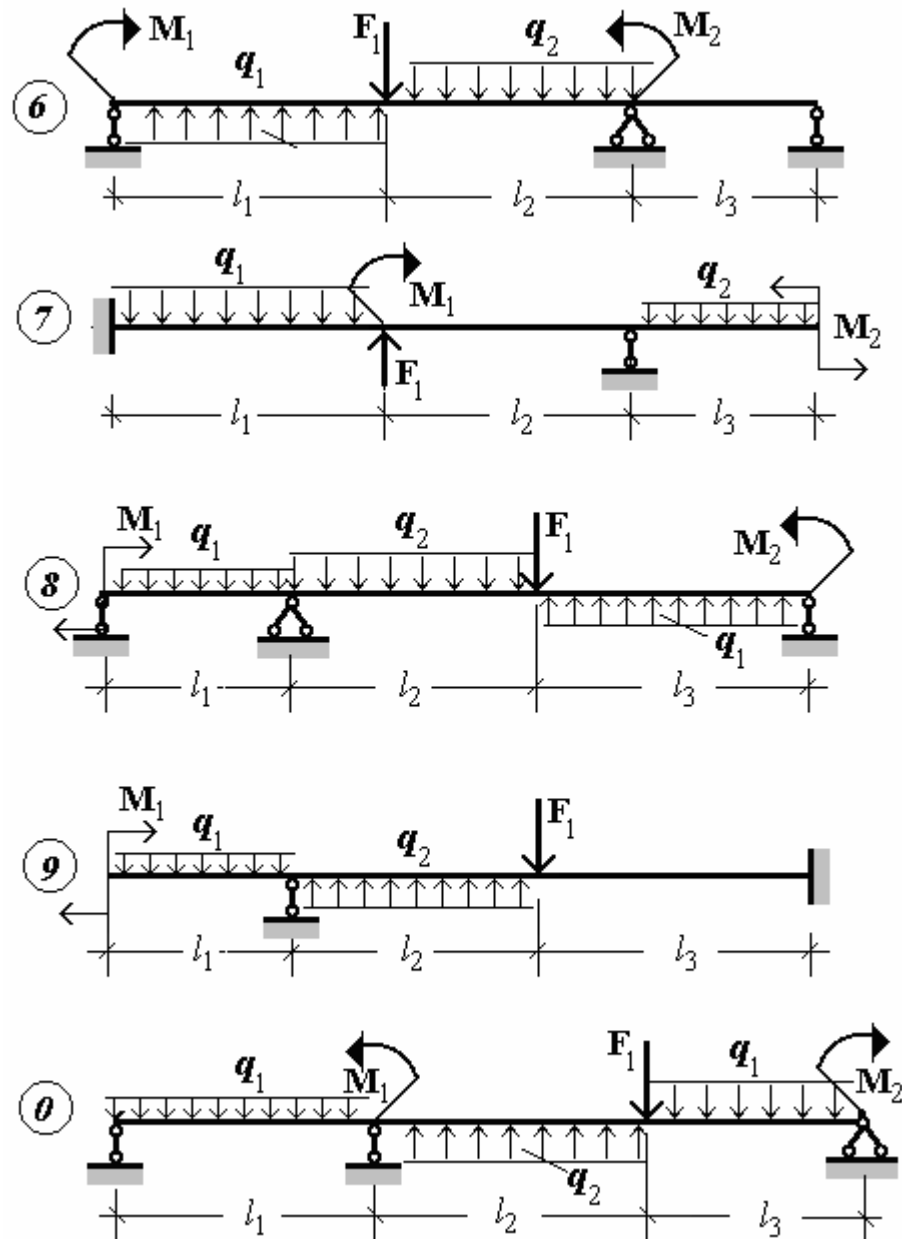


Рис.1,б. Расчетные схемы балок 6÷0 к заданию № 9.

Поперечные сечения балок имеют форму равнобокой трапеции с основаниями b_1 , b_2 и высотой h , как показано на рисунке в Приложении 13. Модуль упругости материала балок $E = 200$ ГПа, предел текучести $\sigma_y = 240$ МПа, коэффициент запаса по пределу текучести $n_y = 1,5$.

Исходные данные приведены в таблице 1.

Номер расчетной схемы и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $n_2n_1n_0$, выданному препода-

вателем; n_2 , n_1 , n_0 – три цифры кода студента: n_2 – первая слева цифра, n_1 – вторая слева цифра, n_0 – последняя цифра кода.

Таблица 1

Исходные данные к определению несущей способности статически неопределимых балок

n_0	№ сх- емы	n_1	Размеры сечения, мм			n_2	Длина участка, мм			
			h	b_1	b_2		l_1	l_2	l_3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1	1	40	30	40	1	300	400	300	
2	2	2	50	40	50	2	400	300	400	
3	3	3	60	30	40	3	300	500	200	
4	4	4	50	40	50	4	500	300	400	
5	5	5	40	30	40	5	300	500	300	
6	6	6	60	40	50	6	400	400	200	
7	7	7	40	30	30	7	500	400	300	
8	8	8	50	30	40	8	200	300	500	
9	9	9	60	30	50	9	400	400	300	
0	0	0	40	20	40	0	200	500	300	

2. Методика решения задачи.

В Строительных Нормах и Правилах (СНиП) метод предельного равновесия рекомендован для установления предельной несущей способности поперечных и наклонных сечений стержней из однородных и неоднородных материалов, имеющих различные механические свойства при растяжении и сжатии.

Ограничимся рассмотрением предельной несущей способности балок из однородных материалов, одинаково сопротивляющиеся растяжению и сжатию.

2.1. *Предельный изгибающий момент в балках прямоугольного поперечного сечения.* Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения на двух опорах под действием сосредоточенных (F) и равномерно распределенных нагрузок (q), а также сосредоточенных моментов (M). Будем считать, что q , F и M изменяются от нуля до своих конечных значений пропорционально одному параметру k ($0 < k \leq 1$), то есть образуют обобщенную силу. Обозначим обобщенную силу буквой P : $P =$

{q, F, M}. Ось балки совместим с горизонтальной осью z . Примем ширину поперечного сечения балки равной b , а высоту – h . Нейтральную линию совместим с осью x , ось y направим вверх по оси симметрии сечения. Нормаль к поперечному сечению балки имеет направление, совпадающее с положительным направлением оси z .

При постепенном возрастании обобщенной силы P напряжения в некотором сечении (возможно, в нескольких сечениях) балки будут увеличиваться вплоть до предела текучести, а эпюра напряжений будет изменять свою форму, как показано на рис.2, переходя от стадии упругого деформирования (а) к стадиям упруго-пластического (б) и пластического (в) деформирования.

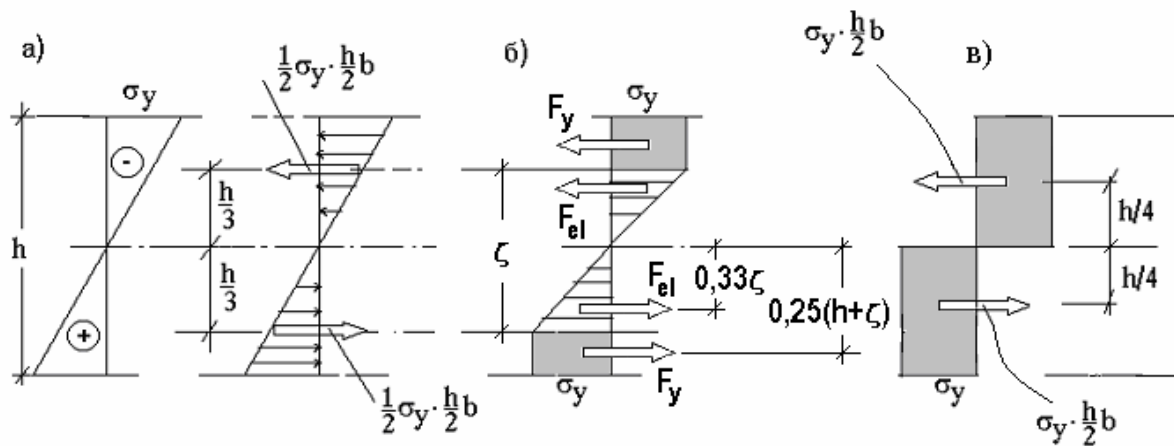


Рис.2. Стадии напряженного состояния сечения балки.

Изгибающий момент в поперечном сечении балки в общем случае определяется формулой:

$$M_x = \int_{(A)} y \alpha dA. \quad (1)$$

Далее предполагается, что балка изгибается выпуклостью вниз.

а). *Стадия упругого деформирования.* При чистом изгибе балки в плоскости симметрии на крайних гранях поперечных сечений возникают напряжения: σ_+ на нижней грани и σ_- на верхней. До тех пор, пока $\sigma_+ < \sigma_y$ и $\sigma_- > \sigma_y$, где σ_y – предел текучести, максимальные напряжения можно определять по известной формуле сопротивления материалов $\sigma_{\max} = M \cdot y_{\max} / J$ (M – изгибающий момент, J – осевой момент инерции сечения, y_{\max} – расстояние от центральной оси до наиболее удаленного волокна сечения).

При некотором значении изгибающего момента M_{el} в волокнах крайних граней сечения напряжения будут равны пределу текучести, а в остальной части – меньше предела текучести (рис.2,а). Это значение изгибающего момента M_{el} называется предельным упругим изгибающим моментом и в случае балки прямоугольного поперечного сечения определяется формулой:

$$M_{el} = \left(\frac{1}{2} \sigma_y \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \right) 2 = \sigma_y \frac{bh^2}{6} = \sigma_y \cdot W, \quad (2)$$

где W – упругий момент сопротивления: $W = \frac{bh^2}{6}$.

Далее будем полагать, что предельный упругий изгибающий момент M_{el} – это максимальный изгибающий момент в наиболее нагруженном сечении балки в упругой стадии работы материала.

б). *Стадия упруго-пластического деформирования.* При нарастании обобщенной силы P в волокнах средней части сечения балки высотой ζ (рис.2,б) будут действовать напряжения, не превосходящие предела текучести ($\sigma \leq \sigma_y$), а в остальной части сечения напряжения достигнут предела текучести ($\sigma = \sigma_y$). Средняя часть сечения, в которой $\sigma \leq \sigma_y$, называется *упругим ядром* сечения. В этой стадии изгибающий момент M_{e-p} вычисляется следующим образом.

Равнодействующая напряжений половины упругого ядра $F_{el} = \sigma_y \zeta / 4$, а остальной части половины сечения – $F_y = \sigma_y (h - \zeta) / 2$. Умножив силу F_{el} на плечо $\zeta / 3$, а равнодействующую силу F_y на плечо $(h + \zeta) / 4$, и сложив результаты, найдем половину изгибающего момента M_{e-p} , который может воспринять сечение.

Полный упруго-пластический изгибающий момент M_{e-p} определяется формулой:

$$M_{e-p} = b \left[\frac{\zeta^2}{6} + \frac{h^2 - \zeta^2}{4} \right] \sigma_y. \quad (3)$$

При $\zeta = 1$ в состоянии пластичности находится только верхняя и нижняя грани сечения. При $\zeta = 0$ в состоянии пластичности – все сечение. Выразим высоту упругого ядра через высоту сечения: $\zeta = m \cdot h$, где $m \leq 1$. Тогда выражение (3) упруго-пластического изгибающего момента M_{e-p} получит вид:

$$M_{e-p} = \frac{bh^2}{4} \left[1 - \frac{m^2}{3} \right] \sigma_y. \quad (4)$$

Кривизна изогнутой оси стержня $\kappa = 1/\rho$ при чистом изгибе определяется высотой упругого ядра (ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки):

$$\kappa = 1/\rho = \frac{M_{e-p}}{EJ_\zeta}, \quad (5)$$

где J_ζ – осевой момент инерции упругого ядра, E – модуль Юнга материала, из которого изготовлена балка.

После подстановки в (5) M_{e-p} по (4) и $J_\zeta = b\zeta^3/12 = m^3bh^3/12$, получим:

$$\kappa = 1/\rho = \frac{3 - m^2}{m^3} \cdot \frac{\sigma_y}{Eh}. \quad (6)$$

в). *Стадия пластического деформирования.* При дальнейшем нарастании обобщенной силы P во всех волокнах сечения будут действовать напряжения, равные пределу текучести ($\sigma = \sigma_y$). Напряженное состояние, при котором во всех волокнах сечения действуют напряжения, равные пределу текучести, называется **пластическим шарниром**.

Пластический изгибающий момент M_{pl} вычисляется аналогично упруго-пластическому:

$$M_{pl} = 2 \left(\sigma_y \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{4} \right) = \sigma_y \cdot \frac{bh^2}{4} = \sigma_y \cdot W_{pl}. \quad (7)$$

Величина $W_{pl} = \frac{bh^2}{4}$ называется **пластическим моментом сопротивления** сечения, а $M_{pl} = \sigma_y W_{pl}$ – **предельным пластическим изгибающим моментом**.

Отношение предельных изгибающих моментов $M_{pl}/M_{el} = W_{pl}/W_{el} = 3/2$. Следовательно, предельная несущая способность балки прямоугольного поперечного сечения при изгибе в 1,5 раза больше вычисленной по упругой стадии деформирования.

Для некоторых других форм сечений отношение M_{pl}/M_{el} приведено в табл.2.

Для сечений произвольной формы, но с плоскостью симметрии, в которой действует изгибающий момент, из условия равенства нулю продольной силы в предельном состоянии сечения получается:

$$\sigma_y A_t - \sigma_y A_c = 0, \quad (8)$$

где A_t , A_c – растянутая и сжатая части площади поперечного сечения.

Из уравнения (8) следует, что $A_t = A_c$.

Предельное значение изгибающего момента M_{pl} определяется как сумма моментов равнодействующих напряжений в растянутой и сжатой частях площади поперечного сечения относительно нейтральной оси:

$$M_{pl} = \sigma_y A_t y_t + \sigma_y A_c y_c = \sigma_y (S_t + S_c) = \sigma_y W_{pl}, \quad (9)$$

где y_t , y_c – расстояния от равнодействующих напряжений до нейтральной оси; S_t , S_c – статические моменты растянутой ($S_t = A_t y_t$) и сжатой ($S_c = A_c y_c$) зоны поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Таблица 2

Отношение пластических и упругих изгибающих моментов для некоторых форм поперечных сечений балок

Форма сечения				
Отношение изгибающих моментов M_{pl}/M_{el}	1,16	1,27	1,70	2,0

Пластический момент сопротивления W_{pl} равен сумме статических моментов растянутой S_t и сжатой S_c зоны поперечного сечения относительно нейтральной оси, в каждой из которых напряжения равны пределу текучести: $W_{pl} = S_t + S_c$ (см. Приложение 13).

2.2. *Предельная несущая способность балок при изгибе.* Несущая способность балки при изгибе будет исчерпана, как только балка потеряет геометрическую неизменяемость. Статически определимые балки теряют геометрическую неизменяемость при возникновении одного пластического шарнира, статически неопределимые – при возникновении нескольких пластических шарниров, число которых превышает степень статической неопределимости на единицу.

В расчетах предельной несущей способности балок используют те же способы, что и в расчетах шарнирно-стержневых систем, рассмотренные в Задании №8, а именно: способ упругих решений (последовательных догрузений), кинематический и статический. Покажем на примерах, как используются способ упругих решений и кинематический способ определения предельной несущей способности балок.

3. Несущая способность однопролетной балки.

Рассмотрим однопролетную балку с левым защемленным и правым шарнирно-опертым концами, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , как показано на рис.3,а. Поперечное сечение балки – равнобокая трапеция.

Найдем допускаемые нагрузки $q_{adm,el}$ в упругом расчете и $q_{adm,pl}$ в пластическом расчете (по предельному равновесию). Осевой момент инерции поперечного сечения балки – J , модуль упругости материала E .

Сравним положение пластического шарнира в пролете балки в предельном равновесии с положением наиболее напряженного сечения в упругой стадии ее работы.

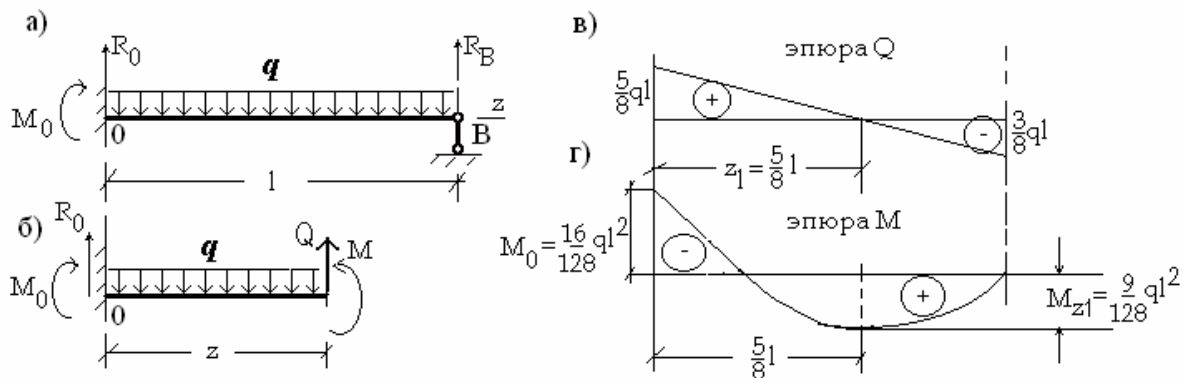


Рис.3. Однопролетная статически неопределимая балка.

3.1. **Упругий расчет.** Балка один раз статически неопределимая. Дифференциальные зависимости между q , Q , M имеют вид:

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{dQ}{dz} = -q, \quad \frac{d^2M}{dz^2} = -q. \quad (10)$$

Заметим, что эти зависимости выведены, исходя из рассмотрения равновесия элемента балки безотносительно к стадии деформирования – упругой или пластической.

Раскрываем статическую неопределимость.

Уравнения равновесия балки:

$$\Sigma M_{(B)} = 0; \quad M_0 + R_0 \cdot l - \frac{1}{2}ql^2 = 0, \quad R_0 \cdot l + M_0 = \frac{1}{2}ql^2; \quad (11)$$

$$\Sigma M_{(0)} = 0; \quad M_0 - R_B \cdot l + \frac{1}{2}ql^2 = 0, \quad -R_B \cdot l + M_0 = -\frac{1}{2}ql^2. \quad (12)$$

Два уравнения (11), (12) содержат три неизвестных: M_0 , R_0 , R_B . Для составления уравнения совместности перемещений используем метод начальных параметров (см. Приложение 2). Начальные параметры: прогиб балки в начале координат – $v_0 = 0$ и угол поворота поперечного сечения – $\theta_0 = 0$ известны; изгибающий момент M_0 и поперечная сила $Q_0 = R_0$ должны быть определены.

Универсальное уравнение упругой линии:

$$EJv = - M_0 \cdot \frac{z^2}{2!} - R_0 \cdot \frac{z^3}{3!} + q \cdot \frac{z^4}{4!}. \quad (13)$$

Граничное условие: при $z = l$ $v(l) = 0$.

После подстановки уравнения упругой линии (13) в граничное условие $v(l) = 0$ получаем уравнение совместности перемещений:

$$0 = M_0 \cdot \frac{l^2}{2} + R_0 \cdot \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24}. \quad (14)$$

Из системы уравнений (11), (12), (14) определяем опорные реакции:

$$R_0 = \frac{5}{8}ql, \quad R_B = \frac{3}{8}ql, \quad M_0 = -\frac{1}{8}ql^2.$$

Строим эпюру поперечных сил Q в упругой стадии деформирования балки. Рассматривая левую часть балки (рис.3,б), составляем выражение для перерезывающей силы $Q(z)$ и определяем координату z_e , где $Q(z_e) = 0$:

$$-Q - qz + R_0 = 0, \quad Q = R_0 - qz; \quad R_0 - qz = 0, \quad z_e = R_0/q = \frac{5}{8}l.$$

Эпюра перерезывающих (поперечных) сил Q показана на рис.3,в.

Строим эпюру изгибающих моментов $M(z)$ в упругой стадии деформирования балки. Используя сумму моментов относительно центра сечения (рис.3,б), составляем выражение для $M(z)$:

$$M(z) = M_0 + R_0 \cdot z - q \frac{z^2}{2}, \quad (15)$$

где

$$M_0 = -\frac{1}{8}ql^2, \quad R_0 = \frac{5}{8}ql.$$

Изгибающий момент в сечении $z = z_e = \frac{5}{8}l$:

$$M(z_e) = -\frac{1}{8}ql^2 + \frac{25}{64}ql^2 - \frac{1}{2}q \frac{25}{64}l^2 = \frac{25}{128}ql^2 - \frac{16}{128}ql^2 = \frac{9}{128}ql^2.$$

Эпюра изгибающих моментов $M(z)$ показана на рис.3,г.

Допускаемую нагрузку $q_{adm,el}$ найдем из условия прочности по допускаемым напряжениям:

$$\max|\sigma| = \frac{\max|M|}{W} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n_y}, \quad (16)$$

где σ_y – предел текучести, n_y – коэффициент запаса прочности по пределу текучести.

По эпюре изгибающих моментов $M(z)$ на рис.3,г находим максимальный по абсолютному значению изгибающий момент $\max|M| = |M_0| = 16ql^2/128$. Подставляя его в (16), получаем допускаемую нагрузку $q_{adm,el}$ в упругом расчете:

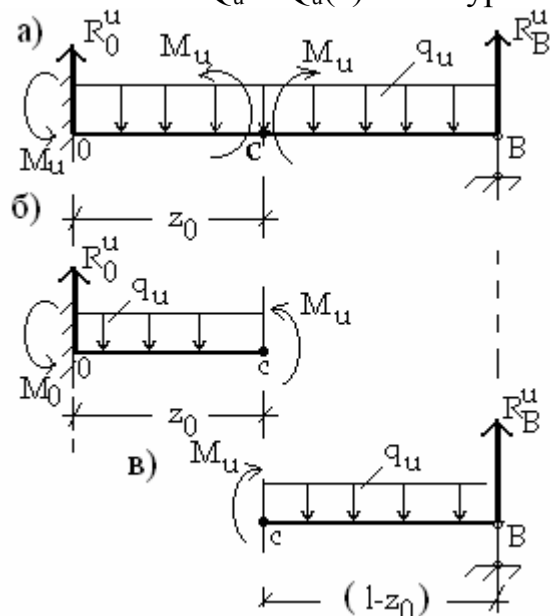
$$q_{adm,el} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{8W}{l^2}. \quad (17)$$

3.2. Отыскание предельной нагрузки способом упругих решений.

Изгибающий момент достигает экстремума в точке, где перерезывающая сила Q равна нулю. Координата z_e сечения, где в пролете балки возникает M_{max} в упругой стадии, определена в п.3.1.

Пометим индексом "u" величины, относящиеся к предельному состоянию балки: предельный изгибающий момент – M_u , перерезывающую (поперечную) силу – Q_u , опорные реакции – R_0^u , R_B^u , предельную нагрузку – q_u . Величины R_0^u , R_B^u , M_u , q_u , z_0 являются параметрами предельного состояния (z_0 – расстояние от опоры **O** до пластического шарнира в пролете).

Для определения координаты z_0 сечения, где образуется пластический шарнир в предельном состоянии балки, необходимо найти зависимость $Q_u = Q_u(z)$ и из уравнения $Q_u(z) = 0$ найти $z = z_0$.



Балка придет в предельное состояние при возрастании q в тот момент, когда образуется 2 пластических шарнира: один в заделке (на опоре **O**), другой – в пролете.

Пластический момент M_u известен: $M_u = \sigma_y W_{pl}$, где W_{pl} – пластический момент сопротивления, равный сумме статических моментов поперечного сечения в состоянии пластичности: $W_{pl} = S_t + S_c$; S_t , S_c – статические моменты растянутой и сжатой частей поперечного сечения в состоянии пластичности относительно нейтральной линии (см.п.2.1).

Рис.4. Предельное равновесие балки.

Неизвестными являются R_0^u , R_B^u , q_u , z_0 .

Рассматривая равновесие всей балки можно составить 2 независимых уравнения (рис.4,а):

$$\Sigma M_{(O)} = 0: -M_u + \frac{1}{2}q_u l^2 - R_B^u \cdot 1 = 0, \quad -R_B^u \cdot 1 + \frac{1}{2}q_u l^2 = M_u; \quad (18)$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0: -M_u + \frac{1}{2}q_u l^2 - R_0^u \cdot 1 = 0, \quad R_0^u \cdot 1 - \frac{1}{2}q_u l^2 = M_u. \quad (19)$$

Отметим точкой c центр площади поперечного сечения $z = z_0$, в котором возникает второй пластический шарнир; рассечем балку на две части и рассмотрим равновесие каждой из них при действии предельной нагрузки q_u .

Левая часть балки OC (рис.4,б):

$$\Sigma M_{(c)} = 0: -M_u + R_0^u \cdot z_0 - 0,5q_u z_0^2 - M_u = 0, \quad R_0^u \cdot z_0 - 0,5q_u z_0^2 = 2M_u; \quad (20)$$

Правая часть балки BC (рис.4,в):

$$\Sigma M_{(c)} = 0: \\ M_u + 0,5q_u (1-z_0)^2 - R_B^u (1-z_0) = 0, \quad R_B^u (1-z_0) - 0,5q_u (1-z_0)^2 = M_u. \quad (21)$$

Исключив из уравнений (19), (20) опорную реакцию R_0^u , получим выражение для предельной нагрузки q_u в виде:

$$q_u = \frac{2M_u(2l-z_0)}{lz_0(1-z_0)}. \quad (22)$$

После подстановки q_u по (22) в выражения (18) и (19) найдем R_0^u , R_B^u :

$$R_0^u = \frac{M_u(2l-z_0)}{z_0(1-z_0)} + \frac{M_u}{l}, \quad R_B^u = \frac{M_u(2l-z_0)}{z_0(1-z_0)} - \frac{M_u}{l}. \quad (23)$$

Для определения координаты z_0 составим выражение для $Q_u(z)$ и используем связь $dM/dz = Q$. Рассматриваем правую часть балки (рис.4,в):

$$Q_u - q_u(1-z_0) + R_B = 0, \quad Q_u = q_u(1-z_0) - R_B. \quad (24)$$

Полагаем $Q_u = 0$:

$$q_u(1-z) - R_B = 0. \quad (25)$$

Подставив значение R_B по (23) и q_u по (22) в уравнение $Q_u = 0$ (25), получим квадратное уравнение для определения координаты z_0 :

$$\frac{2M_u(2l-z_0)(1-z_0)}{lz_0(1-z_0)} - \frac{M_u(2l-z_0)}{z_0(1-z_0)} + \frac{M_u}{1} = 0, \quad z_0^2 - 4lz_0 + 2l^2 = 0. \quad (26)$$

Решение уравнения (26):

$$z_0 = 2l \pm \sqrt{4l^2 - 2l^2} = (2 \pm \sqrt{2})l, \quad z_0 = (2 - \sqrt{2})l = 0,586l. \quad (27)$$

Подставив значение z_0 по (27) в уравнения (22), (23), получим значения предельной нагрузки q_u и опорных реакций R_O , R_B :

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{2M_u(2l - 2l + \sqrt{2}l)}{(2 - \sqrt{2})l^2(1 - 2l + \sqrt{2}l)} = \frac{2\sqrt{2}M_ul}{l^2(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)l} = \frac{2\sqrt{2}M_u}{l^2(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} = \\ &= \frac{2M_u}{l^2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2\sigma_y \cdot W_{pl}}{l^2(\sqrt{2} - 1)^2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$R_O = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{M_u}{l}, \quad R_B = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{M_u}{l}. \quad (29)$$

3.3. Кинематический способ отыскания предельной нагрузки.

Балка может потерять геометрическую неизменяемость только по одной схеме, когда на опоре **O** и в пролете возникнут пластические шарниры. Установим их на опоре **O** и в сечении с координатой $z = z_0$.

Так как перерезывающая (поперечная) сила в сечении $z = z_0$ должна обратиться в ноль, рассмотрим равновесие звеньев **OC** и **BC** на рис.4,б,в:

Звено **OC** (рис.4,б):

$$\Sigma M_{(O)} = 0: \quad 2M_u - \frac{1}{2}q_uz_0^2 = 0. \quad (30)$$

Звено **CB** (рис.4,в):

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad -M_u + \frac{1}{2}q_u(1-z_0)^2 = 0. \quad (31)$$

Исключив из уравнений (30), (31) M_u , получим уравнение для определения z_0 :

$$-\frac{1}{2}q_uz_0^2 + q_u(1-z_0)^2 = 0, \quad z_0^2 - 4lz_0 + 2l^2 = 0. \quad (32)$$

Решение уравнения (32):

$$z_0 = 2l \pm \sqrt{4l^2 - 2l^2} = 2l \pm \sqrt{2}l^2 = (2 \pm \sqrt{2})l. \quad (33)$$

Так как $(2 + \sqrt{2})l > 1$, то принимаем $z_0 = (2 - \sqrt{2})l$.

Зная z_0 , из (30) или (31) найдем q_u :

$$q_u = \frac{4M_u}{z_0^2} = \frac{4M_u}{l^2(2 - \sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}M_u}{l^2(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2\sigma_y \cdot W_{pl}}{l^2(\sqrt{2} - 1)^2}. \quad (34)$$

Предельная нагрузка (34), вычисленная кинематическим способом, совпадает с предельной нагрузкой (28), вычисленной способом упругих решений.

Соотношение между z_0 и z_e :

$$z_0 = (2 - \sqrt{2})l = (2 - 1,41)l = 0,59l, \quad z_e = \frac{5}{8}l = 0,625l; \quad z_0/z_e = 0,944.$$

Пластический шарнир располагается несколько ближе к опоре **O**, чем максимальный изгибающий момент M_{\max} в пролете балки, вычисленный в п.3.1.

Допускаемое значение нагрузки, рассчитанное методом предельного равновесия найдем, разделив q_u (28) на коэффициент запаса n_y :

$$q_{adm,pl} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{2W_{pl}}{l^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{11,66W_{pl}}{l^2}. \quad (35)$$

Отношение допускаемых нагрузок (35) и (17):

$$\frac{q_{adm,pl}}{q_{adm,el}} = \frac{11,66W_{pl}}{8W} = 1,46 \frac{W_{pl}}{W}. \quad (36)$$

Для стальной балки ($\sigma_y = 240$ МПа, $n_y = 1,5$) пролетом $l = 2$ м с поперечным сечением в форме равнобокой трапеции, имеющей размеры $h = 100$ мм, $b_1 = 50$ мм, $b_2 = 100$ мм, упругий статический момент сопротивления $W = 103,6$ см³, а пластический – $W_{pl} = 162,2$ см³ (см. Приложение 13).

Допускаемое значение нагрузки на балку в упругой стадии деформирования, вычисляемое по формуле (17), имеет значение

$$q_{\text{adm,el}} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{8W}{l^2} = \frac{240 \cdot 10^6}{1,5} \frac{8 \cdot 103,6 \cdot 10^{-6}}{2^2} = 33,15 \text{ кН/м};$$

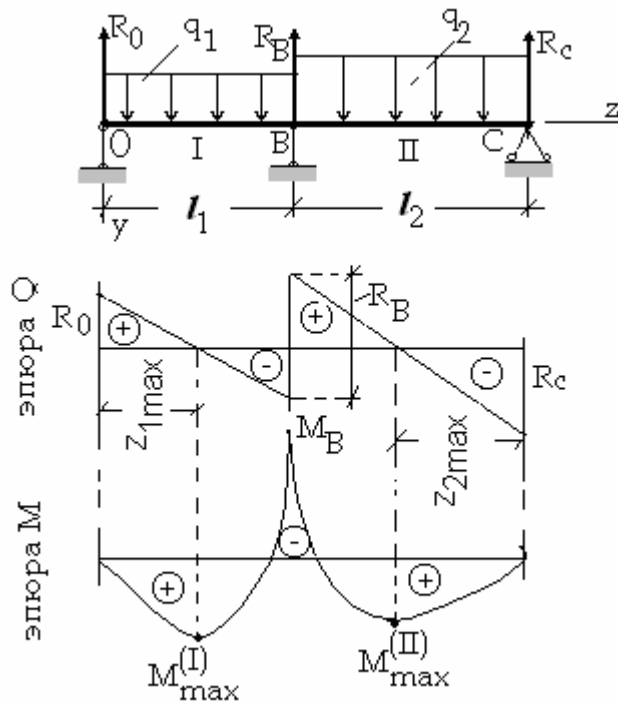
допускаемое значение нагрузки на балку в пластической стадии деформирования, вычисляемое по формуле (35), имеет значение

$$q_{\text{adm,pl}} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{11,66W_{\text{pl}}}{l^2} = \frac{240 \cdot 10^6}{1,5} \frac{11,66 \cdot 1632,2 \cdot 10^{-6}}{2^2} = 75,65 \text{ кН/м}.$$

Отношение допускаемых нагрузок

$$\frac{q_{\text{adm,pl}}}{q_{\text{adm,el}}} = \frac{75,65}{33,15} = 2,28.$$

4. Несущая способность двухпролетной балки.



Рассмотрим двухпролетную неразрезную балку постоянного поперечного сечения, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q_1, q_2 – рис.5. Осевой момент инерции – J , модуль упругости материала балки – E . Соотношение между нагрузками $q_2 = aq_1$, a – число. Предел текучести материала балки – σ_y , коэффициент запаса по пределу текучести – n_y . Найдем допускаемую нагрузку на балку расчетом по допускаемым напряжениям – $q_{\text{adm,el}}$ и по предельному равновесию – $q_{\text{adm,pl}}$.

Рис.5. Двухпролетная неразрезная балка.

4.1. Упругий расчет двухпролетной балки. Вначале полагаем, что в любой точке балки напряжения не должны превышать величины $\sigma_y / n_y = \sigma_{\text{adm}} : \max|\sigma| \leq \sigma_{\text{adm}}$.

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки на рис.5. На опорах возникают три вертикальные реакции: R_0, R_B, R_C .

Балка один раз статически неопределимая. Для раскрытия статической неопределимости используем метод начальных параметров (см. Приложение 2). Предварительно составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma M_{(c)} = 0: R_0(l_1 + l_2) + R_B l_2 - q_1 l_1 \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) - q_2 l_2 \frac{1}{2} l_2 = 0; \quad (37)$$

$$\Sigma M_{(0)} = 0: -R_B l_1 - R_c(l_1 + l_2) + q_1 l_1 \cdot \frac{1}{2} l_1 + q_2 l_2 \left(l_1 + \frac{1}{2} l_2 \right) = 0.$$

Универсальное уравнение упругой линии на n-ом участке балки (метод начальных параметров):

$$EJv_n = EJv_0 + EJ\theta_0 z - M_0 \frac{z^2}{2!} - Q_0 \frac{z^3}{3!} + q_0 \frac{z^4}{4!} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ -\Delta M_i \frac{(z - a_i)^2}{2!} - \Delta Q_i \frac{(z - a_i)^3}{3!} + \Delta q_i \frac{(z - a_i)^4}{4!} \right\}, n = I, II, \dots, N. \quad (38)$$

В уравнении (38) a_i – расстояния от начала координат до левой границы i-го участка.

Первый участок: $0 \leq z < l_1$: $v_0 = 0$, $\theta_0 \neq 0$, $M_0 = 0$, $Q_0 = R_0$, $q_0 = -q_1$, $q_0' = 0$;

$$EJv_I = EJ\theta_0 z - R_0 \cdot \frac{z^3}{6} + q_1 \frac{z^4}{24}. \quad (39)$$

В уравнении (39) θ_0 и R_0 – неизвестные.

Второй участок: $l_1 \leq z < (l_1 + l_2)$: $\Delta M_I = 0$, $\Delta Q_I = R_B$, $\Delta q_I = q_2 - q_1$;

$$\begin{aligned} EJv_{II} &= EJv_I + R_B \frac{(z - l_1)^3}{6} + (q_1 - q_2) \frac{(z - l_1)^4}{24} = \\ &= EJ\theta_0 z + R_0 \cdot \frac{z^3}{6} - q_1 \frac{z^4}{24} + \frac{1}{6} (z - l_1)^3 + \frac{1}{24} (q_1 - q_2) (z - l_1)^4. \end{aligned} \quad (40)$$

С помощью уравнения (40) и двух граничных условий $v_B = 0$ (41) и $v_c = 0$ (42) получим еще два уравнения для определения неизвестных.

При $v_B = 0$ из уравнения (39) получается:

$$EJ\theta_0 l_1 + \frac{1}{6} R_0 l_1^3 - \frac{1}{24} q_1 l_1^4 = 0. \quad (43)$$

При $v_c = 0$ уравнение (40) дает:

$$EJ\theta_0(l_1 + l_2) + \frac{1}{6}R_0(l_1 + l_2)^3 - \frac{1}{24}q_1(l_1 + l_2)^4 + \frac{1}{6}R_B \cdot l_2^3 + \frac{1}{24}(q_1 - q_2) \cdot l_2^4 = 0 \quad (44)$$

Таким образом, имеем систему из четырех уравнений (37), (43), (44) для определения четырех неизвестных – R_0 , R_B , R_c , θ_0 :

$$\begin{cases} (l_1 + l_2)R_0 + l_2R_B = q_1l_1\left(\frac{1}{2}l_1 + l_2\right) + \frac{1}{2}q_2l_2^2, \\ l_1R_B + (l_1 + l_2)R_c = \frac{1}{2}q_1l_1^2 + q_2l_2\left(l_1 + \frac{1}{2}l_2\right), \\ \frac{1}{6}l_1^3R_0 + EJ\theta_0l_1 = \frac{1}{24}q_1l_1^4, \\ \frac{1}{6}(l_1 + l_2)^3R_0 + \frac{1}{6}l_2^3R_B + EJ(l_1 + l_2)\theta_0 = \frac{1}{24}q_1(l_1 + l_2)^4 - \frac{1}{24}(q_1 - q_2) \cdot l_2^4. \end{cases} \quad (45)$$

Решив систему уравнений (45), найдем все неизвестные:

$$R_0 = \frac{(3l_1^2 + 4l_1l_2)q_1 - \frac{l_2^3}{l_1}q_2}{8(l_1 + l_2)}, \quad R_B = -\frac{l_1 + l_2}{l_2}R_0 + q_1l_1\left(\frac{1}{2}\frac{l_1}{l_2} + 1\right) + \frac{1}{2}q_2l_2, \quad (46)$$

$$R_c = \frac{l_1}{l_2}R_0 + \frac{1}{2}q_2l_2 - \frac{1}{2}q_1\frac{l_1}{l_2}l_1, \quad EJ\theta_0 = \frac{1}{24}q_1l_1^3 - \frac{l_1^2}{6}R_0.$$

Определяем изгибающие моменты.

Первый участок: $0 \leq z_1 < l_1$ (начало координат z_1 – в точке **O**, направление z_1 вправо):

$$M_I = R_0 \cdot z_1 - q_1 \frac{z_1^2}{2}; \quad M_B = R_0 \cdot l_1 - \frac{1}{2}q_1l_1^2. \quad (47)$$

Для отыскания наибольшего по абсолютной величине изгибающего момента на первом участке $M_{\max}^{(I)}$ вычисляем:

$$\frac{dM_I}{dz_1} = 0, \quad R_0 - q_1 z_1 = 0, \quad z_{1\max} = R_0 / q_1,$$

$$M_{\max}^{(I)} = R_0 \cdot \frac{R_0}{q_1} - q_1 \cdot \frac{1}{2} R_0^2 / q_1^2 = R_0^2 / q_1 - \frac{1}{2} R_0^2 / q_1 = \frac{1}{2} R_0^2 / q_1. \quad (48)$$

Второй участок: $0 \leq z_2 < l_2$ (начало координат – в точке **С**, направление z_2 влево):

$$M_{II} = R_c \cdot z_2 - q_2 \frac{z_2^2}{2}, \quad M_B = R_c \cdot l_2 - \frac{1}{2} q_2 l_2^2 = R_A \cdot l_1 - \frac{1}{2} q_1 l_1^2. \quad (49)$$

Для определения $M_{\max}^{(II)}$ вычисляем: $\frac{dM_{II}}{dz_2} = 0, \quad R_c - q_2 z_2 = 0, \quad z_{2\max} = R_c / q_2.$

$$M_{\max}^{(II)} = R_c \cdot \frac{R_c}{q_2} - \frac{1}{2} q_2 R_c^2 / q_2^2 = \frac{1}{2} R_c^2 / q_2. \quad (50)$$

Строим (приближенно) эпюры Q, M (рис.5).

На участке I: Q – линейная функция, M – квадратная парабола. На участке II: Q – линейная функция, M – квадратная парабола. На опорах **О, В, С** функция Q имеет скачки, равные R_0, R_B, R_c .

Прогибы и углы поворота сечений балки определены уравнениями (39), (40), в которых

$$EJ\theta_0 = \frac{1}{24} q_1 l_1^3 - \frac{R_0^2}{6}.$$

На первом участке уравнение (39) дает:

$$EJv_I = \left(\frac{1}{24} q_1 l_1^3 - \frac{l_1^2}{6} R_0 \right) z + \frac{1}{6} R_0 z^3 - \frac{1}{24} q_1 z^4 = \\ = \frac{R_0 l_1^3}{6} \left(\frac{z^3}{l_1^3} - \frac{z}{l_1} \right) + \frac{q_1 l_1^4}{24} \left(\frac{z}{l_1} - \frac{z^4}{l_1^4} \right). \quad (51)$$

Дифференцируя (51) по z , получим $EJ\theta_I$:

$$EJ\theta_I = \frac{R_0 l_1^3}{6} \left(\frac{3z^2}{l_1^3} - \frac{1}{l_1} \right) + \frac{q_1 l_1^4}{24} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{4z^3}{l_1^4} \right) = \frac{R_0 l_1^2}{2} \left(\frac{z^2}{l_1^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{q_1 l_1^3}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^3}{l_1^3} \right). \quad (52)$$

На втором участке уравнение (40) дает:

$$EJv_{II} = EJv_I + R_B \frac{(z-l_1)^3}{6} + (q_1 - q_2) \frac{(z-l_1)^4}{24} = \frac{R_0 l_1^3}{6} \left(\frac{z^3}{l_1^3} - \frac{z}{l_1} \right) + \frac{q_1 l_1^4}{24} \left(\frac{z}{l_1} - \frac{z^4}{l_1^4} \right) + \frac{1}{6} R_B (z-l_1)^3 + \frac{q_1 - q_2}{24} (z-l_1)^4. \quad (53)$$

Дифференцируя (53) по z , получим $EJ\theta_{II}$:

$$EJ\theta_{II} = \frac{R_0 l_1^2}{2} \left(\frac{z^2}{l_1^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{q_1 l_1^3}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^3}{l_1^3} \right) + \frac{R_B}{2} (z-l_1) + \frac{q_1 - q_2}{6} (z-l_1)^3. \quad (54)$$

В случае равных пролетов ($l_1 = l_2 = l$) и равных интенсивностей распределенной нагрузки на балку ($q_1 = q_2 = q$) находим допускаемое значение $q_{adm,el}$.

Наибольшие по абсолютной величине изгибающие моменты в пролетах балки:

$$M_{\max}^{(I)} = M_{\max}^{(II)} = \frac{1}{2} R_0^2 / q_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} q l \right)^2 / q = \frac{9}{128} q l^2 = 0,07 q l^2. \quad (55)$$

Наибольший по абсолютной величине изгибающий момент достигается на опоре **B** балки:

$$M_B = R_0 \cdot l_1 - \frac{1}{2} q_1 l_2^2 = \frac{3}{8} q l^2 - \frac{1}{2} q l^2 = -\frac{1}{8} q l^2 = -0,125 q l^2. \quad (56)$$

Опорные реакции:

$$R_0 = R_c = \frac{3}{8}ql = 0,375ql, \quad R_B = \frac{5}{4}ql = 1,250ql. \quad (57)$$

Допускаемое значение нагрузки в упругом расчете $q_{adm,el}$:

$$\max|\sigma| = \frac{\max|M|}{W} \leq \frac{\sigma_y}{n_y}, \quad \max|M| = |M_B| = 0,125ql^2,$$

$$q_{adm,el} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{8W}{l^2}. \quad (58)$$

4.2. *Предельное равновесие двухпролетной балки.* Для двухпролетной балки постоянного поперечного сечения, расчетная схема которой приведена на рис.6, определяем предельную нагрузку, опорные реакции в предельном состоянии балки, положение пластических шарниров. Соотношение между q_1 и q_2 считаем постоянным: $q_2 / q_1 = a = \text{const}$.

Для отыскания предельной нагрузки используем кинематический способ. Балка может прийти в предельное состояние при нарастании нагрузки q_1 , $q_2 = aq_1$ по двум схемам:

1) пластический шарнир в сечении В + пластический шарнир в пролете ОВ (рис.6,а);

2) шарнир в сечении В+ шарнир в пролете ВС (рис.6,б).

Предельная нагрузка по 1-ой схеме на рис.6 обозначена как $q_{1,1}$, $q_{2,1} = aq_{1,1}$; по 2-ой схеме – $q_{1,2}$, $q_{2,2} = aq_{1,2}$.

Величина пластического момента в шарнирах $M_u = \sigma_y W_{pl} = \sigma_y (S_t + S_c)$ – известна. Координаты пластических шарниров в пролетах ОВ и ВС заранее не определены; их нужно тоже найти.

Предельная нагрузка на балку определяется как наименьшая из двух:

$$q_{1,u} = \min \{q_{1,1}; q_{1,2}\}, \quad q_{2,u} = aq_{1,u}. \quad (59)$$

Так как в сечениях, где возникает пластический шарнир, изгибающий момент достигает экстремального значения, то в этих сечениях поперечная сила обращается в ноль.

Рассматриваем первую схему перехода балки в предельное равновесие (шарнир в пролете ОВ и на опоре В – рис.6,а).

Равновесие звена ОН₁:

$$\Sigma M_{(0)} = 0: M_u - q_{1,1} \frac{z_1^2}{2} = 0. \quad (60)$$

Равновесие звена ВН₁:

$$\Sigma M_{(B)} = 0: 2M_u - q_{1,1} \frac{(l_1 - z_1)^2}{2} = 0. \quad (61)$$

Из уравнений (60), (61) исключаем M_u .

$$-q_{1,1} \frac{z_1^2}{2} + q_{1,1} \frac{(l_1 - z_1)^2}{4} = 0; \quad -\frac{z_1^2}{2} + \frac{l_1^2}{4} - \frac{l_1 z_1}{2} + \frac{z_1^2}{4} = 0; \\ z_1^2 + 2l_1 z_1 - l_1^2 = 0. \quad (62)$$

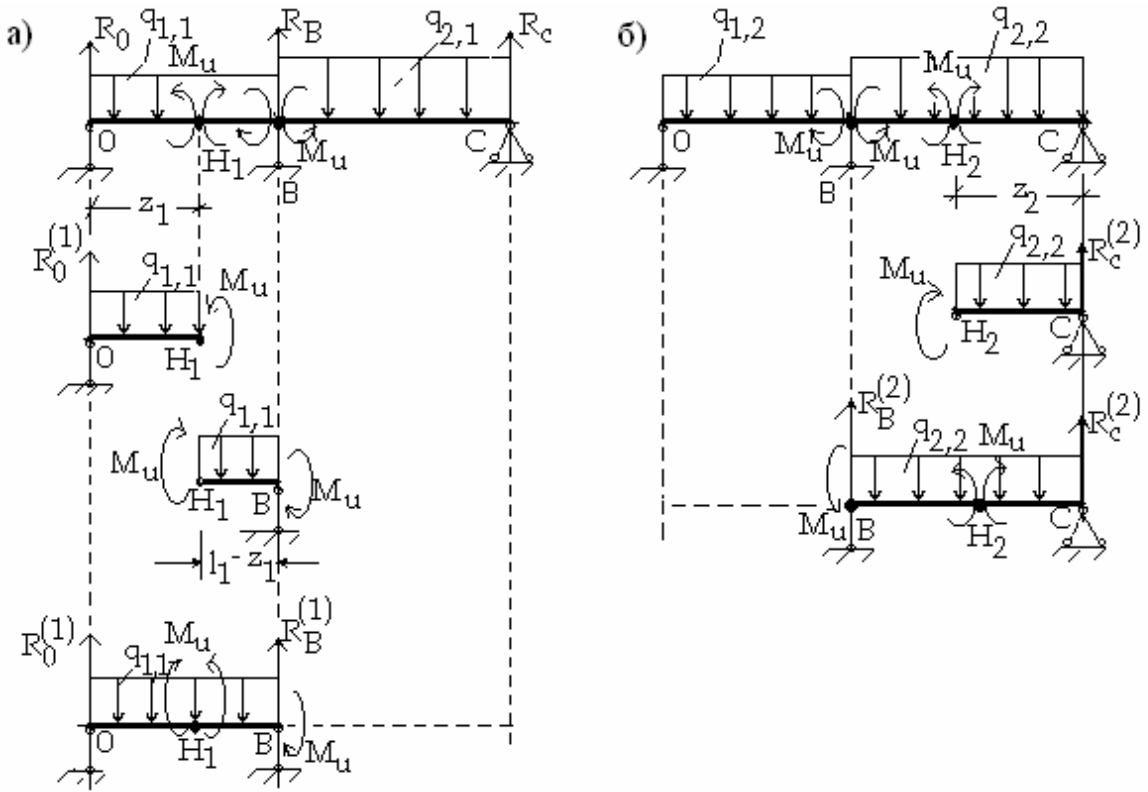


Рис.6. Предельное равновесие двухпролетной балки.

Из двух корней уравнения (62) выбираем меньшее значение:

$$z_1 = -l_1 \pm \sqrt{l_1^2 + l_1^2} = (\sqrt{2} - 1)l_1. \quad (63)$$

Используя уравнение (60), вычисляем предельную нагрузку:

$$q_{1,1}^{(u)} = 2M_u / z_1^2 = 2M_u / l_1^2 (\sqrt{2} - 1)^2; \quad q_{2,1}^{(u)} = a q_{1,1}^{(u)}. \quad (64)$$

Рассматриваем вторую схему перехода балки в предельное равновесие (шарнир в пролете ВС и на опоре В – рис.6,б).

Равновесие звена BH_2 :

$$\Sigma M_{(B)} = 0: \quad 2M_u - q_{2,2} \frac{(l_2 - z_2)^2}{2} = 0. \quad (65)$$

Равновесие звена CH_2 :

$$\Sigma M_{(C)} = 0: \quad M_u - q_{2,2} \frac{z_2^2}{2} = 0. \quad (66)$$

Из уравнений (65), (66) исключаем M_u .

$$-q_{2,2} \frac{(l_2 - z_2)^2}{2} + q_{2,2} z_2^2 = 0; \quad -l_2^2 + 2l_2 z_2 - z_2^2 + 2z_2^2 = 0;$$

$$z_2^2 + 2l_2 z_2 - l_2^2 = 0. \quad (67)$$

Из двух корней уравнения (67) выбираем меньшее значение:

$$z_2 = -l_2 \pm \sqrt{l_2^2 + l_2^2} = (\sqrt{2} - 1)l_2. \quad (68)$$

Используя уравнение (65), вычисляем предельную нагрузку:

$$q_{2,2}^{(u)} = 2M_u / z_2^2 = 2M_u / l_2^2 (\sqrt{2} - 1)^2; \quad q_{1,2}^{(u)} = \frac{1}{a} q_{2,2}^{(u)}. \quad (69)$$

Предельная нагрузка на балку зависит от соотношения пролетов l_1/l_2 и числа a ; она определяется по (59).

Определяем опорные реакции в состоянии предельного равновесия балки. Рассматриваем равновесие балки и ее частей.

Так как на опоре В балки имеется пластический шарнир, то звенья ОВ и ВС можно рассматривать отдельно.

$$\text{Звено ОВ: } \Sigma M_{(B)} = 0; \quad R_0^u \cdot l_1 - \frac{1}{2} q_1^u \cdot l_1^2 + M_u = 0,$$

$$R_0^u = \frac{1}{2} q_1^u \cdot l_1 - \frac{M_u}{l_1}. \quad (70)$$

$$\text{Звено ВС: } \Sigma M_{(B)} = 0; \quad -R_c^u \cdot l_2 + \frac{1}{2} q_2^u \cdot l_2^2 - M_u = 0,$$

$$R_c^u = \frac{1}{2} a q_1^u \cdot l_2 - \frac{M_u}{l_2}. \quad (71)$$

Вся балка АС:

$$\Sigma M_{(C)} = 0; \quad R_0^u (l_1 + l_2) - q_1^u \cdot l_1 \left(l_2 + \frac{1}{2} l_1 \right) + R_B^u \cdot l_2 - \frac{1}{2} q_2^u \cdot l_2^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
R_B^u &= q_1^u \left[l_1 \left(l_2 + \frac{1}{2} l_1 \right) + \frac{1}{2} a l_2^2 \right] / l_2 - R_0^u (l_1 + l_2) / l_2 = \\
&= q_1^u \left\{ \left[l_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_2} \right) + \frac{1}{2} a l_2 \right] - \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_2} (l_1 + l_2) \right\} + \frac{M_u (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} = \\
&= q_1^u \left\{ \frac{1}{2} l_1 + \frac{1}{2} \frac{l_1^2}{l_2} + \frac{1}{2} a l_2 - \frac{1}{2} \frac{l_1^2}{l_2} - \frac{1}{2} l_1 \right\} + M_u \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} = \frac{1}{2} q_1^u (l_1 + a l_2) + \\
&\quad + M_u \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right). \tag{72}
\end{aligned}$$

В случае равных пролетов ($l_1 = l_2 = l$) и равных интенсивностей распределенной нагрузки на балку ($q_1 = q_2 = q$) допускаемое значение $q_{adm,pl}$ найдем следующим образом.

Предельная нагрузка по первой схеме перехода балки в предельное равновесие:

$$q_{1,1}^{(u)} = q_{2,1}^{(u)} = \frac{2M_u}{l^2(\sqrt{2}-1)^2}.$$

По второй схеме:

$$q_{1,2}^{(u)} = q_{2,2}^{(u)} = \frac{2M_u}{l^2(\sqrt{2}-1)^2}.$$

Как видим, предельная нагрузка по обеим схемам одинаковая, и она равна q_u :

$$q_u = \frac{2M_u}{l^2(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2\alpha_y W_{pl}}{l^2(\sqrt{2}-1)^2}. \tag{73}$$

Допускаемая нагрузка в пластической стадии деформирования:

$$q_{adm,pl} = \frac{\alpha_y}{n_y} \cdot \frac{2W_{pl}}{l^2(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{\alpha_y}{n_y} \cdot \frac{11,66W_{pl}}{l^2}. \tag{74}$$

Отношение допускаемых нагрузок в пластической и упругой стадиях деформирования:

$$\frac{q_{adm,pl}}{q_{adm,el}} = \frac{11,66W_{pl}}{8W} = 1,46 \frac{W_{pl}}{W}.$$

Для стальной двутавровой балки $W_{pl}/W \approx 1,16$, отношение допускаемых нагрузок $1,46 \cdot 1,16 = 1,69$.

Вычислим значения допускаемых нагрузок в пластической и упругой стадиях деформирования балки.

Примем следующие исходные данные: пролеты $l = 3\text{ м}$; двутавровая балка № 18; упругий момент сопротивления $W = 143\text{ см}^3$; предел текучести стали $\sigma_y = 240\text{ МПа}$, коэффициент запаса прочности по пределу текучести $n_y = 1,5$. Из табл.2 для двутавра выбираем отношение пластического и упругого момента сопротивления $W_{pl}/W \approx 1,15$ и находим $W_{pl} \approx 1,16W = 1,16 \cdot 143 = 165,88\text{ см}^3$. По формулам (58) и (74) вычисляем допускаемые нагрузки:

$$q_{adm,el} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{8W}{l^2} = \frac{240 \cdot 10^6}{1,5} \cdot \frac{8 \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 20,338 \text{ кН/м};$$

$$q_{adm,pl} = \frac{\sigma_y}{n_y} \cdot \frac{11,66W_{pl}}{l^2} = \frac{240 \cdot 10^6}{1,5} \cdot \frac{11,66 \cdot 165,88 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 34,385 \text{ кН/м}.$$

Отношение допускаемых нагрузок в пластической и упругой стадиях деформирования:

$$\frac{q_{adm,pl}}{q_{adm,el}} = \frac{34,385}{20,338} = 1,69.$$

Таким образом, расчет по предельным нагрузкам приводит к увеличению допускаемой нагрузки по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям, а следовательно, к существенной экономии материала при заданной нагрузке.

Расчеты закончены.

Задание № 10. Трёхмерное напряжённо-деформированное состояние и локальная прочность твёрдых тел

Введение. В курсе сопротивления материалов исследуются одномерные, двумерные и трёхмерные напряженно-деформированные состояния элементов конструкций и деталей машин.

Трёхмерные напряженно-деформированные состояния возникают при сложном напряженном состоянии, а также около отверстий, инородных включений, вблизи соединений и сопряжений элементов конструкций (например, в местах сопряжения тонкостенных оболочек, в зонах контакта болтовых соединений, шпонок, нагелей), вблизи резкого изменения геометрии (например, в галтелях, около выточек) или изменения механических свойств материалов (например, около сварных швов, склеек), около опор или закреплений и во многих других случаях, так что изучение трёхмерных напряженно-деформированных состояний весьма важно для оценки прочности элементов конструкций и деталей машин.

В перечисленных случаях обычно возникает концентрация напряжений, служащая одним из главных факторов повреждения и разрушения элементов конструкций и деталей машин, поэтому необходимость анализа трёхмерных напряженно-деформированных состояний диктуется практической потребностью предотвращения повреждений.

Ниже в качестве учебного примера трёхмерного напряженно-деформированного состояния (НДС) выбрано состояние элементарного объёма упругого полупространства, нагруженного на своей свободной поверхности сосредоточенной силой, нормальной к поверхности (задача Буссинеска).

Обоснованием такого выбора служат следующие соображения.

При проектировании, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений различного назначения и класса капитальности, в том числе и сооружений лесопромышленного комплекса, инженеры сталкиваются с проблемой расчётной оценки прочности, жёсткости и устойчивости оснований и фундаментов жилых и промышленных зданий, мостов, плотин, водонапорных и силосных башен, зерновых элеваторов, резервуаров жидкого топлива, опор наплавных гидротехнических сооружений, подвесных канатных дорог и других сооружений. Эти сооружения передают действующие на них эксплуатационные нагрузки и собственный вес на грунт, в котором возникает трёхмерное напряженно-деформированное состояние.

С аналогичной проблемой сталкиваются и инженеры-механики лесных и дорожно-строительных машин при оценке устойчивости возводимых земляных сооружений, при строительстве которых используются тяжёлые дорожно-строительные машины, особенно в том случае, когда сооружение располагается на склонах холмов или на речных откосах.

В действующих Строительных Нормах и Правилах (СНиП) при оценке прочности, жёсткости и устойчивости грунтовых оснований для определения напряженно-деформированного состояния грунтового массива используются модель упругого полупространства и решение задачи Буссинеска.

Решение задачи Буссинеска широко используется и при проектировании, конструировании, изготовлении (технологическая механика), эксплуатации и ремонте машин, механизмов, оборудования и приспособлений лесопромышленного комплекса, в частности, для оценки контактных напряжений, в экспресс-методах контроля механических свойств материалов на основе внедрения в тело детали твердого индентора, для оценки концентрации напряжений и во многих других случаях.

Столь широкое использование решения задачи Буссинеска в инженерной практике делает целесообразным знакомство с этим решением при освоении методов анализа трёхмерного НДС и оценки локальной прочности твёрдых тел, изучаемых в курсе Сопротивления материалов.

1. Цели и задачи работы. Целью расчетно-графической работы является выполнение анализа трёхмерного НДС и оценка локальной прочности массивных твёрдых тел по энергетической теории прочности.

Основные задачи расчетно-графической работы:

- исходя из известного решения задачи Буссинеска в перемещениях построить тензор напряжений и проверить выполнение дифференциальных уравнений равновесия;
- в заданной точке тела вычислить компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} в прямоугольной системе координат $Oxyz$;
- найти главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 ;
- найти направляющие косинусы нормалей к главным площадкам и показать положение главных площадок в системе координат $Oxyz$;
- вычислить характерные для напряженно-деформированного состояния величины, с помощью которых производится оценка прочности тела;
- проверить прочность тела по известной из курса Сопротивления материалов энергетической теории прочности;
- показать в рассматриваемой точке положение площадок, по которым возникают опасные напряженные состояния.

2. Исходные данные для расчетов. Расчетная схема задачи Буссинеска для сосредоточенной силы F представлена на рис.1.

Плоскость, ограничивающая полупространство, совпадает с координатной плоскостью $хоу$; ось $оз$, перпендикулярная плоскости $хоу$, направлена внутрь полупространства. Сосредоточенная сила F приложена в начале координат. Направление силы F совпадает с направлением оси $оз$.

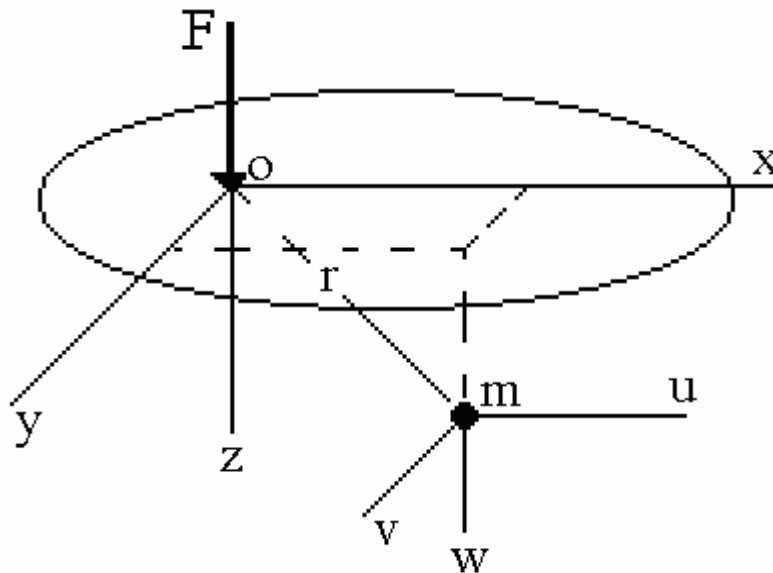


Рис.1. Расчетная схема задачи Буссинеска.

Перемещения u , v , w , обусловленные действием силы F и параллельные осям ox , oy , oz соответственно, в произвольной точке $m(x, y, z)$, отстоящей от начала координат на расстоянии $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{0,5}$, определяются выражениями:

$$u = -\frac{F}{4\pi G} \left(\frac{1-2\nu}{r+z} - \frac{z}{r^2} \right) \frac{x}{r},$$

$$v = -\frac{F}{4\pi G} \left(\frac{1-2\nu}{r+z} - \frac{z}{r^2} \right) \frac{y}{r},$$

$$w = \frac{F}{4\pi G} \left(\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right),$$
(1)

где G , ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; $G = 0,5 E/(1+\nu)$, E – модуль Юнга.

Числовые значения силы F , координат точки m – x , y , z , модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν , а также другие исходные данные студенты выбирают из табл.1 по трем цифрам n_2 , n_1 , n_0 кода, выданного преподавателем.

Таблица 1

n_0	Координаты, м			n_1	Сила F , кН	σ_{adm} , кПа	n_2	E , МПа	ν
	x	y	z						
1	1	1	1	1	300	200	1	30	0,25
2	1	-1	1	2	400	300	2	35	0,26
3	-1	-1	1	3	500	400	3	40	0,27
4	-1	1	1	4	600	250	4	45	0,28
5	1	2	1	5	700	350	5	50	0,29

6	1	-2	1	6	800	450	6	55	0,30
7	-1	-2	1	7	900	500	7	60	0,31
8	2	2	1	8	1000	550	8	65	0,32
9	2	-2	1	9	1100	600	9	70	0,33
0	-2	-2	1	0	1200	650	0	75	0,34

3. **Определение компонент тензора напряжений.** Тензор напряжений T_σ однородного изотропного тела может быть представлен симметричной матрицей вида:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ в линейно-упругом теле при малых деформациях определяются обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon_V + 2G\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda \varepsilon_V + 2G\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda \varepsilon_V + 2G\varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – относительные продольные деформации; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ – сдвиговые деформации; ε_V – относительное изменение объема:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (4)$$

λ – коэффициент Ламе:

$$\lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)] = 2\nu G / (1 - 2\nu). \quad (5)$$

Положительные направления напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ показаны на рис.2.

Деформации окрестности точки \mathbf{m} связаны с ее перемещениями u, v, w дифференциальными уравнениями (*уравнениями Коши*):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

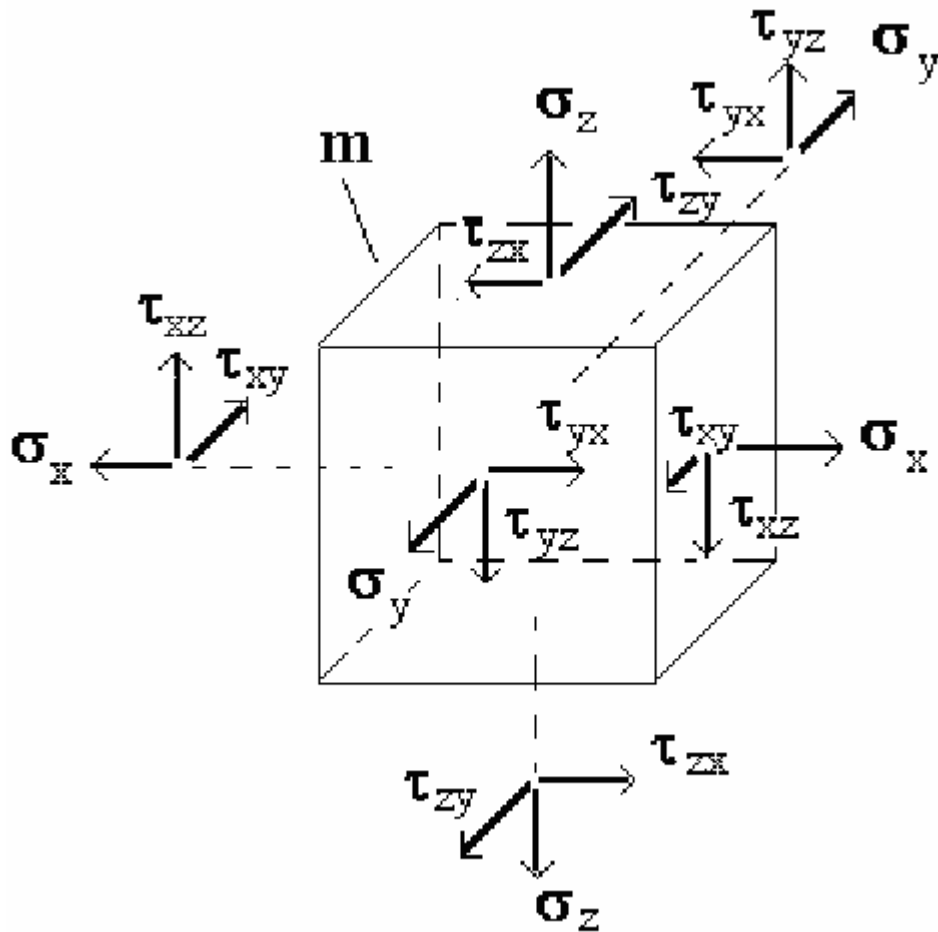


Рис.2. Компоненты тензора напряжений.

Выразим компоненты σ_x , τ_{xy} , τ_{yz} через деформации. При дифференцировании формул (1) учтем, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}. \quad (a)$$

По формулам (6) находим:

$$\varepsilon_x = -\frac{F}{4\pi G} \left\{ \left[-\frac{1-2\nu}{(r+z)^2} + \frac{2z}{r^3} \right] \frac{x^2}{r^2} + \left(\frac{1-2\nu}{r+z} - \frac{z}{r^2} \right) \frac{r^2 - x^2}{r^3} \right\};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{F}{2\pi G} \left\{ \left[\frac{(1-2\nu)(2r+z)xy}{(r+z)^2 r^3} - \frac{3xyz}{r^5} \right] \right\}; \quad (b)$$

$$\gamma_{xz} = -\frac{3F}{2\pi G} \frac{xz^2}{r^5}.$$

Относительные продольные ε_y , ε_z и сдвиговые γ_{yz} деформации определяются аналогично (студентами).

Относительное изменение объема ε_v определяется по формуле (4).

Далее по формулам (3) определяются напряжения:

$$\sigma_x = -\frac{F}{2\pi} \left\{ \frac{3x^2z}{r^5} + (1-2\nu) \left[\frac{y^2 - rz}{(r+z)r^3} - \frac{x^2}{(r+z)^2 r^2} \right] \right\}; \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F}{2\pi} \left\{ \frac{3xyz}{r^5} - (1-2\nu) \left[\frac{(2r+z)xy}{(r+z)^2 r^3} \right] \right\}; \quad (8)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{xz^2}{r^5}. \quad (10)$$

Аналогично определяются напряжения σ_y , σ_z , τ_{yz} (студентами).

4. Проверка выполнения уравнений равновесия. Дифференциальные уравнения равновесия деформируемого твердого тела имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_v &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y_v &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_v &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где X_v , Y_v , Z_v – объемные или массовые силы.

Решение (1) задачи Буссинеска не учитывает действие сил тяжести в рассматриваемом полупространстве, поэтому объемные или массовые силы в уравнениях (10) следует положить равными нулю.

Найдем частные производные $\partial \sigma_x / \partial x$, $\partial \tau_{xy} / \partial y$, $\partial \tau_{xz} / \partial z$:

$$\partial \sigma_x / \partial x =$$

$$-\frac{F}{2\pi} \left\{ \frac{3xz(2r^2 - 5x^2)}{r^7} + (1-2\nu) \left[\frac{3y^2z + 4ry^2 - 2rz^2 - 3r^2z}{(r+z)^2 r^5} + \frac{2r^3 + 2r^2z - 2x^2z}{(r+z)^3 r^4} \right] \right\},$$

$$\partial \tau_{xy} / \partial y =$$

$$-\frac{F}{2\pi} \left\{ \frac{3xz(r^2 - 5y^2)}{r^7} - (1-2\nu) \left[\frac{2r^3 + r^2z - 4ry^2 - 3y^2z}{(r+z)^2 r^5} - \frac{4ry^2 + 2y^2z}{(r+z)^3 r^4} + \right] \right\},$$

$$\partial \tau_{xz} / \partial z = -\frac{F}{2\pi} \left\{ \frac{3xz(2r^2 - 5z^2)}{r^7} \right\}.$$

Подставив выражения для производных $\partial \sigma_x / \partial x$, $\partial \tau_{xy} / \partial y$, $\partial \tau_{xz} / \partial z$ в первое уравнение (10), убеждаемся в том, что его левая часть равна нулю. Следовательно, первое уравнение равновесия удовлетворяется функциями (7), (8), (9). Аналогично проверяется выполнение второго и третьего уравнения равновесия (10) (студентами).

5. Главные оси и главные напряжения. Главными осями тензора напряжений называются нормали к трем взаимно перпендикулярным граням элементарного параллелепипеда около рассматриваемой в нагруженном теле точки, на которых касательные напряжения τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} равны нулю. Указанные грани называются главными площадками, а действующие по ним нормальные напряжения – главными.

Главные напряжения обозначаются σ_1 , σ_2 , σ_3 и упорядочиваются по алгебраической величине: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Знание главных напряжений необходимо для применения теорий прочности; знание положения главных площадок позволяет определить направление зарождающихся поверхностей скольжения или трещин в теле.

Построенные в п.3 выражения для напряжений σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} используются для вычисления их числовых значений. Входящие в эти выражения координаты x , y , z исследуемой точки, а также F и ν студенты выбирают из табл.1.

Тензор напряжений в главных осях определяется всего лишь тремя компонентами и имеет вид:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (11)$$

5.1. *Вычисление главных напряжений.* Главные напряжения являются корнями кубического уравнения, называемого характеристическим:

$$\sigma^3 - S_1\sigma^2 + S_2\sigma - S_3 = 0, \quad (12)$$

в котором S_1, S_2, S_3 – инварианты тензора напряжений, определяемые по формулам:

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$S_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2; \quad (13)$$

$$S_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Поскольку компоненты тензора напряжений – действительные числа, все три корня уравнения (12) также действительные числа; с учетом этого обстоятельства для вычисления корней уравнения (12) можно использовать следующий известный метод.

Вычисляют вспомогательные величины p и q

$$3p = S_2 - \frac{1}{3}S_1^2, \quad 2q = -\frac{2}{27}S_1^3 + \frac{1}{3}S_1S_2 - S_3; \quad (c)$$

и проверяют выполнение условия:

$$q^2 + p^3 \leq 0. \quad (14)$$

Если условие (14) не выполнено, необходимо проверить правильность вычислений по формулам (13) и (c).

Если условие (14) выполнено, то корни уравнения (12) вычисляют по формулам:

$$\sigma^{(1)} = -2R\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{1}{3}S_1; \quad \sigma^{(2,3)} = 2R\cos\frac{\pi \pm \varphi}{3} + \frac{1}{3}S_1, \quad (15)$$

где $R = -\sqrt{|p|}$, $\varphi = \arccos(q/R^3)$.

Пусть, например, тензор напряжений имеет компоненты:

$$\sigma_x = -90, \sigma_y = 110, \sigma_z = -80 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = 35, \tau_{yz} = 30, \tau_{xz} = 45 \text{ МПа}.$$

По формулам (13) вычисляем инварианты S_1, S_2, S_3 :

$$S_1 = -60, \quad S_2 = -15650, \quad S_3 = 842750.$$

Характеристическое уравнение (12) получает вид:

$$\sigma^3 + 60\sigma^2 - 15650\sigma - 842750 = 0.$$

Вычисляем вспомогательные величины и проверяем выполнение условия (14):

$$3p = -15650 - 60^2/3 = -16850,$$

$$2q = -\frac{2}{27}(-60)^3 + \frac{1}{3}(-60)(-15650) - 842750 = -513750;$$

$$p = -5616,67; \quad q = -256875; \quad q^2 + p^3 = 6,598 \cdot 10^{10} - 1,772 \cdot 10^{11} < 0.$$

Условие (14) выполнено.

Далее находим R, φ и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$R = -\sqrt{5616,67} = -74,94; \quad q = -256875, \quad R^3 = -420938;$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{256875}{420938}\right) = 0,914 \text{ рад};$$

$$\sigma^{(1)} = 2 \cdot 74,94 \cdot \cos(0,305) - 20 = 143 - 20 = 123 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(2)} = -2 \cdot 74,94 \cdot \cos(0,742) - 20 = -110,4 - 20 = -130,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(3)} = -2 \cdot 74,94 \cdot \cos(1,352) - 20 = -32,6 - 20 = -52,6 \text{ МПа}.$$

После упорядочения $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$ по алгебраической величине получаем:

$$\sigma_1 = 123 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -52,6 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -130,4 \text{ МПа}.$$

Правильность определения главных напряжений проверяют, используя свойство инвариантности суммы нормальных напряжений:

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -90 + 110 - 80 = 123 - 52,6 - 130,4 = -60 \text{ МПа.}$$

5.2. *Определение положения главных осей.* Положение главных осей тензора напряжений можно характеризовать углами α_k , β_k , γ_k ($k = 1, 2, 3$) между этими осями и осями координат ox , oy , oz прямоугольной системы координат:

$$\alpha_k = \arccos(n_1^{(k)}), \quad \beta_k = \arccos(n_2^{(k)}), \quad \gamma_k = \arccos(n_3^{(k)}), \quad (d)$$

где $n_1^{(k)}$, $n_2^{(k)}$, $n_3^{(k)}$ – значения направляющих косинусов нормалей к главным площадкам элементарного параллелепипеда, выделенного в теле.

Для определения $n_1^{(k)}$, $n_2^{(k)}$, $n_3^{(k)}$ служит система уравнений:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_k) n_1^{(k)} + \tau_{xy} n_2^{(k)} + \tau_{xz} n_3^{(k)} &= 0, \\ \tau_{xy} n_1^{(k)} + (\sigma_y - \sigma_k) n_2^{(k)} + \tau_{yz} n_3^{(k)} &= 0, \\ \tau_{xz} n_1^{(k)} + \tau_{yz} n_2^{(k)} + (\sigma_z - \sigma_k) n_3^{(k)} &= 0, \\ (n_1^{(k)})^2 + (n_2^{(k)})^2 + (n_3^{(k)})^2 &= 1, \end{aligned} \quad (16)$$

где σ_k – главные напряжения ($k = 1, 2, 3$).

Первые три уравнения системы (16) не являются независимыми, поэтому одно из них можно исключить из рассмотрения при условии, что из двух оставшихся можно составить хорошо обусловленную систему уравнений для определения отношений искомых направляющих косинусов нормали.

Система линейных алгебраических уравнений будет хорошо обусловленной, если абсолютное значение её определителя больше единицы. В связи с этим при выборе двух из трёх уравнений системы (16) следует вычислять определители возникающих систем и сравнивать их с единицей.

Найдём, например, определитель Det системы уравнений, получающейся из первых двух уравнений системы (16), для вычисления отношений $n_1^{(k)}/n_3^{(k)}$, $n_2^{(k)}/n_3^{(k)}$:

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} \alpha_x - q & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \alpha_y - q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-90 - 123) & 35 \\ 35 & (110 - 123) \end{vmatrix} = 1544.$$

Поскольку $\text{Det} \gg 1$, третье уравнение системы (16) можно исключить из рассмотрения. Оставшиеся уравнения преобразуем к виду:

$$(\sigma_x - \sigma_k) n_1^{(k)} / n_3^{(k)} + \tau_{xy} n_2^{(k)} / n_3^{(k)} = -\tau_{xz}, \quad (17)$$

$$\tau_{xy} n_1^{(k)} / n_3^{(k)} + (\sigma_y - \sigma_k) n_2^{(k)} / n_3^{(k)} = -\tau_{yz},$$

$$(n_1^{(k)} / n_3^{(k)})^2 + (n_2^{(k)} / n_3^{(k)})^2 + 1 = 1 / (n_3^{(k)})^2. \quad (18)$$

Подставив последовательно вместо σ_k числовые значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, решаем получающиеся системы уравнений (17) относительно $n_1^{(k)} / n_3^{(k)}$ и $n_2^{(k)} / n_3^{(k)}$; найденные числовые значения $a_k = n_1^{(k)} / n_3^{(k)}$ и $b_k = n_2^{(k)} / n_3^{(k)}$ подставляем в уравнение (18) и находим $\pm n_3^{(k)}$, знак которого определяем с помощью третьего уравнения системы (16) следующим образом.

Вначале принимаем:

$$n_3^{(k)} = 1 / \sqrt{1 + a_k^2 + b_k^2} \quad (19)$$

и вычисляем:

$$n_1^{(k)} = a_k \cdot n_3^{(k)}, \quad n_2^{(k)} = b_k \cdot n_3^{(k)}. \quad (20)$$

Проверяем выполнение 3-го уравнения системы (16). Если оно не выполнено, то выбираем другие два уравнения из системы (16), например, первое и третье или второе и третье, повторяем вычисления по формулам (19), (20) и проверяем выполнение оставшегося 3-го уравнения системы (16). Если оно не выполнено, то опробуем другие отношения направляющих косинусов, например,

$$n_1^{(k)} / n_2^{(k)}, \quad n_3^{(k)} / n_2^{(k)} \quad \text{или} \quad n_2^{(k)} / n_1^{(k)}, \quad n_3^{(k)} / n_1^{(k)}.$$

Если окажется, что при любом выборе отношений направляющих косинусов оставшееся 3-е уравнение системы (16) не выполняется, то необходимо проверить все предыдущие вычисления.

В случае, когда определитель 2-х выбранных из системы (16) уравнений меньше единицы ($|\text{Det}| < 1$), необходимо, как и выше, опробовать другие отношения направляющих косинусов. Если и для этих отношений $|\text{Det}| < 1$, то следует выбрать другую пару уравнений из системы (16).

При построении главных площадок необходимо учитывать геометрические свойства главных осей тензора напряжений: главные оси ортогональны друг другу; в каждом октанте прямоугольной системы координат охуз не может быть более одной главной оси; главные оси ортогональны главным площадкам элементарного параллелепипеда.

Продолжим рассмотрение примера из п.5.1.

Имеем:

$$\sigma_x = -90, \sigma_y = 110, \sigma_z = -80 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = 35, \tau_{yz} = 30, \tau_{xz} = 45 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_1 = 123; \sigma_2 = -52,6; \sigma_3 = -130,4 \text{ МПа}.$$

Подставив в систему уравнений (17) $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ и σ_1 , получим систему уравнений относительно неизвестных a_1, b_1 :

$$\begin{aligned} (-90 - 123)a_1 + 35b_1 &= -45, \\ 35a_1 + (110 - 123)b_1 &= -30, \end{aligned} \tag{17.1}$$

где $a_1 = n_1^{(1)}/n_3^{(1)}$, $b_1 = n_2^{(1)}/n_3^{(1)}$.

Решение системы уравнений (17.1): $a_1 = 1,055; b_1 = 5,135$.

Подставив a_1, b_1 в формулу (19), найдем $n_3^{(1)} = 0,187$, а затем, по (20), $n_1^{(1)} = 0,198, n_2^{(1)} = 0,962$.

Третье уравнение системы (16) принимает вид:

$$45n_1^{(k)} + 30n_2^{(k)} + (80 - \sigma_k)n_3^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{21}$$

Подставив в (21) полученные значения $n_1^{(1)} = 0,198, n_2^{(1)} = 0,962, n_3^{(1)} = 0,187$ и $\sigma_1 = 123$, в левой части (21) находим число $-0,19$.

С небольшой погрешностью уравнение (21) удовлетворяется, поэтому оставляем знак "+" у числа $n_3^{(1)}$.

Далее определяем $n_1^{(2)}$, $n_2^{(2)}$, $n_3^{(2)}$.

Подставляем в систему уравнений (17) σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} и σ_2 ; получаем систему уравнений относительно неизвестных a_2 , b_2 :

$$\begin{aligned} (-90 + 52,6)a_2 + 35b_2 &= -45, \\ 35a_2 + (110+52,6)b_2 &= -30, \end{aligned} \tag{17.2}$$

где $a_2 = n_1^{(2)}/n_3^{(2)}$, $b_2 = n_2^{(2)}/n_3^{(2)}$.

Решение системы уравнений (17.2): $a_2 = 0,859$; $b_2 = -0,368$.

Подставив a_2 , b_2 в формулу (19), найдем $n_3^{(2)} = 0,732$, а затем по формуле (20) получаем: $n_1^{(2)} = 0,629$, $n_2^{(2)} = -0,269$.

Подставив в (21) полученные значения $n_1^{(2)}$, $n_2^{(2)}$, $n_3^{(2)}$ и $\sigma_2 = -52,6$, в левой части (21) находим число 20,24, а в правой 20,1. Уравнение удовлетворяется с небольшой погрешностью, поэтому оставляем знак "+" у числа $n_3^{(2)}$.

Далее определяем $n_1^{(3)}$, $n_2^{(3)}$, $n_3^{(3)}$. Подставляем в систему уравнений (17) σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} и σ_3 ; получаем систему уравнений относительно неизвестных a_3 , b_3 :

$$\begin{aligned} (-90 + 130,4)a_3 + 35b_3 &= -45, \\ 35a_3 + (110+130,4)b_3 &= -30, \end{aligned} \tag{17.3}$$

где $a_3 = n_1^{(3)}/n_3^{(3)}$, $b_3 = n_2^{(3)}/n_3^{(3)}$.

Решение системы уравнений (17.3): $a_3 = -1,151$; $b_3 = 0,0428$. Подставив a_3 , b_3 в формулу (19), найдем $n_3^{(3)} = 0,656$, а затем по формуле (20): $n_1^{(3)} = 0,755$; $n_2^{(3)} = 0,0281$.

Подставив в (21) полученные значения $n_1^{(3)}$, $n_2^{(3)}$, $n_3^{(3)}$ и $\sigma_3 = -130,4$, в левой части (21) находим число 33,13, а в правой 33,06. Уравнение (21) удовлетворяется с небольшой погрешностью, поэтому оставляем знак "+" у числа $n_3^{(3)}$.

Для построения главных осей тензора напряжений откладываем по осям x , y , z прямоугольной системы координат в выбранном масштабе направляющие косинусы $\alpha_k = \arccos(n_1^{(k)})$, $\beta_k = \arccos(n_2^{(k)})$, $\gamma_k = \arccos(n_3^{(k)})$, ($k = 1, 2, 3$), проводим главные оси и строим перпендикулярно к ним элементарные главные площадки, как показано на рис.3.

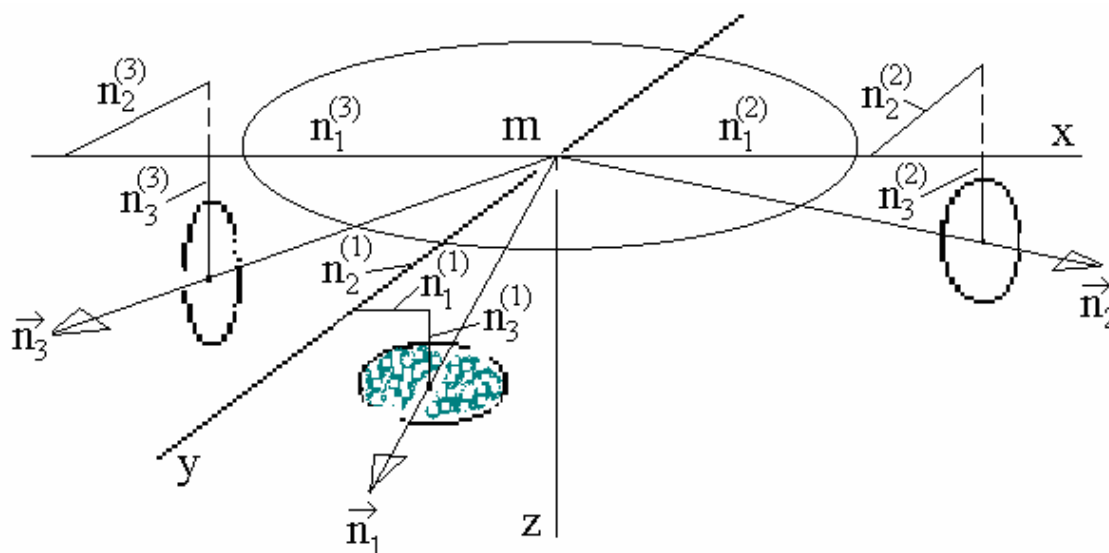


Рис.3. Главные оси и главные площадки.

6. Оценка локальной прочности тела. Прочность в одной произвольно выбранной точке нагруженного тела будем называть локальной прочностью. Для осуществления полной проверки прочности необходимо произвести проверку прочности во всех точках тела. Для этого надо найти максимальные по величине главные напряжения и проверить прочность в тех точках тела, где они получаются.

Проверку локальной прочности выполним, используя теорию вязкого разрушения или начала пластического течения при достижении октаэдрическим касательным напряжением предельного значения; другая интерпретация этой теории – достижение удельной потенциальной энергией формоизменения предельного значения (четвертая классическая теория прочности).

Условие прочности по четвертой теории имеет вид:

$$\sigma_{red}^{(IV)} \leq \sigma_{adm}, \quad (22)$$

где $\sigma_{red}^{(IV)}$ – приведенное напряжение по четвертой теории прочности, σ_{adm} – допускаемое напряжение.

Приведенное напряжение по четвертой теории прочности определяется по формуле:

$$\sigma_{\text{red}}^{(IV)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{0,5} = \sigma_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{oct}}, \quad (23)$$

где σ_1 – интенсивность нормальных напряжений; τ_{oct} – октаэдрическое касательное напряжение (касательное напряжение, действующее на октаэдрической площадке – рис.4).

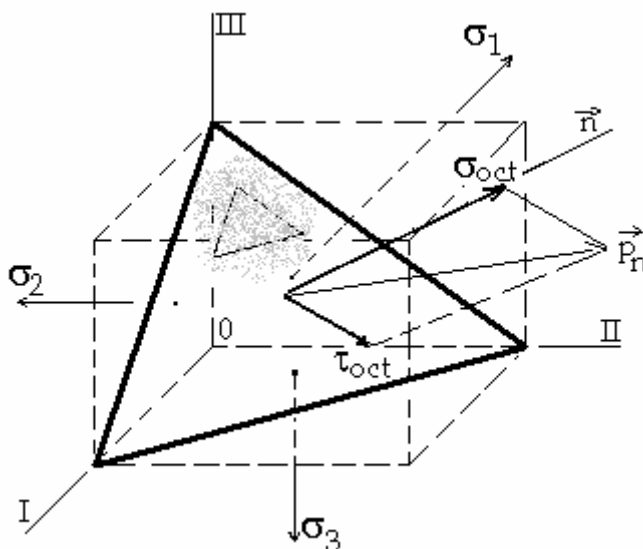


Рис.4. Октаэдрическая площадка.

На рис.4 обозначено: I, II, III – главные оси; σ_1 σ_2 σ_3 – главные напряжения; \vec{n} – нормаль к октаэдрической площадке; \vec{P}_n – вектор напряжений на октаэдрической площадке; σ_{oct} , τ_{oct} – октаэдрические нормальное и касательное напряжения.

Октаэдрическое нормальное напряжение равно среднему напряжению:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_v. \quad (24)$$

Октаэдрическое касательное напряжение определяется по формуле:

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}. \quad (25)$$

Связь удельной потенциальной энергии формоизменения с октаэдрическим касательным напряжением устанавливается следующим образом.

Обозначим удельную потенциальную энергию деформации элемента материала буквой u и разложим ее на удельную потенциальную энергию изменения объема u_v и удельную потенциальную энергию изменения формы u_D ("D" – distortion) : $u = u_v + u_D$.

Разложим объемное напряженно-деформированное состояние на сумму 3-х одноосных (рис.5) и, используя принцип независимости действия сил, найдем работу напряжений:

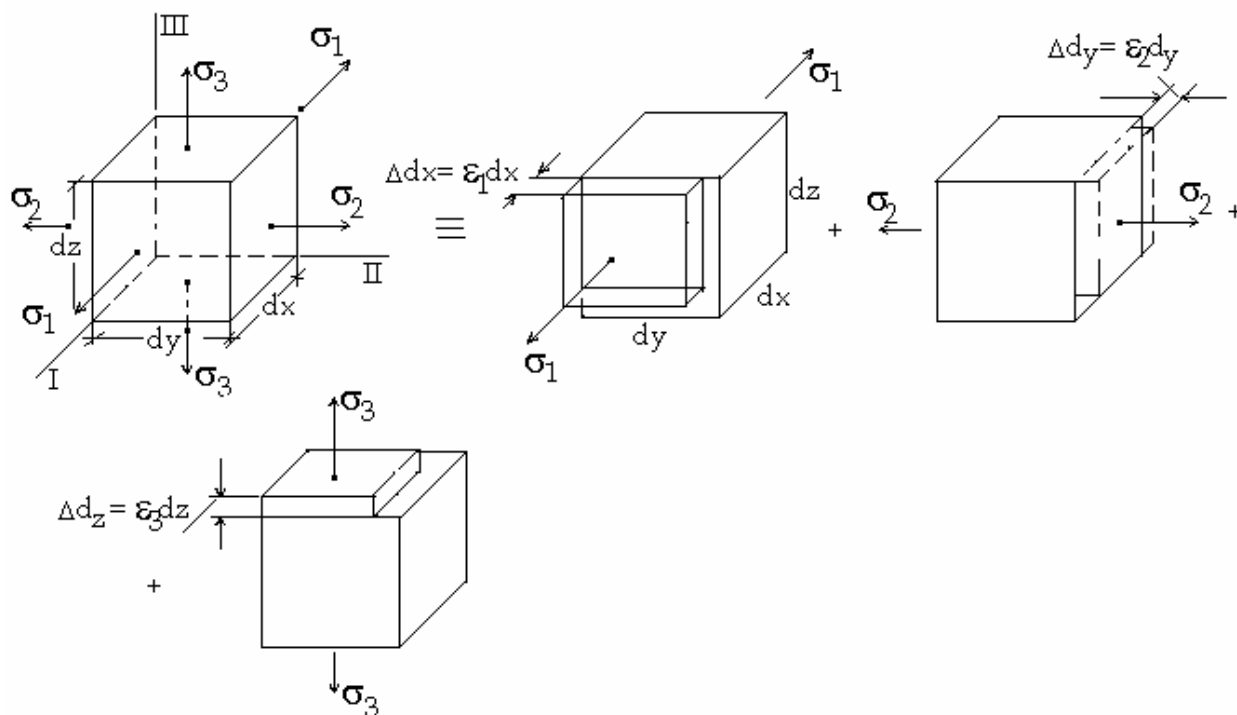


Рис.5. Схема к определению удельной потенциальной энергии.

На рис.5 обозначено: I, II, III – главные оси; σ_1 σ_2 σ_3 – главные напряжения; dx , dy , dz – длины ребер элементарного параллелепипеда материала; ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 – главные деформации, определяемые по закону Гука:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [q - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(q + \sigma_3)], \quad \epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(q + \sigma_2)]. \quad (26)$$

Работа W , производимая напряжениями в направлении главных осей, вычисляется следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} q dy dz \cdot \epsilon_1 dx + \frac{1}{2} \sigma_2 dx dz \cdot \epsilon_2 dy + \frac{1}{2} \sigma_3 dx dy \cdot \epsilon_3 dz = \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 q_k \epsilon_k \right) dx dy dz$$

Объем элементарного параллелепипеда до деформации:

$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Удельная потенциальная энергия:

$$u = \frac{W}{V_0} = \frac{W}{dx dy dz} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sigma_k \varepsilon_k. \quad (27)$$

Удельная потенциальная энергия, выраженная через напряжения:

$$u = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \sigma_k \varepsilon_k = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1 [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \sigma_3 [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)], \quad (28)$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Объемная деформация ε_v определяется как сумма главных деформаций:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (29)$$

Связь октаэдрических нормальных (средних) напряжений с объемными деформациями устанавливается следующим образом.

Суммируя левые и правые части обобщенного закона Гука [6]

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1-2\nu}{E} \cdot 3 \sigma_v,$$

получаем

$$\varepsilon_v = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_v, \quad \sigma_v = \frac{E}{3(1-2\nu)} \varepsilon_v = k_v \varepsilon_v, \quad (30)$$

где k_v – модуль объемного сжатия:

$$k_v = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (31)$$

Выражения (30) – закон Гука для октаэдрических (средних) напряжений и объемных деформаций.

Удельную потенциальную энергию изменения объема u_v найдем как работу средних напряжений на объемных деформациях:

$$u_v = \frac{1}{2} \sigma_v \varepsilon_v = \frac{1}{2} \sigma_v \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_v = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (32)$$

Удельную потенциальную энергию изменения формы u_D найдем как разность полной удельной потенциальной энергии деформации элемента u и удельной потенциальной энергии изменения объема u_v :

$$\begin{aligned}
 u_D = u - u_v &= \frac{1}{6E} \left[3\sigma_1^2 + 3\sigma_2^2 + 3\sigma_3^2 - 6\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) - \right. \\
 &\quad \left. - (1-2\nu)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_3) \right] = \\
 &= \frac{1}{6E} \left[2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\nu\sigma_1^2 + 2\nu\sigma_2^2 + 2\nu\sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 - 2\nu\sigma_2\sigma_3 - 2\nu\sigma_1\sigma_3 \right] = \\
 &= \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] = \\
 &= \frac{9(1+\nu)}{6E} \tau_{\text{oct}}^2 = \frac{3(1+\nu)}{2E} \tau_{\text{oct}}^2 = \frac{3}{4} \frac{\tau_{\text{oct}}^2}{G}, \tag{33}
 \end{aligned}$$

где G – модуль сдвига: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Таким образом, удельная потенциальная энергия изменения формы u_D выражается через октаэдрические касательные напряжения по формуле:

$$u_D = \frac{3(1+\nu)}{2E} \tau_{\text{oct}}^2 = \frac{3}{4} \frac{\tau_{\text{oct}}^2}{G}. \tag{34}$$

По четвертой теории прочности опасное (предельное) напряженно-деформированное состояние (НДС) наступает в случае, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает опасного (предельного) значения $u_{D,\text{дан}}$.

В случае одноосного НДС: $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

По формулам (33): $u_D^{(1)} = \frac{1+\nu}{6E} \left[\sigma^2 + \sigma^2 \right] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma^2$; в случае одноосного НДС опасным является достижение нормальными напряжениями предела текучести:

$$u_{D,\text{дан}}^{(1)} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_y^2. \tag{35}$$

Линейное (одноосное) и объемное (трехмерное) НДС считаются равноопасными, если удельная потенциальная энергия формоизменения

достигает опасного (предельного) значения в обоих НДС. Приравнивая удельную потенциальную энергию формоизменения объемного и линейного НДС, и используя условие прочности линейного НДС: $\sigma \leq \sigma_{adm} = \sigma_y/k$, где k – коэффициент запаса прочности, условие прочности объемного НДС по четвертой теории прочности принимают в виде:

$$u_D^{(3)} = \frac{1+\nu}{6E} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{adm}^2. \quad (36)$$

Вводят так называемое приведенное напряжение:

$$\sigma_{red}^{(IV)} = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \right\}^{1/2}. \quad (37)$$

Приведенное напряжение по IV-ой теории прочности приобретает вполне определенный физический смысл:

$$\sigma_{red}^{(IV)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct}. \quad (38)$$

Как следует из выражений (36) и (37), приведенное напряжение не должно превышать допускаемого напряжения. Тогда условие прочности получает вид:

$$\sigma_{red}^{(IV)} \leq \sigma_{adm}. \quad (39)$$

Приведенное (эквивалентное) напряжение $\sigma_{red}^{(IV)}$ по IV-ой (энергетической) теории прочности, пропорциональное октаэдрическому касательному напряжению τ_{oct} , не должно превышать допускаемого напряжения.

Оценку локальной прочности выполним при следующих исходных данных:

$$\sigma_1 = 123; \quad \sigma_2 = -52,6; \quad \sigma_3 = -130,4; \quad \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа.}$$

Вычисляем приведенное напряжение

$$\sigma_{red}^{(IV)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(123+52,6)^2 + (-52,6+130,4)^2 + (123+130,4)^2]^{0,5} = 225 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{red}^{(IV)} > \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности по четвертой теории не выполнено; площадка возможного скольжения – октаэдрическая площадка, нормаль к которой имеет одинаковые направляющие косинусы в системе главных осей; положение этой площадки показано на рис. 4.


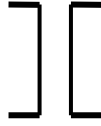



Расчеты закончены.

Задание № 11. Расчеты статически неопределимых балок.

1. **Формулировка задания.** Для балок, расчетные схемы которых представлены на рис.1,а и рис. 1,б, требуется построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов, а также произвести один из трех типов расчетов на прочность: I – проверочный; II – проектировочный; III – определение несущей способности.

Механические характеристики материала балок: допускаемое нормальное напряжение $\sigma_{adm} = 160$ МПа, допускаемое касательное напряжение $\tau_{adm} = 100$ МПа, модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Типы поперечных сечений балок:

	а) Двутавр по ГОСТ 8239-72* (приложение 3)		б) Два швеллера по ГОСТ 8240-72* (приложение 4)		в) Труба по ГОСТ 10704-91* (приложение 5)
	г) Короб сварной по ТУ 36-2287 (приложение 6)		д) уголки неравнобокие по ГОСТ 8510-72* (приложение 8)		

Исходные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные к расчету статически неопределимых балок

n_0	№ схемы	Тип сечения	n_1	k_1	k_2	$l_1, м$	$l_2, м$	$l_3, м$	n_2	Тип расчета	№ Профиля(*)	$q, кН/м$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	а)	1	1,5	1	3	2	3	1	I	18	10
2	2	б)	2	2	1,25	2	3	2	2	II	?	20
3	3	в)	3	2,5	1,5	3	2	3	3	III	20	?
4	4	г)	4	3	1,25	2	3	3	4	I	18	10
5	5	д)	5	2	1	3	2	2	5	II	?	20
6	6	а)	6	1,5	1,25	2	3	3	6	III	20	?
7	7	б)	7	2	1,5	3	2	3	7	I	18	10
8	8	в)	8	2,5	1,25	2	3	3	8	II	?	20
9	9	г)	9	3	1	3	2	2	9	III	20	?
0	0	д)	0	2	1,25	2	3	3	0	II	?	20

На схемах балок (рис.1,а и рис. 1,б) обозначено: q – равномерно распределенная нагрузка (кН/м); F – сосредоточенная сила (кН); M_e – момент пары сил (кН·м); соотношения между ними: $F = k_1 q l_1$, $M_e = k_2 q l_1^2$.

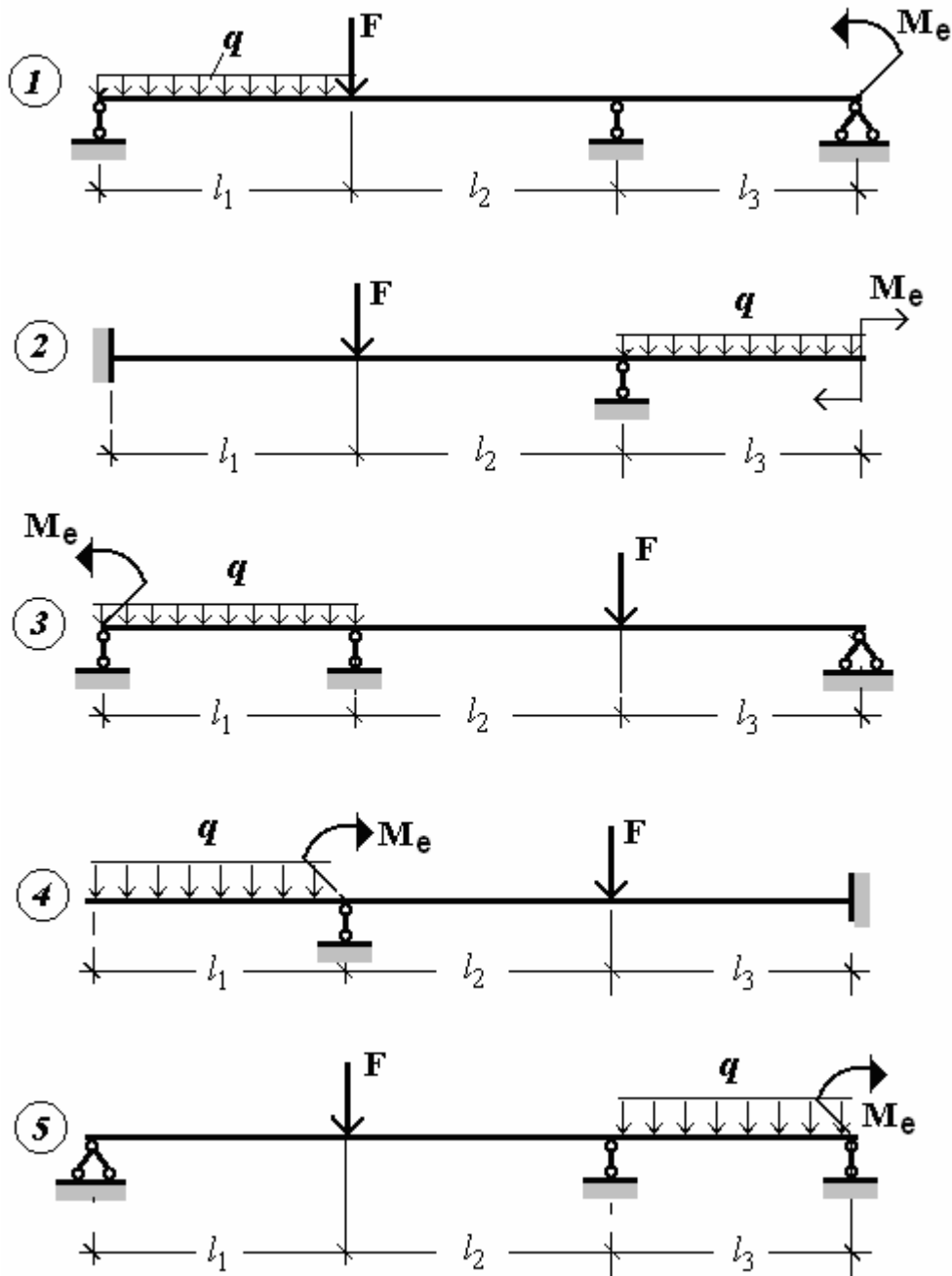


Рис.1,а. Расчетные схемы балок 1÷5.

Номер расчетной схемы и числовые значения исходных данных выбираются из табл.1 по коду из трех цифр $p_2 p_1 p_0$, выданному преподавателем; p_2 , p_1 , p_0 – три цифры кода студента: p_2 – первая слева цифра, p_1 – вторая слева цифра, p_0 – последняя цифра кода. Например, если 237 – три цифры кода, то $p_2 = 2$, $p_1 = 3$, $p_0 = 7$.

В графе 12 табл.1 приведены номера профилей а), б), или диаметры D трубы в см, или высота короба h в см, или ширина большей полки B

неравнобоких уголков; толщину стенок трубы или короба, или уголка, а также ширину меньшей полки уголка студент выбирает самостоятельно.

Знак вопроса в графах 12, 13 табл.1 означает, что номер профиля или нагрузка должны быть определены в результате расчета балки.

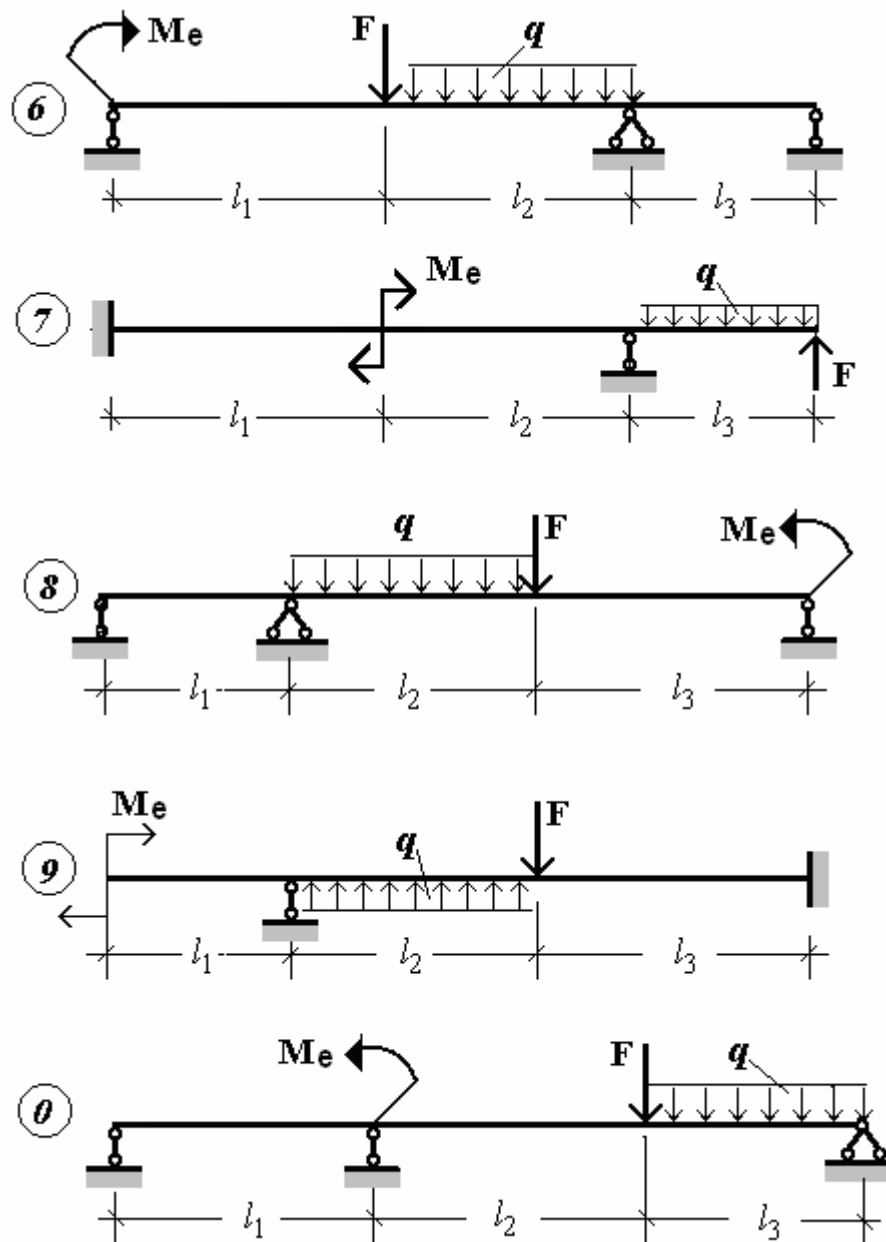


Рис.1,б. Расчетные схемы балок 6÷10.

2. Методы расчета плоских статически неопределимых балок.

2.1. *Основные понятия.* Плоская геометрически неизменяемая система как целое обладает тремя степенями свободы – двумя линейными перемещениями s_y , s_z и углом поворота φ_x относительно оси, перпендикулярной к плоскости, в которой лежит система. Поэтому для того, чтобы плоская система была неподвижной по отношению к "основанию", необходимо устранить эти три степени свободы. С этой целью плоскую систему надо соединить с "основанием" как минимум

три стержнями-связями, направления осей которых не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке. Эти три связи являются необходимыми и достаточными, а все другие связи, сверх необходимых, соединяющие систему с "основанием", являются как бы лишними. Если система соединена с "основанием" только необходимыми связями, то реакции в 3-х необходимых связях могут быть определены с помощью 3-х уравнений равновесия, которые можно составить для плоской системы сил.

Если, кроме того, и внутренние усилия в системе могут быть определены только из уравнений равновесия, то система называется *статически определимой*.

Если же реакции в опорных связях или какие-либо внутренние усилия в системе не могут быть определены только из уравнений равновесия, то система называется *статически неопределимой*.

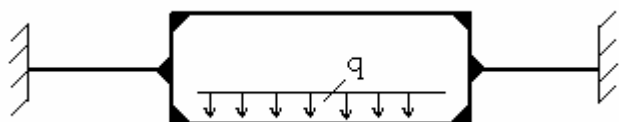
Системы могут быть внешне и внутренне статически неопределимыми.

Если внутренние усилия в статически неопределимой системе могут быть определены только из уравнений равновесия, то система называется *внешне статически неопределимой*.

Если же реакции в опорных связях статически неопределимой системы могут быть определены из уравнений равновесия, а внутренние усилия не могут быть определены из уравнений равновесия, то система называется *внутренне статически неопределимой*.

Разъясним на примере, чем отличаются внешне статические неопределимые системы от внутренне статически неопределимых систем.

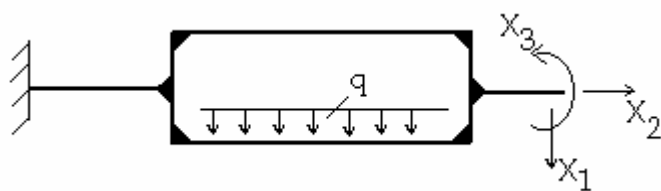
Рассмотрим систему, состоящую из четырех жестко связанных между собой балок, представленную на рис.2.



Эта система 3 раза внешне статически неопределимая и 3 раза внутренне статически неопределимая, – всего 6 раз статически неопределимая система.

Рис.2. Шесть раз статически неопределимая система.

Для обеспечения неподвижности этой системы достаточно иметь 3



стержня-связи или одно жесткое защемление. Отбросив правую опору и заменив ее реакциями X_1 , X_2 , X_3 , получим систему, представленную на рис.3.

Рис.3. Внутренне статически неопределимая система.

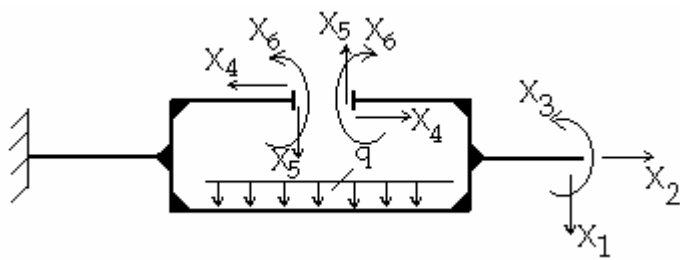


Рис.4.Эквивалентная система.

Если X_1, X_2, X_3 – известны, то система внешне статически определяемая, но внутренне статически неопределимая. Можно в любом сечении верхней или нижней балки сделать разрез и приложить по три внутренних усилия $X_4,$

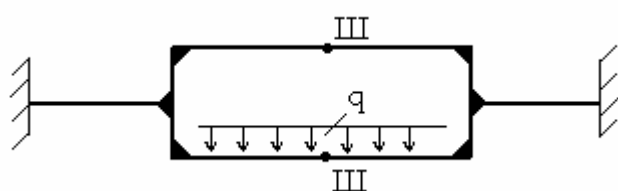
X_5, X_6 с каждой стороны разреза, как показано на рис.4, – получится эквивалентная система.

Так как X_4, X_5, X_6 приложены в сечении попарно, то в любом уравнении равновесия они будут эквивалентны нулю, то есть взаимно уничтожатся, и из составленных уравнений равновесия их определить невозможно. Эти силы можно определить только из уравнений совместности деформаций. Следовательно, замкнутый контур – три раза внутренне статически неопределимая система. Усилия в замкнутом контуре системы нельзя определить только с помощью уравнений равновесия, поэтому система на рис.3 остается 3 раза внутренне статически неопределимой.

Каждый цилиндрический шарнир уменьшает степень статической неопределимости на единицу. Введем в расчетную схему на рис.2 два шарнира, как показано на рис.5. Теперь эта система 4 раза статически неопределимая. Степень статической неопределимости можно определить по формуле:

$$n = c + 3k - ш - 3, \quad (1)$$

где c – число эквивалентных опорных стержней; k – число замкнутых



контуров; $ш$ – число простых цилиндрических шарниров. В задании рассматриваются только внешне статически неопределимые балки.

Рис.5. Система с двумя шарнирами.

2.2. *Применение метода сил для расчета статически неопределимых балок.* В этом методе за "лишние" неизвестные принимают обобщенные силы, поэтому метод называется *методом сил*. Для внешне статически неопределимой балки за "лишние" неизвестные принимают реакции в "лишних" связях. Для расчета статически неопределимой балки надо рассмотреть ее деформации и составить столько уравнений совместности перемещений, какова степень статической неопределимости.

"Лишние" связи отбрасывают и прикладывают неизвестные реакции X_1, X_2, \dots, X_n по направлениям отброшенных связей. Получают *основную*

систему. Основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

Основная система, нагруженная обобщенными внешними силами $P = \{q, F, M_e, \dots\}$ и реакциями отброшенных связей $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ преобразуется в эквивалентную систему.

Ее напряженно-деформированное состояние (НДС) совпадает с НДС исходной расчетной схемы. Рассмотрим схему применения метода сил на примере n раз внешне статически неопределимой балки.

Под действием внешних сил P и реакций отброшенных связей X сечения балки, в которых были отброшены "лишние" связи, получают перемещения по направлениям $X_1, X_2, \dots, X_n - \Delta_1(P, X), \Delta_2(P, X), \dots, \Delta_n(P, X)$, которые по принципу независимости действия сил можно найти отдельно от P и отдельно от X , а затем сложить. Зная, что в исходной расчетной схеме перемещения по направлениям X_1, X_2, \dots, X_n имеют значения c_1, c_2, \dots, c_n , получают n уравнений совместности перемещений.

$$\Delta_1(P, X) = c_1 ; \Delta_2(P, X) = c_2; \dots; \Delta_n(P, X) = c_n, \quad (2)$$

Систему уравнений (2) можно записать в виде

$$\Delta_j(P, X) = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

По принципу независимости действия сил перемещения, зависящие только от P , можно отделить от перемещений, зависящих только от X :

$$\Delta_j(P, X) = \Delta_j(P) + \Delta_j(X). \quad (4)$$

Далее, еще раз воспользовавшись принципом независимости действия сил (обобщенным законом Гука), можно разложить $\Delta_j(X)$ на составляющие, зависящие только от каждой неизвестной X_m и результаты сложить.

$$\Delta_j(X) = \sum_{m=1}^n \delta_{jm} X_m, \quad (5)$$

где δ_{jm} – удельные перемещения j -ой точки в основной системе по направлению силы X_j под действием единичной силы $\bar{X}_m = 1$, приложенной в точке m балки.

Удельные перемещения j -ой точки основной системы определяют по формуле Мора:

$$\delta_{jm} = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{(l_k)} \left[\frac{\bar{M}_j \bar{M}_m}{EJ_k} + k_Q \frac{\bar{Q}_j \bar{Q}_m}{GA_k} \right] dz, \quad j, m = 1, 2, \dots, n; \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 M &= M_p + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n, \\
 Q &= Q_p + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

В случае многопролетных неразрезных балок в качестве основной системы выбирают балку с конструктивными шарнирами, врезанными над промежуточными опорами. Благодаря такой основной системе существенно сокращается объем вычислений, так как матрица удельных перемещений δ_{jm} становится трехдиагональной.

2.3. Применение формулы Кастильяно для расчета статически неопределимых балок. В случае один-два раза внешне статически неопределимых балок для определения реакций “лишних” опорных связей целесообразно использовать формулу Кастильяно, с помощью которой можно выразить обобщенное перемещение сечения балки по направлению реакции “лишней” опорной связи.

Общая схема применения формулы Кастильяно состоит в следующем.

После замены “лишней” опорной связи в точке m ее реакцией X составляются аналитические выражения для изгибающих моментов, продольных и перерезывающих сил, обусловленных действием на стержневую систему заданных сил, а также обобщенной силы $P_m \equiv X$, приложенной в точке m по направлению обобщенного перемещения Δ_m .

Составляются уравнения равновесия балки под действием заданных сил, а также обобщенной силы $P_m \equiv X$.

В дополнение к уравнениям равновесия балки составляются уравнения совместности перемещений вида (3).

Обобщенное перемещение Δ_m выражается по формуле Кастильяно:

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m} = \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \left[\frac{M}{EJ_x} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} + k_Q \frac{Q}{GA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P_m} \right] dz, \tag{11}$$

где U – потенциальная энергия деформации балки; M , Q – аналитические выражения изгибающих моментов и перерезывающих сил, обусловленных действием на стержневую систему заданных сил, а также обобщенной силы P_m , приложенной в точке m по направлению обобщенного перемещения Δ_m ; n – число участков, на которые поделена балка; l_j – длина участка с номером j ; E , G – модули упругости и сдвига; A , J – площадь поперечного сечения и осевой момент инерции сечения j -го стержня; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения стержня на распределение касательных напряжений в поперечном сечении.

Зная действительные перемещения сечений балки, приравнивают выраженные по формуле Кастильяно перемещения действительным

значениям перемещений и получают уравнения совместности перемещений вида (3).

В практических расчетах балок, длина которых превышает высоту поперечного сечения в десять и более раз, влиянием перерезывающих сил (Q) на перемещения пренебрегают и перемещения определяют по упрощенной формуле:

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m} = \sum_{j=1}^n \int_{(l_j)} \left[\frac{M}{EJ_x} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} \right] dz. \quad (12)$$

Совокупности уравнений равновесия балки и уравнений совместности перемещений вида (3) достаточно для определения реакций всех опорных связей.

2.4. Применение метода начальных параметров для расчета статически неопределимых балок. Для раскрытия статической неопределимости двух-трехпролетных неразрезных балок целесообразно использовать метод начальных параметров (МНП), изложенный в Приложении 2.

Общая схема применения МНП состоит в следующем.

После замены “лишних” опорных связей их реакциями X_1, X_2, \dots составляются уравнения равновесия балки под действием заданных сил, а также реакций X_1, X_2, \dots .

Из условий закрепления балки определяются некоторые начальные параметры – обычно два из четырех параметров.

Далее, используя универсальное уравнение изогнутой оси балки, составляют аналитические выражения для перемещений и углов поворота сечений балки по участкам. Зная действительные перемещения сечений балки, приравнивают выраженные по формулам МНП перемещения действительным значениям перемещений и получают уравнения совместности перемещений вида (3). При этом в уравнения совместности перемещений могут войти неизвестные начальные параметры, в связи с чем необходимо составить дополнительные уравнения совместности перемещений, чтобы общего числа уравнений равновесия балки и уравнений совместности перемещений было достаточно для определения опорных реакций и неизвестных начальных параметров.

Контроль правильности раскрытия статической неопределимости осуществляется путем решения задачи двумя разными методами.

3. Примеры расчетов статически неопределимых балок.

3.1. Раскрытие статической неопределимости методом сил.

Пример 1. Рассматривается двухпролетная неразрезная балка (рис.6,а) постоянного поперечного сечения (J – осевой момент инерции поперечного сечения балки, $J = \text{const}$) на трех опорах: левая опора – шарнирно-неподвижная, средняя и правая опоры – шарнирно- подвижные. Длина левого пролета – l_1 , правого – l_2 . Балка нагружена равномерно

распределенными силами $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$. Модуль упругости материала балки E . Требуется определить опорные реакции V_O , V_B , V_C .

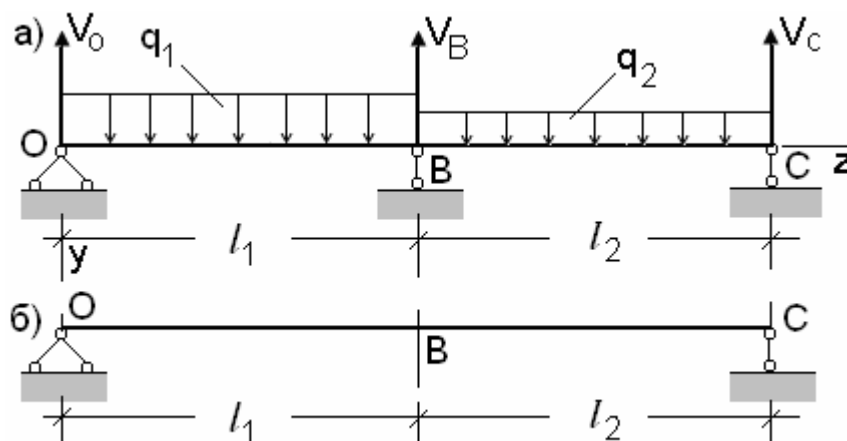


Рис. 6. Расчетная схема балки (а) и основная система (б).

Балка один раз статически неопределимая. Принимаем в качестве "лишней" опорной связи шарнирно-подвижную опору В. Отбрасываем ее и заменяем опорную реакцию V_B "лишней" неизвестной $X = V_B$. В качестве основной системы выбираем однопролетную балку (рис.6,б).

Нагрузив основную систему силами $\{q_1, q_2\}$ и опорной реакцией V_B , получим эквивалентную систему (рис.7).

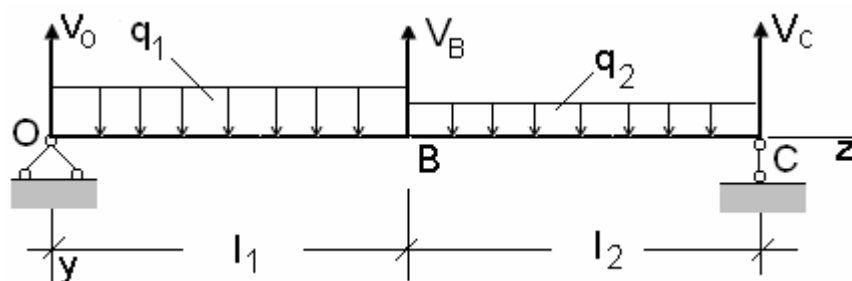


Рис.7. Эквивалентная система.

Каноническое уравнение метода сил данном случае имеет вид:

$$\delta_{11}X = -\Delta_{1p}, \quad (13)$$

где δ_{11} – удельное перемещение (прогиб) в точке В основной системы под действием единичной силы $\bar{X}=1$; Δ_{1p} – перемещение (прогиб) в точке В основной системы под действием заданной нагрузки $P = \{q_1, q_2\}$.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz, \quad (14)$$

где \bar{M}_1 – эпюра изгибающих моментов в основной системе под действием единичной силы $\bar{X}=1$ (рис. 9,в).

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^2 \int_{l_i} \frac{M_p \bar{M}_1}{EJ} dz, \quad (15)$$

где M_p – эпюра изгибающих моментов в основной системе под действием заданных сил $P = \{q_1, q_2\}$.

Эпюра M_p должна быть построена для схемы, представленной на рис.8.

Определяем опорные реакции $V_o(P)$ и $V_c(P)$ в основной системе от заданных сил $P = \{q_1, q_2\}$.

$$\Sigma m_{(c)} = 0; \quad V_o(P) = \frac{q_1 l_1 \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) + \frac{1}{2} q_2 l_2^2}{l_1 + l_2}; \quad (16)$$

$$\Sigma m_{(o)} = 0; \quad V_c(P) = \frac{\frac{1}{2} q_1 l_1^2 + q_2 l_2 \left(l_1 + \frac{1}{2} l_2 \right)}{l_1 + l_2}. \quad (17)$$

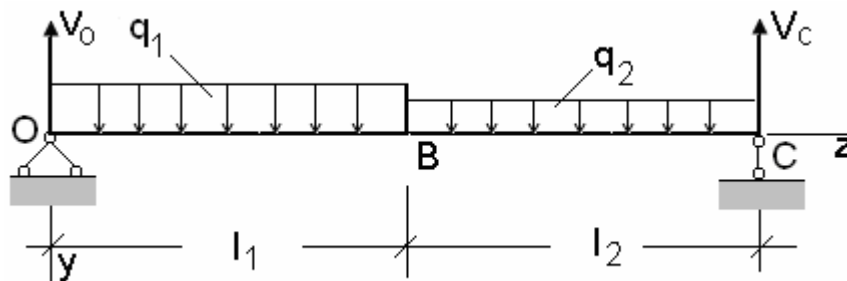


Рис.8. Схема для построения эпюры M_p .

Определяем изгибающие моменты на первом ($0 \leq z < l_1$) и на втором ($l_1 \leq z < (l_1 + l_2)$) участках балки.

$$I: 0 \leq z < l_1; \quad M_I = V_o(P) \cdot z - \frac{1}{2} q_1 z^2; \quad (17)$$

$$II: l_1 \leq z < (l_1 + l_2); \quad M_{II} = V_c(P) (l_1 + l_2 - z) - \frac{1}{2} q_2 (l_1 + l_2 - z)^2. \quad (18)$$

По формулам (17), (18) строим эпюру изгибающих моментов M_p в основной системе под действием заданных сил $P = \{q_1, q_2\}$. Эпюра M_p

представлена на рис. 9,а и 9,б отдельно от опорных реакций V_0 , V_C и распределенной нагрузки $\{q_1, q_2\}$.

В точке В основной системы (рис.6,б) прикладываем единичную силу $\bar{X}=1$, определяем опорные реакции и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис.9, в).

Используя эпюру \bar{M}_1 (рис. 9, в), вычисляем $EJ\delta_{11}$ графоаналитическим способом (Верещагина) – см. Приложение 12.

$$\begin{aligned}
 EJ\delta_{11} &= \frac{1}{2} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} l_1 \cdot \frac{2}{3} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} l_2 \cdot \frac{2}{3} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \\
 &= \left(\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} (l_1 + l_2) = \frac{1}{3} \frac{l_1^2 l_2^2}{l_1 + l_2}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

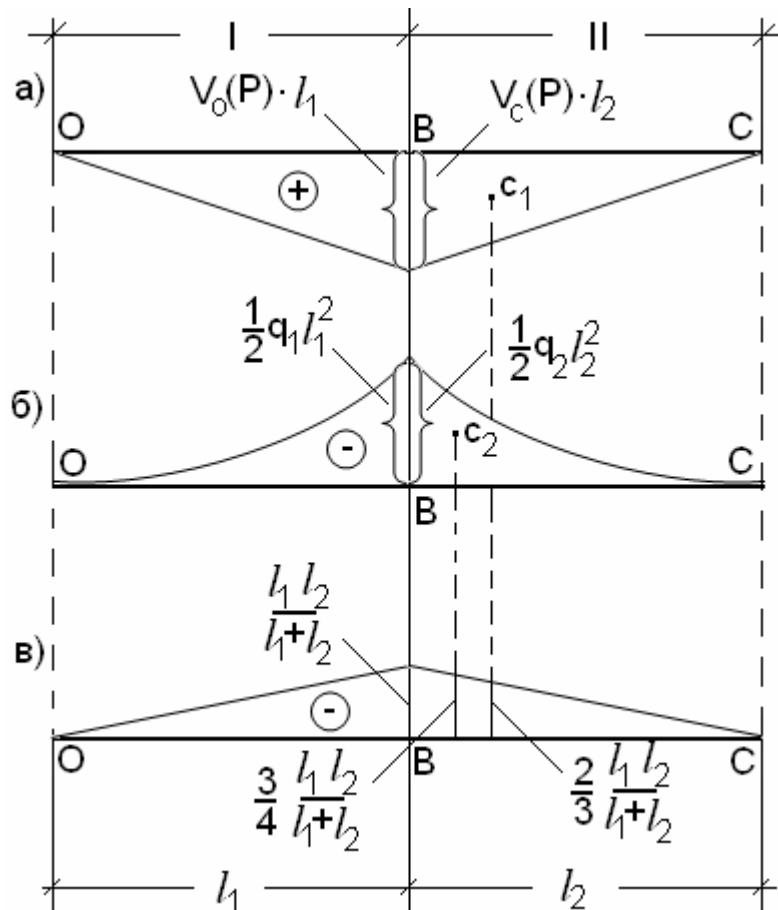


Рис.9. Эпюры M_p (а+б) и \bar{M}_1 (в).

Используя эпюру M_p (рис.9,а,б), вычисляем $EJ\Delta_{1p}$ графоаналитическим способом (Приложение 12).

$$\begin{aligned}
EJ\Delta_{1p} &= -\frac{1}{2}V_o(P) \cdot l_1 \cdot l_1 \cdot \frac{2}{3} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} + \frac{1}{3} q_1 l_1^2 l_1 \cdot \frac{3}{4} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} - \\
&- \frac{1}{2}V_c(P) \cdot l_2 \cdot l_2 \cdot \frac{2}{3} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} + \frac{1}{3} q_2 l_2^2 l_2 \cdot \frac{3}{4} \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \\
&= \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \left[-\frac{1}{3}V_o(P) \cdot l_1^2 + \frac{1}{8}q_1 l_1^3 - \frac{1}{3}V_c(P) \cdot l_2^2 + \frac{1}{8}q_2 l_2^3 \right]. \quad (20)
\end{aligned}$$

Подставляем в (20) выражения $V_o(P)$, $V_c(P)$ по (16), (17):

$$\begin{aligned}
EJ\Delta_{1p} &= \frac{1}{3} \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^2} \left[-q_1 l_1^3 \left(\frac{1}{2}l_1 + l_2 \right) - \frac{1}{2}q_2 l_2^2 l_1^2 + \frac{3}{8}q_1 l_1^3 (l_1 + l_2) - \right. \\
&- \left. \frac{1}{2}q_1 l_1^2 l_2^2 - q_2 l_2^3 \left(l_1 + \frac{1}{2}l_2 \right) + \frac{3}{8}q_2 l_2^3 (l_1 + l_2) \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^2} \left[-\frac{1}{8}q_1 l_1^4 - \right. \\
&- \left. \frac{1}{8}q_2 l_2^4 - \frac{5}{8}q_1 l_1^3 l_2 - \frac{5}{8}q_2 l_1 l_2^3 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2) l_1^2 l_2^2 \right]. \quad (21)
\end{aligned}$$

По уравнению (13) находим

$$\begin{aligned}
X = V_B &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \\
&= \frac{1}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} \left[\frac{1}{8}(q_1 l_1^4 + q_2 l_2^4) + \frac{5}{8}(q_1 l_1^2 + q_2 l_2^2) l_1 l_2 + \frac{1}{2}(q_1 + q_2) l_1^2 l_2^2 \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Зная V_B , опорные реакции V_o и V_c в исходной расчетной схеме (рис. 6,а) определяем из уравнений равновесия балки.

$$\Sigma m_{(c)} = 0; \quad V_o = \frac{q_1 l_1 \left(\frac{1}{2}l_1 + l_2 \right) + \frac{1}{2}q_2 l_2^2 - V_B l_2}{l_1 + l_2}; \quad (23)$$

$$\Sigma m_{(o)} = 0; \quad V_c = \frac{\frac{1}{2}q_1 l_1^2 + q_2 l_2 \left(l_1 + \frac{1}{2} l_2 \right) - V_B l_1}{l_1 + l_2}. \quad (24)$$

Задача решена полностью.

В случае равных пролетов ($l_1 = l_2 = l$) и одинаковых распределенных нагрузок ($q_1 = q_2 = q$) опорные реакции получают значения:

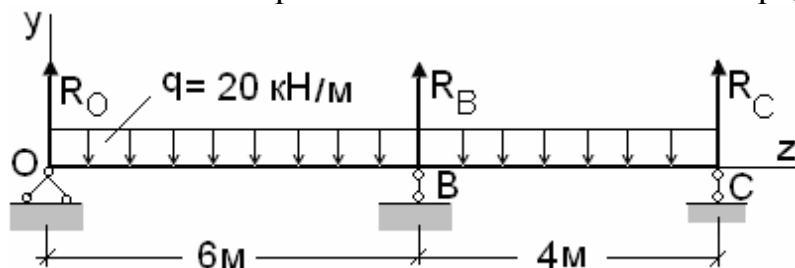
$$V_B = \frac{1}{2l^3} \left[\frac{1}{8} (2ql^4) + \frac{5}{8} (2ql^2) l^2 + ql^4 \right] = \frac{5}{4} ql; \quad (25)$$

$$V_o = \frac{1}{2l} \left[\frac{3}{2} ql^2 + \frac{1}{2} ql^2 - \frac{5}{4} ql^2 \right] = \frac{3}{8} ql; \quad (26)$$

$$V_c = \frac{1}{2l} \left[\frac{1}{2} ql^2 + \frac{3}{2} ql^2 - \frac{5}{4} ql^2 \right] = \frac{3}{8} ql. \quad (27)$$

3.2. Построение эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов.

Пример 2. Двухпролетная балка постоянного поперечного сечения ($EJ = \text{const}$) опирается на шарнирно-неподвижную опору и на две шарнирно-подвижные опоры. Длина левого пролета $l_1 = 6\text{ м}$, длина правого пролета $l_2 = 4\text{ м}$. На балку действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 20\text{ кН/м}$. Расчетная схема представлена на рис.10.



Требуется построить эпюры изгибающих моментов "M" и перерезывающих сил "Q". Балка один раз статически неопределимая.

Рис.10. Исходная расчетная схема.

Уравнения равновесия

$$\Sigma M_{(c)} = 0; \quad R_o \cdot 10 + R_B \cdot 4 - 20 \cdot 6 \left(4 + \frac{6}{2} \right) - 20 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_{(o)} = 0; \quad -R_c \cdot 10 - R_B \cdot 6 + 20 \cdot 4 \left(6 + \frac{4}{2} \right) + 20 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 0,$$

после подстановки числовых значений величин принимают вид:

$$\begin{aligned} 10R_o + 4R_B &= 1000; \\ 6R_B + 10R_c &= 1000. \end{aligned} \quad (28)$$

Для определения перемещений балки воспользуемся методом начальных параметров (Приложение 2). В точке О известны два начальных параметра – прогиб $v_0 = 0$ и изгибающий момент $M_0 = 0$; два других начальных параметра – угол поворота поперечного сечения θ_0 и перерезывающая сила R_0 – неизвестны. С целью определения неизвестных начальных параметров θ_0 и R_0 составим два уравнения совместности перемещений. Воспользуемся тем, что на опорах В и С прогибы балки (вертикальные перемещения) равны нулю:

$$v|_{z=6} = 0, \quad v|_{z=10} = 0. \quad (29)$$

На балке наметим два участка: первый ($0 \leq z < 6$ м) и второй ($6 \leq z < 10$ м); составим универсальные уравнения изогнутой оси балки на этих участках и приравняем нулю прогибы балки в точках В и С.

Первый участок: $0 \leq z < 6$ м;

$$EJv_I(z) = EJ\theta_0 z + R_o \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} = EJ\theta_0 z + R_o \frac{z^3}{6} - \frac{5}{6} z^4. \quad (30)$$

Второй участок: $6 \leq z < 10$ м;

$$EJv_{II}(z) = EJ\theta_0 z + R_o \frac{z^3}{6} - \frac{5}{6} z^4 + R_B \frac{(z-6)^3}{6}. \quad (31)$$

Подставляем (30), (31) в граничные условия (29):

$$EJv|_{z=6} = 0; \quad EJ\theta_0 \cdot 6 - R_o \cdot 6^2 - 5 \cdot 6^3 = 0; \quad (32)$$

$$EJv|_{z=10} = 0; \quad EJ\theta_0 \cdot 10 + \frac{1}{6} R_o \cdot 10^3 - \frac{5}{6} \cdot 10^4 + \frac{1}{6} R_B \cdot 4^3 = 0. \quad (33)$$

Решив систему уравнений (28), (32), (33), находим θ_0 и опорные реакции

$$R_o = \frac{145}{3} \text{ кН} = 48,33 \text{ кН}, \quad R_B = 129,17 \text{ кН}, \quad R_c = 22,5 \text{ кН}.$$

При построении эпюр изгибающих моментов M и перерезывающих сил Q используем локальные координаты z_1, z_2 : z_1 отсчитываем от левого конца балки (точка O); z_2 отсчитываем от правого конца балки (точка C) – см. рис.11.

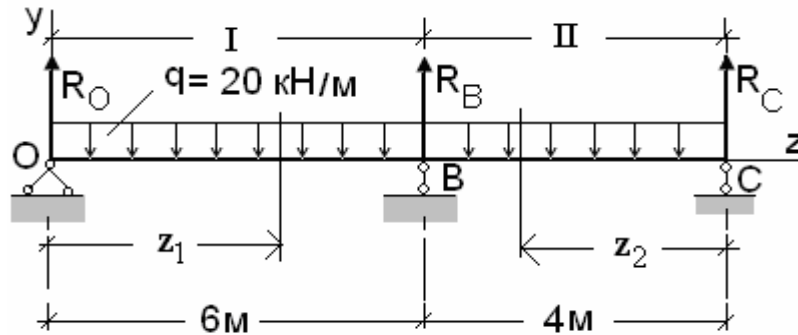


Рис.11. Схема к построению эпюр Q, M .

Составляем аналитические выражения для Q, M по участкам.

Первый участок:

$$\text{I: } 0 \leq z < 6 \text{ м; } Q_{\text{I}} = R_{\text{O}} - qz_1 = 48,33 - 20 \cdot z_1; \quad (34)$$

$$M_{\text{I}} = R_{\text{O}} z_1 - \frac{1}{2} qz_1^2 = 48,33 z_1 - 10 \cdot z_1^2. \quad (35)$$

Определяем положение экстремума изгибающего момента M_{I} на первом участке. Обозначаем координату сечения балки, в котором достигается экстремум изгибающего момента M_{I} , символом z_{1*} . При $z_1 = z_{1*}$ перерезывающая сила Q_{I} должна обращаться в ноль.

$$Q_{\text{I}} = 0; z_{1*} = \frac{R_{\text{O}}}{q} = \frac{48,33}{20} \approx 2,42 \text{ м.}$$

Второй участок:

$$\text{II: } 0 \leq z_2 < 4 \text{ м; } Q_{\text{II}} = -R_{\text{C}} + qz_2 = -22,5 + 20z_2; \quad (36)$$

$$M_{\text{II}} = R_{\text{C}} z_2 - \frac{1}{2} qz_2^2 = 22,5 \cdot z_2 - 10 \cdot z_2^2. \quad (37)$$

Определяем положение экстремума изгибающего момента M_{II} на втором участке. Обозначаем координату сечения балки, в котором достигается экстремум изгибающего момента M_{II} , символом z_{2*} .

$$Q_{\text{II}} = 0; z_{2*} = \frac{R_{\text{C}}}{q} = \frac{22,5}{20} \approx 1,12 \text{ м.}$$

Максимальный по модулю изгибающий момент в пролете балки на первом участке $\max M_I$ определяется по выражению (35) при $z_1 = z_{1*}$:

$$\begin{aligned} \max M_I &= R_o \cdot z_{1*} - \frac{1}{2} q z_{1\max}^2 = 48,33 \cdot 2,42 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2,42^2 = \\ &= 116,96 - 58,56 = 58,4 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

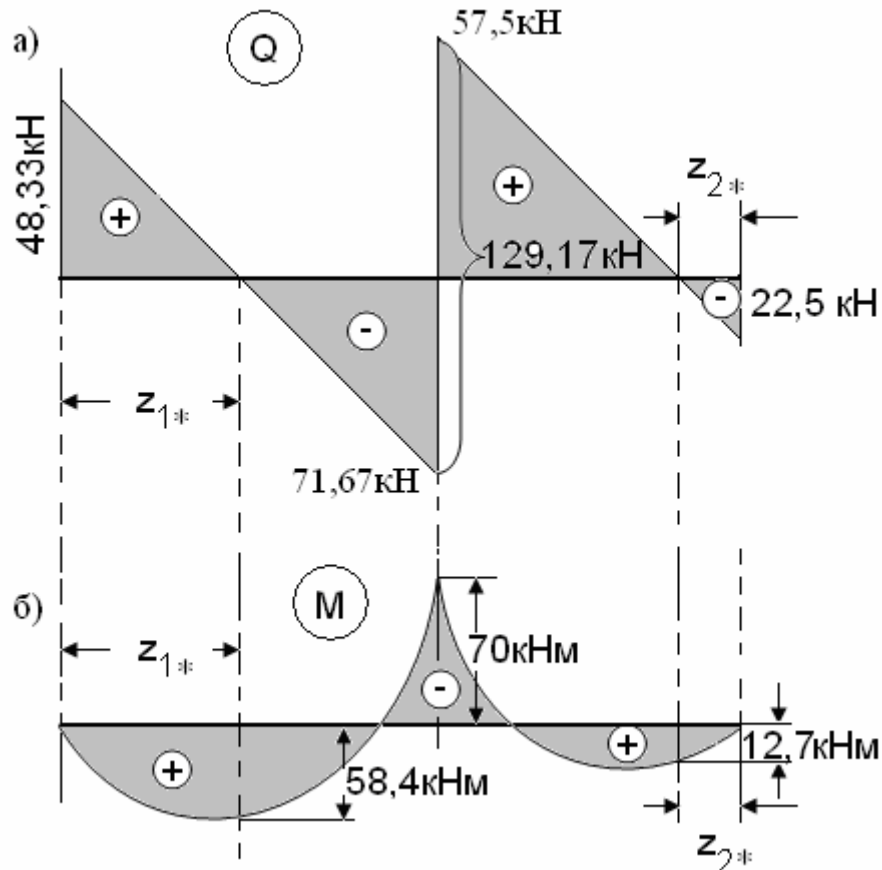


Рис.12. Эпюры Q, M в исходной расчетной схеме.

Максимальный по модулю изгибающий момент в пролете балки на втором участке $\max M_{II}$ определяется по выражению (37) при $z_2 = z_{2*}$:

$$\begin{aligned} \max M_{II} &= R_c \cdot z_{2*} - \frac{1}{2} q z_{2*}^2 = 22,5 \cdot 1,12 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1,12^2 = \\ &= 25,2 - 12,5 = 12,7 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Максимальный по модулю изгибающий момент на опоре В определяется по выражению (35) при $z_1 = 6\text{м}$:

$$M_I \Big|_{z=6} = 48,33 \cdot 6 - \frac{1}{2} 20 \cdot 6^2 = -70 \text{ кНм}.$$

По значениям перерезывающих сил и изгибающих моментов в пролетах балки и на опоре В на рис.12 построены эпюры Q, M в исходной расчетной схеме.

Пример 3. Однопролетная балка постоянного поперечного сечения зашкреплена на правом конце и опирается на шарнирно-подвижную опору на левом конце. В средней части пролета на балку действует равномерно распределенная нагрузка $q = 20$ кН/м; $a = 1$ м. Расчетная схема представлена на рис.13,а.

Требуется построить эпюры перерезывающих сил Q и изгибающих моментов M.

На опоре O действует реакция R_O , направленная вертикально; в заделке – три составляющие реакции: R_B , H_B , M_B (рис.13,а). Для плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия, а число реакций равно четырем – R_O , R_B , H_B и M_B , следовательно, балка – один раз статически неопределимая. Для раскрытия статической неопределимости используем тот очевидный факт, что прогиб на опоре O равен нулю:

$$v|_{z=0} = v_0 = 0. \quad (38)$$

Используя условие (38) составим уравнение совместности деформаций, которое будет зависеть от искомой опорной реакции R_O .

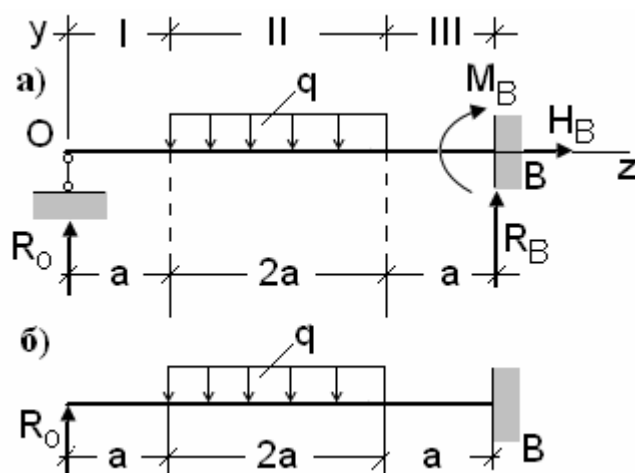


Рис.13. Расчетная (а) и эквивалентная (б) системы.

Отбросим "лишнюю" связь – опору O – и заменим ее действие реакцией R_O , которая должна быть такой, чтобы выполнялось уравнение совместности деформаций (38); в результате получим эквивалентную систему, представленную на рис.13,б.

Для определения прогиба v_0 используем теорему Кастильяно

без учета перерезывающих сил Q:

$$v_0 = \frac{\partial U}{\partial R_0} = \frac{\partial}{\partial R_0} \left(\frac{1}{2} \int_{(I)} \frac{M^2}{EJ} dz \right) = 0, \quad (39)$$

где U – потенциальная энергия деформации балки; l – пролет балки.

Уравнения равновесия балки:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0; \quad R_o - q \cdot 2a + R_B = 0; \\ \Sigma F_z = 0; \quad H_B = 0; \\ \Sigma M_{(B)} = 0; \quad R_o \cdot 4a - q \cdot 2a \cdot 2a + M_B = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Система уравнений (39), (40) позволяет найти H_B , R_o , R_B , M_B .

Изгибающий момент под знаком интеграла в соотношении (39) необходимо выразить через искомую реакцию R_o . Разбиваем балку на три участка (рис.13,а) и составляем выражения для изгибающих моментов:

первый участок: $0 \leq z < a$; $M_I = R_o z$;

второй участок: $a \leq z < 3a$; $M_{II} = R_o z - q(z-a) \frac{(z-a)}{2} = R_o z - \frac{1}{2}q(z-a)^2$;

третий участок: $3a \leq z < 4a$; $M_{III} = R_o z - q \cdot 2a(z-2a)$.

Дифференцирование под знаком интеграла в правой части (39) дает:

$$\begin{aligned} v_o = \int_0^L \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial R_o} dz = \frac{1}{EJ} \int_0^a R_o z^2 dz + \frac{1}{EJ} \int_a^{3a} \left(R_o z - \frac{1}{2}q(z-a)^2 \right) z dz + \\ + \frac{1}{EJ} \int_{3a}^{4a} \left(R_o z - 2qa(z-2a) \right) z dz. \end{aligned} \quad (41)$$

Интегралы в правой части выражения (41) для перемещения v_o вычисляем отдельно.

$$R_o \int_0^a z^2 dz = R_o \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^a = R_o \frac{a^3}{3}; \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \int_a^{3a} \left(R_o z - \frac{1}{2}q(z-a)^2 \right) z dz &= R_o \left. \frac{z^3}{3} \right|_a^{3a} - \frac{1}{2}q \left. \frac{(z-a)^4}{4} \right|_a^{3a} - \frac{1}{2}q \left. \frac{(z-a)^3}{3} \right|_a^{3a} = \\ &= R_o a^3 \frac{27-1}{3} - \frac{1}{2}q \frac{16a^4}{4} - \frac{1}{2}qa \frac{8a^3}{3} = \frac{26}{3}R_o a^3 - \frac{48+32}{24}qa^4 = \\ &= \frac{26}{3}R_o a^3 - \frac{10}{3}qa^4; \quad (b) \end{aligned}$$

$$\int_{3a}^{4a} (R_o z - 2qa(z-2a))zdz = R_o \frac{z^3}{3} \Big|_{3a}^{4a} - 2qa \frac{(z-2a)^3}{3} \Big|_{3a}^{4a} - 2qa \cdot 2a \frac{(z-2a)^2}{2} \Big|_{3a}^{4a} =$$

$$= R_o \frac{64-27}{3} a^3 - 2qa \frac{7}{3} a^3 - 4qa^2 \frac{3a^2}{2} = \frac{37}{3} R_o a^3 - \frac{28+36}{6} qa^4 =$$

$$= \frac{37}{3} R_o a^3 - \frac{32}{3} qa^4. \quad (c)$$

Суммируем (a), (b), (c) и делим на EJ:

$$v_o = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} R_o a^3 + \frac{26}{3} R_o a^3 - \frac{10}{3} qa^4 + \frac{37}{3} R_o a^3 - \frac{32}{3} qa^4 \right) =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left(\frac{64}{3} R_o a^3 - \frac{42}{3} qa^4 \right). \quad (d)$$

Приравниваем v_o к нулю в соответствии с (39) и находим реакцию R_o опоры O:

$$\frac{1}{EJ} \left(\frac{64}{3} R_o a^3 - \frac{42}{3} qa^4 \right) = 0, \quad R_o = \frac{42}{64} qa = \frac{21}{32} qa. \quad (42)$$

Из уравнений равновесия (40) определяем реакции R_B и M_B :

$$R_B = 2qa - R_o = 2qa - \frac{21}{32} qa = \frac{64-21}{32} qa = \frac{43}{32} qa;$$

$$M_B = 4qa^2 - 4R_o \cdot a = 4qa^2 - \frac{4 \cdot 21}{32} qa^2 = \frac{32-21}{8} qa^2 = \frac{11}{8} qa^2.$$

Подставляем числовые значения $q = 20$ кН/м, $a = 1$ м в выражения для R_o , R_B , M_B :

$$R_o = 13,125 \text{ кН}, \quad R_B = 26,875 \text{ кН}, \quad M_B = 27,5 \text{ кНм}.$$

Знак "+" у полученных реакций означает, что их направление выбрано правильно.

Проверяем правильность найденных реакций:

$$\sum M_{(o)} = -q \cdot 2a \cdot 2a - M_B + R_B \cdot 4a = -80 \text{ кНм} - 27,5 \text{ кНм} + 107,5 \text{ кНм} = 0.$$

Построение эпюр Q, M по участкам.

Эпюра Q (рис.14,а):

участок I: $Q_I = R_o = 13,125$ кН;

участок II: Q_{II} – изменяется по линейному закону от значения 13,125 кН в сечении с координатой $z = a$ до значения $-26,875$ кН в сечении с координатой $z = 3a$;

участок III: $Q_{III} = -R_B = -26,875$ кН.

Эпюра M (рис. 14,б):

– на первом и на третьем участках балки M – линейная функция [$M_I = R_o z$, $M_{III} = R_o z - q \cdot 2a (z - 2a)$], поэтому для построения графиков достаточно иметь по две точки;

– на втором участке необходимо найти экстремум функции $M_{II}(z) = R_o z - \frac{1}{2}q(z - a)^2$.

Вычисляем значения изгибающего момента на первом участке:

$$M|_{z=0} = 0; \quad M|_{z=3a} = R_o \cdot 3a - q \cdot 2a^2 = \frac{21}{32}qa \cdot 3a - 2qa^2 = -\frac{1}{32}qa^2 = \\ = -\frac{20 \cdot 1^2}{32} = -0,625 \text{ кНм};$$

Вычисляем значения изгибающего момента на третьем участке:

$$M|_{z=4a} = R_o \cdot 4a - q4a^2 = -27,5 \text{ кНм}.$$

Экстремум функции $M_{II}(z)$ достигается в сечении с координатой z_* , где $Q(z)$ обращается в ноль:

$$Q_{II} = 0, \quad \frac{z_*}{R_o} = \frac{z_a - z_*}{R_B},$$

$$R_B z_* + R_o z_* = 2R_o a;$$

$$z_* = \frac{2R_o a}{R_o + R_B} =$$

$$= \frac{2 \cdot 13,125 \cdot 1}{13,125 + 26,875} = 0,656 \text{ м};$$

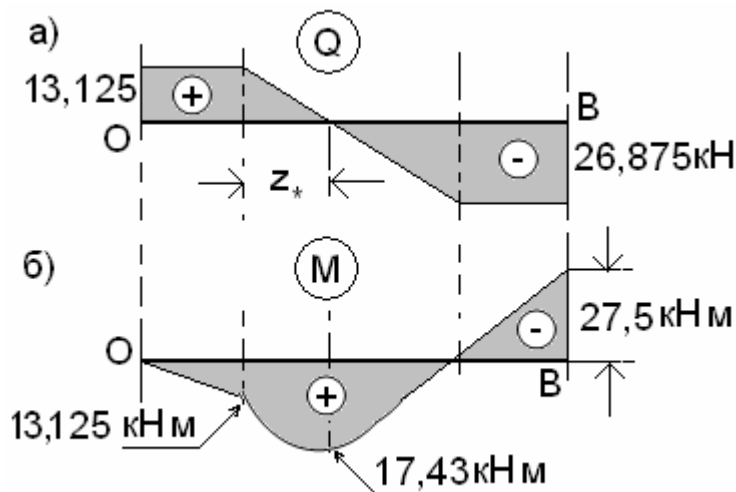


Рис.14.Эпюры Q (а), M (б) в исходной расчетной схеме.

$$M_{II}|_{z=1,656} = 13,125 \cdot 1,656 - \frac{1}{2}20(1,656 - 1)^2 = 21,735 - 4,3 = 17,43 \text{ кНм};$$

Максимальный по модулю изгибающий момент в пролете балки на втором участке имеет значение

$$\max M_{II} = 17,43 \text{ кНм.}$$

Максимального по модулю значения изгибающий момент в балке достигает на опоре В

$$\max |M| = 27,5 \text{ кНм.}$$

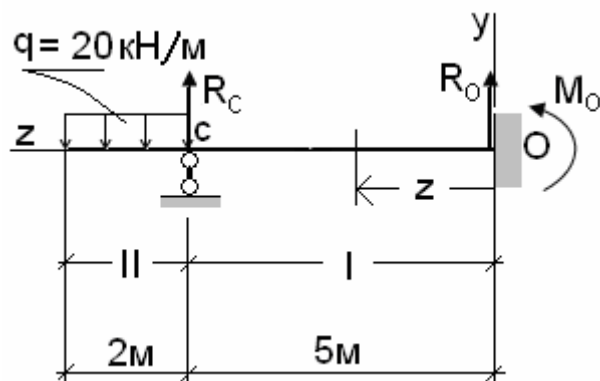
3.3. Проверочный расчет статически неопределимой балки.

Пример 4. Стальная однопролетная балка постоянного поперечного сечения двутаврового профиля № 40 с консолью жестко заделана в стену правым концом и опирается на шарнирно-подвижную опору на левом конце. Расстояние между опорами $l = 5 \text{ м}$, вылет консоли $a = 2 \text{ м}$. На консоль действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью

$$q = 20 \text{ кН/м.}$$

Расчетная схема представлена на рис. 15. Допускаемые напряжения $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$, $\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}$. Жесткость балки EJ ; E – модуль Юнга, J – осевой момент инерции поперечного сечения.

Требуется построить эпюры изгибающих моментов M и перерезывающих сил Q , а также произвести проверочный расчет.



Балка один раз статически неопределимая.

Уравнения равновесия балки:

$$\sum M_{(O)} = 0; 5R_c - 2q(5+1) - M_o = 0,$$

$$5R_c - M_o = 240; \quad (43)$$

$$\sum F_y = 0: R_c - 20 \cdot 2 + R_o = 0,$$

$$R_o + R_c = 40. \quad (44)$$

Рис. 15. Исходная расчетная схема.

Два уравнения равновесия (43), (44) содержат три неизвестные опорные реакции R_o , R_c , M_o ; для их отыскания необходимо составить еще одно уравнение. Выберем начало координат на опоре O , ось z направим влево, а ось y – вверх.

Используем тот факт, что прогиб на опоре C в исходной расчетной схеме равен нулю:

$$v_c = 0. \quad (45)$$

Прогиб на опоре C выразим с помощью метода начальных параметров (Приложение 2). Два начальных параметра известны: $v_o = 0$, $\theta_o = 0$; два других – искомые реакции R_o , M_o .

Уравнение упругой линии балки на первом участке ($0 \leq z < 5 \text{ м}$)

$$EJ v_I = \frac{1}{2} M_0 z^2 + \frac{1}{6} R_0 z^3. \quad (46)$$

Условие совместности деформаций:

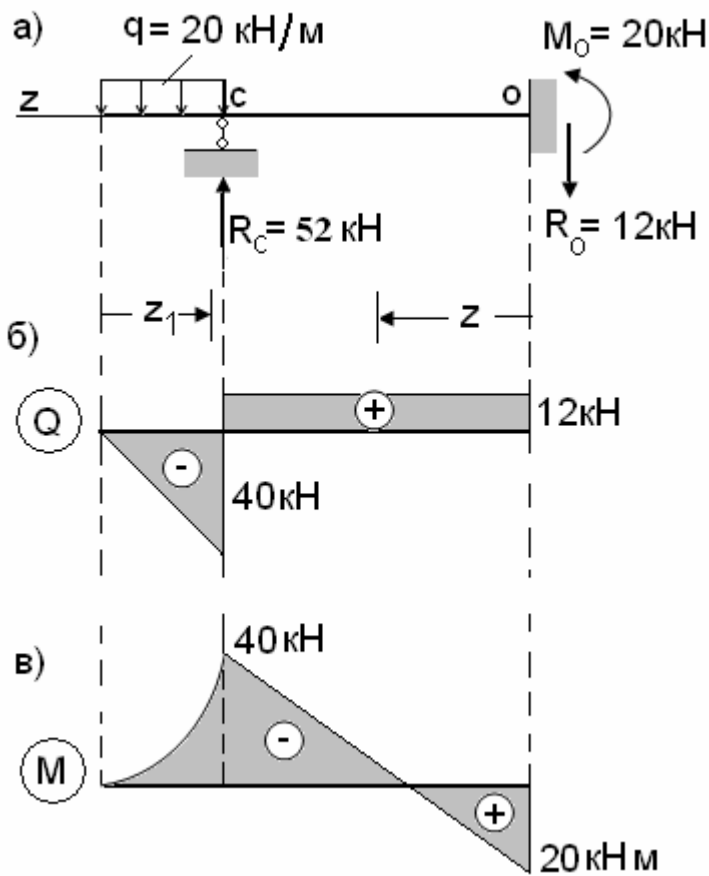
$$v|_{z=5} = 0. \quad (47)$$

Подставляем (46) в (47) и получаем еще одно уравнение для отыскания опорных реакций R_0 , R_c , M_0 :

$$M_0 \frac{5^2}{2} + R_0 \frac{5^3}{6} = 0. \quad (48)$$

Из системы уравнений (43), (44), (48) определяем R_0 , R_c , M_0 :

$$R_c = 52 \text{ кН}, \quad R_0 = -12 \text{ кН}, \quad M_0 = 20 \text{ кНм}.$$



При построении эпюр Q , M используем локальные системы координат: на I-ом участке координату z отсчитываем от опоры O влево; на II-ом участке координату z_1 отсчитываем от свободного конца консоли вправо.

Строим аналитические выражения Q , M по участкам:

I: $0 \leq z < 5\text{м}$:

$$Q_I = R_0 = 12 \text{ кН};$$

$$M_I = M_0 - R_0 z = 20 - 12z;$$

II: $0 \leq z_1 < 2\text{м}$:

$$Q_{II} = -qz_1 = -20z_1;$$

$$M_{II} = -\frac{1}{2} qz_1^2 = -10 \cdot z_1^2.$$

Рис.16. Расчетная схема (а), эпюры Q (б) и M (в).

Геометрические характеристики двутавра № 40 выбираем из сортамента – ГОСТ 8239-72* (Приложение 3). Площадь сечения $A = 72,7 \text{ см}^2$; осевой момент сопротивления $W_x = 953 \text{ см}^3$.

$$\sigma_{\max} = \frac{\max|M|}{W_x} = \frac{40 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 0,042 \cdot 10^9 \text{ Па} = 42 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max} < \sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{3|Q|_{\max}}{2A} = \frac{40 \cdot 10^3}{72,7 \cdot 10^{-4}} = 0,55 \cdot 10^7 = 5,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} < \tau_{\text{adm}} = 100 \text{ МПа}.$$

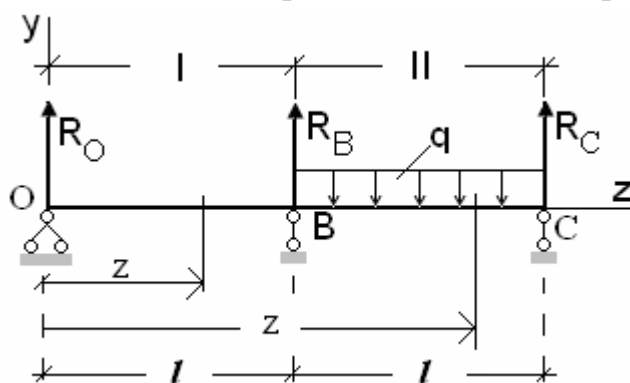
Условия прочности выполнены.

3.4. Проектировочный расчет статически неопределимой балки.

Пример 5. Стальная двухпролетная балка, нагруженная в правом пролете равномерно распределенной нагрузкой $q = 20 \text{ кН/м}$, опирается на одну шарнирно-неподвижную и две шарнирно-подвижные опоры. Расстояние между опорами $l = 3 \text{ м}$. Допускаемые напряжения $\sigma_{\text{adm}} = 140 \text{ МПа}$, $\tau_{\text{adm}} = 80 \text{ МПа}$. Жесткость балки $EJ = \text{const}$; E – модуль Юнга, J – осевой момент инерции поперечного сечения. Расчетная схема представлена на рис. 17.

Требуется построить эпюры изгибающих моментов M и перерезывающих сил Q , а также произвести проектировочный расчет, т.е. подобрать размеры поперечного сечения стального двутаврового профиля.

Балка один раз статически неопределимая.



Уравнения равновесия балки:

$$\Sigma M_{(c)} = 0;$$

$$R_o \cdot 6 + R_B \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0; \quad (49)$$

$$\Sigma M_{(o)} = 0;$$

$$-R_c \cdot 6 - R_B \cdot 3 + 20 \cdot 3 \cdot \left(3 + \frac{3}{2}\right) = 0. \quad (50)$$

Рис. 17. Исходная расчетная схема балки.

Два уравнения равновесия (49), (50) содержат три неизвестные опорные реакции R_o , R_B , R_c ; для их отыскания необходимо составить дополнительные уравнения.

Выберем начало координат на опоре O , ось z направим вправо, а ось y – вверх.

Используем тот очевидный факт, что прогибы на опорах В,С равны нулю:

$$v_B = v|_{z=3} = 0; \quad v_C = v|_{z=6} = 0. \quad (51)$$

Прогибы на опорах В,С выразим через заданные силы по методу начальных параметров (Приложение 2). Два начальных параметра известны: $v_0 = 0$, $M_0 = 0$; два других – R_0 , θ_0 следует найти. Так как появилось еще одно неизвестное – параметр θ_0 , в дополнение к уравнениям равновесия (49), (50) составим два уравнения, отражающие условия совместности деформаций балки на опорах В,С.

Уравнение упругой линии балки на первом участке ($0 \leq z < 3$ м):

$$EJv_I = EJ\theta_0 z + R_0 \frac{z^3}{6}; \quad (52)$$

Уравнение упругой линии балки на втором участке ($3 \leq z < 6$ м):

$$EJv_{II} = EJ\theta_0 z + R_0 \frac{z^3}{6} + R_B \frac{(z-3)^3}{6} - q \frac{(z-3)^4}{24}. \quad (53)$$

Подставляем (52) в первое условие совместности деформаций (51), (53) – во второе условие совместности деформаций (51) и получаем два дополнительных уравнения для определения R_0 , R_B , R_C , θ_0 :

$$EJ\theta_0 \cdot 3 + R_0 \cdot \frac{3^3}{6} = 0; \quad (54)$$

$$EJ\theta_0 \cdot 12 + R_0 \cdot \frac{6^3}{6} + R_B \frac{3^3}{6} - 20 \frac{3^4}{24} = 0. \quad (55)$$

Решив систему уравнений (49), (50), (54), (55), находим опорные реакции:

$$R_0 = -3,75 \text{ кН}, \quad R_B = 37,5 \text{ кН}, \quad R_C = 26,25 \text{ кН}.$$

Для построения эпюр изгибающих моментов M и перерезывающих сил Q используем локальные координаты z_1 и z_2 (рис.18,а). Координату z_1 отсчитываем от левой опоры балки (точка О), координату z_2 – от правой опоры (точка С).

Строим аналитические выражения для Q , M по участкам.

$$I: 0 \leq z_1 < 3 \text{ м}; \quad Q_I = R_0 = -3,75 \text{ кН}, \quad M_I = R_0 \cdot z_1 = -3,75 z_1; \quad (56)$$

$$II: 0 \leq z_2 < 3 \text{ м}; \quad Q_{II} = -R_C + qz_2 = -26,25 + 20 \cdot z_2; \quad M_{II} = R_C z_2 -$$

$$-\frac{1}{2}qz_2^2 = 26,25 \cdot z_2 - 10z_2^2. \quad (57)$$

Используя аналитические выражения для Q , M (56), (57), по точкам строим эпюры Q , M (рис.18,б,в).

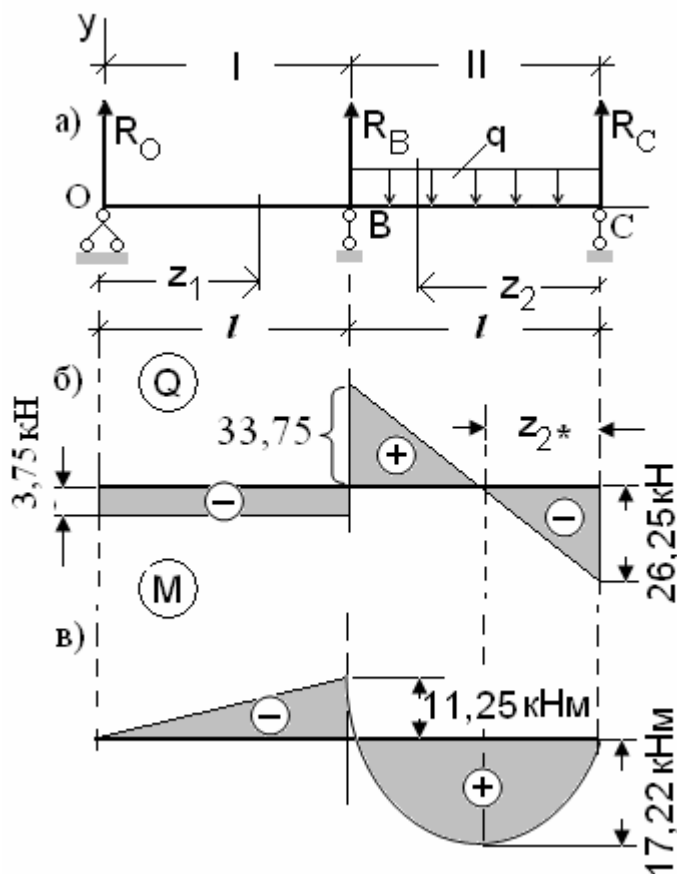
На первом участке перерезывающая сила – постоянная величина, а изгибающий момент – линейная функция:

$$Q_I = R_o = -3,75 \text{ кН}; M_I|_{z_1=0} = 0; M_I|_{z_1=3} = -3,75 \cdot 3 = -11,25 \text{ кН}.$$

На втором участке перерезывающая сила – линейная функция, а изгибающий момент – квадратная парабола. Для построения эпюры Q_{II} достаточно иметь две точки:

$$Q_{II}|_{z=3} = 33,75 \text{ кН}; Q_{II}|_{z=6} = -26,25 \text{ кН}.$$

Для построения эпюры M_{II} необходимо иметь как минимум три точки. Вычисляем: при $z_2 = 0$ $M_{II} = 0$; при $z_2 = 3$ $M_{II} = 78,75 - 90 = -11,25 \text{ кНм}$.



В сечении, где перерезывающая сила Q_{II} равна нулю, изгибающий момент M_{II} достигает экстремума (максимума). Определяем координату сечения, в котором перерезывающая сила Q_{II} равна нулю:

$$z_{2*} = R_c / q = 26,25 / 20 = 1,31 \text{ м}$$

вычисляем значение максимального изгибающего момента $\max M_{II}$:

$$\begin{aligned} \max M_{II} &= M_{II}|_{z_2=1,31} = \\ &= 26,25 \cdot 1,31 - 10 \cdot 1,31^2 = \\ &= 17,22 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Рис.18. Расчетная схема (а) и эпюры Q (б), M (в).

Эпюры Q , M представлены на рис.18,б,в.

Размеры поперечного сечения стального двутаврового профиля подбираем по условию прочности:

$$\max \sigma = \frac{\max M}{W_x} \leq \sigma_{adm},$$

где W_x – момент сопротивления сечения.

Требуемый момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{\max M}{\sigma_{adm}}; \max M = 17,22 \text{ кНм};$$

вычисляем:

$$W_x \geq \frac{17,22 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} = 0,123 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 123 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239-72* (Приложение 3) выбираем двутавр № 18. Момент сопротивления двутавра $W_x = 143 \text{ см}^3$, площадь сечения $A = 23,4 \text{ см}^2$.

Проверяем прочность балки по касательным напряжениям на опоре В, где $Q_{\max} = 37,5 \text{ кН}$.

Максимальное касательное напряжение τ_{\max} достигается в стенке двутавра на нейтральной оси o_x , поэтому $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}$. Вычисляем:

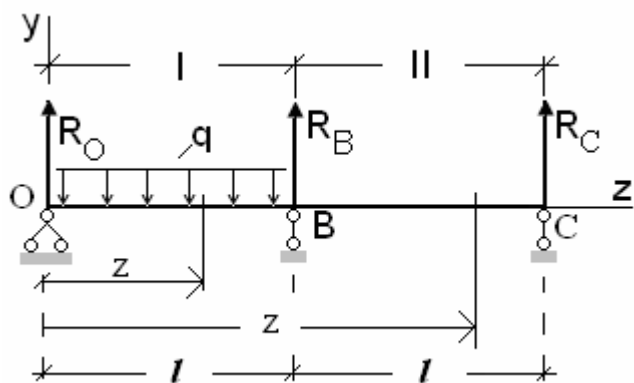
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{37,5 \cdot 10^3}{23,4 \cdot 10^{-4}} = 2,4 \cdot 10^7 \text{ Па} = 24 \text{ МПа}.$$

Так как $\tau_{\max} < \tau_{adm}$, то условие прочности по касательным напряжениям выполнено.

Поскольку при выборе двутавра № 18 было использовано условие прочности по нормальным напряжениям, прочность балки обеспечена.

3.5. *Определение несущей способности статически неопределимой балки.*

Пример 6. Стальная двухпролетная балка постоянного поперечного сечения нагружена в левом пролете равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Левая опора балки – шарнирно-неподвижная, две другие – шарнирно-подвижные. Поперечное сечение балки – два швеллера № 24 (условное обозначение $[[\text{№ 24}]]$). Расстояние между опорами $l = 6 \text{ м}$. Допускаемые напряжения $\sigma_{adm} = 140 \text{ МПа}$, $\tau_{adm} = 80 \text{ МПа}$. Жесткость балки $EJ = \text{const}$; E – модуль Юнга, J – осевой момент инерции поперечного сечения. Расчетная схема представлена на рис. 19.



Требуется построить эпюры изгибающих моментов M и перерезывающих сил Q , а также определить несущую способность балки расчетом по допускаемым напряжениям, т.е. определить допускаемую нагрузку на балку q_{adm} . Допускаемую нагрузку на балку q_{adm} найдем из условия

Рис.19.Исходная расчетная схема.

прочности по нормальным напряжениям

$$\max \sigma = \frac{\max M}{W_x} \leq \sigma_{adm}, \quad (58)$$

где W_x – момент сопротивления сечения; $\max M$ – значение максимального по модулю изгибающего момента в сечениях балки.

После определения допускаемой нагрузки на балку q_{adm} проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{\max Q}{A} \leq \tau_{adm}, \quad (59)$$

где A – площадь поперечного сечения балки; $\max Q$ – значение максимальной по модулю перерезывающей силы в сечениях балки.

Уравнения равновесия балки:

$$\Sigma M_{(c)} = 0; \quad R_O \cdot 12 + R_B \cdot 6 - q \cdot 6 \left(6 + \frac{6}{2} \right) = 0; \quad (60)$$

$$\Sigma M_{(o)} = 0; \quad -R_C \cdot 12 - R_B \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 0. \quad (61)$$

3.5.1. *Определение несущей способности статически неопределимой балки с использованием метода начальных параметров.*

Балка один раз статически неопределимая.

Два уравнения равновесия (60), (61) содержат три неизвестные опорные реакции R_O , R_B , R_C ; для их отыскания необходимо составить дополнительные уравнения.

Выберем начало координат на опоре O , ось z направим вправо, а ось y – вверх.

Воспользуемся тем, что прогибы на опорах B, C балки равны нулю:

$$v_B = v \Big|_{z=6} = 0; \quad v_C = v \Big|_{z=12} = 0. \quad (62)$$

Прогибы на опорах В,С выразим через заданные силы по методу начальных параметров (Приложение 2). Два начальных параметра известны: $v_0 = 0$, $M_0 = 0$; два других – R_0 , θ_0 следует найти. Так как появилось еще одно неизвестное – параметр θ_0 , в дополнение к уравнениям равновесия (60), (61) составим два уравнения, отражающие условия совместности деформаций балки на опорах В,С.

Уравнение упругой линии балки на первом участке ($0 \leq z < 6$ м):

$$EJv_I = EJ\theta_0 z + R_0 \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24}; \quad (63)$$

Уравнение упругой линии балки на втором участке ($6 \leq z < 12$ м):

$$EJv_{II} = EJ\theta_0 z + R_0 \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} + R_B \frac{(z-6)^3}{6} + q \frac{(z-6)^4}{24}. \quad (64)$$

Подставляем (63) в первое условие (62), а (64) – во второе условие (62):

$$EJ\theta_0 \cdot 6 + R_0 \cdot 6^2 - q \cdot \frac{6^3}{4} = 0; \quad (65)$$

$$EJ\theta_0 \cdot 12 + R_0 \cdot \frac{12^3}{6} + R_B \cdot 6^2 - q \cdot \left(\frac{12^4}{24} - \frac{6^4}{24} \right) = 0. \quad (66)$$

Из системы уравнений (60), (61), (65), (66) выражаем $EJ\theta_0$ и опорные реакции R_0 , R_B и R_C через нагрузку q :

$$R_0 = \frac{21}{8} q, \quad R_B = \frac{15}{4} q, \quad R_C = -\frac{3}{8} q. \quad (67)$$

(Значение $EJ\theta_0$ не выписываем, поскольку далее оно не используется).

При построении эпюр Q , M используем локальные координаты z_1 и z_2 : z_1 отсчитываем от левого конца балки (точка О), z_2 – от правого конца балки (точка С), как показано на рис.20,а.

Строим аналитические выражения для Q , M по участкам.

На первом участке:

$$I: 0 \leq z_1 < 6 \text{ м}; \quad Q_I = R_0 - qz_1 = \left(\frac{21}{8} - z_1 \right) q; \quad (68)$$

$$M_I = R_o \cdot z_1 - \frac{1}{2} q z_1^2 = \frac{21}{8} q z_1 - \frac{1}{2} q z_1^2.$$

На втором участке:

$$\text{II: } 0 \leq z_2 < 6 \text{ м; } Q_{\text{II}} = -R_c = \frac{3}{8} q;$$

$$M_{\text{II}} = R_c z_2 = -\frac{3}{8} q z_2. \quad (69)$$

Определяем положение $\max |M|$ в левом пролете балки.

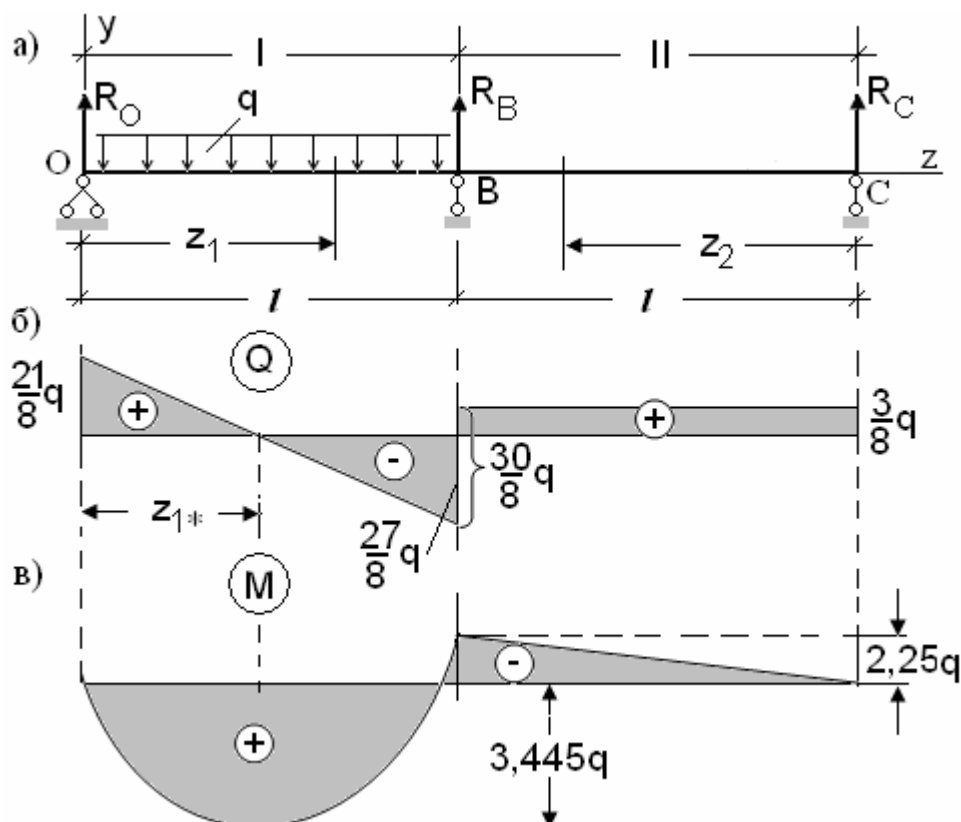


Рис.20. Исходная расчетная схема(а) и эпюры Q(б), M(в).

В сечении, где перерезывающая сила Q_I равна нулю, изгибающий момент M_I достигает экстремума (максимума). Определяем координату сечения, в котором перерезывающая сила Q_I равна нулю:

$$R_o - q z_1 = 0, \quad z_{1*} = R_o / q = 21/8 \text{ м;}$$

вычисляем значение максимального изгибающего момента $\max M_I$:

$$\max |M_I| = R_c \cdot z_{1*} - \frac{1}{2} q z_{1*}^2 = \frac{21}{8} q \cdot \frac{21}{8} - \frac{1}{2} q \left(\frac{21}{8} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{21}{8} \right)^2 q. \quad (70)$$

Вычисляем значения Q и M в характерных точках:

$$Q_I \Big|_{z=6} = \frac{21}{8} q - q \cdot 6 = -\frac{27}{8} q; \quad M_{\text{II}} \Big|_{z=6} = -\frac{3}{8} q \cdot 6 = -\frac{9}{4} q = -2,25q; \quad (71)$$

$$\max M_I = \frac{1}{2} \left(\frac{21}{8} \right)^2 q = 3,445 q \text{ кНм.}$$

По значениям Q и M в характерных точках (71) строим эпюры Q и M, которые представлены на рис.20,б,в.

По ГОСТ 8240-72* (Приложение 4) швеллер № 24 имеет такие геометрические характеристики: площадь поперечного сечения $A = 30,6 \text{ см}^2$, момент сопротивления $W_x = 242 \text{ см}^3$; два швеллера $A = 61,2 \text{ см}^2$, $2W_x = 484 \text{ см}^3$.

Используя условие прочности по нормальным напряжениям (58) вычисляем допускаемую нагрузку:

$$\max |M| \leq \sigma_{\text{adm}} \cdot W_x, \quad 3,445 q_{\text{adm}} \leq \sigma_{\text{adm}} \cdot W_x,$$

$$q_{\text{adm}} \leq \frac{140 \cdot 10^6 \cdot 484 \cdot 10^{-6}}{3,445} = 19,67 \text{ кН/м.}$$

Проверяем выполнение условия прочности по касательным напряжениям (59).

Значение максимальной по модулю перерезывающей силы в сечениях балки – $\max |Q| = \frac{27}{8} q = \frac{27}{8} \cdot 19,67 = 66,38 \text{ кН}$.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{66,38 \cdot 10^3}{61,2 \cdot 10^{-4}} = 16,27 \text{ МПа} < \tau_{\text{adm}} = 80 \text{ МПа}.$$

Так как $\tau_{\text{max}} < \tau_{\text{adm}}$, условие прочности по касательным напряжениям выполнено.

Поскольку при отыскании допускаемой нагрузки было использовано условие прочности по нормальным напряжениям, прочность балки обеспечена.

Проверяем правильность построенного решения другим методом. С этой целью используем метод сил.

3.5.2. *Определение несущей способности статически неопределимой балки с использованием метода сил.* Принимаем в качестве "лишней" опорной связи шарнирно-подвижную опору С. Отбрасываем ее и заменяем опорную реакцию R_C "лишней" неизвестной $X_1 = R_C$. В качестве основной системы выбираем однопролетную балку с консолью (рис.21,а).

Нагрузив основную систему силами $P = \{q\}$ и опорной реакцией R_C , получим эквивалентную систему (рис.21,б).

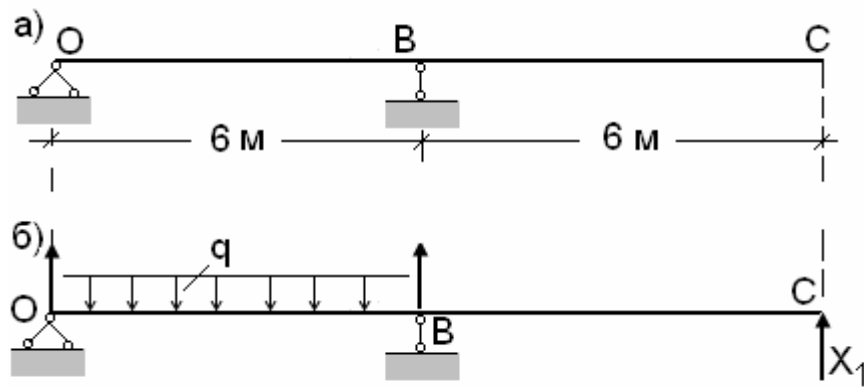


Рис.21. Основная (а) и эквивалентная (б) системы.

Каноническое уравнение метода сил в данном случае имеет вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (72)$$

в котором удельные перемещения δ_{11} определены формулой:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^2 \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz, \quad (73)$$

где \bar{M}_1 эпюра изгибающих моментов от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ в основной системе.

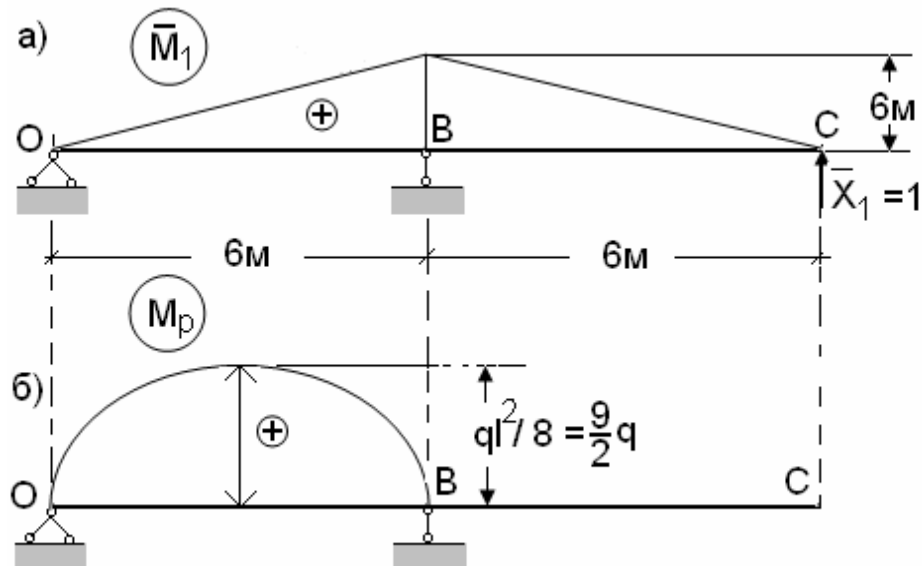


Рис.22. Единичная эпюра (а) и эпюра M_p от заданных сил (б).

Перемещения Δ_{1p} определяются в основной системе от действия сил $P = \{q\}$ по формуле:

$$\Delta_{1p} = \sum_{k=1}^2 \int_{l_k} \frac{M_p \bar{M}_1}{EJ} dz, \quad (74)$$

где M_p – эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки q в основной системе.

Строим эпюру \bar{M}_1 от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ (рис.22,а).

Строим эпюру M_p от заданной нагрузки q на левом пролете балки (рис.22,б).

Используя графоаналитический способ (Приложение 12) вычисляем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1p} по формулам (73) и (74):

$$EJ\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 144;$$

$$EJ\Delta_{1p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{gl^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{gl^2}{4} \cdot 6 = \frac{q \cdot 36 \cdot 6}{4} = 54q.$$

По уравнению (72) вычисляем опорную реакцию $R_c = X_1$:

$$R_c = X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{6 \cdot 9q}{2 \cdot 72} = -\frac{3}{8}q \text{ кН.} \quad (75)$$

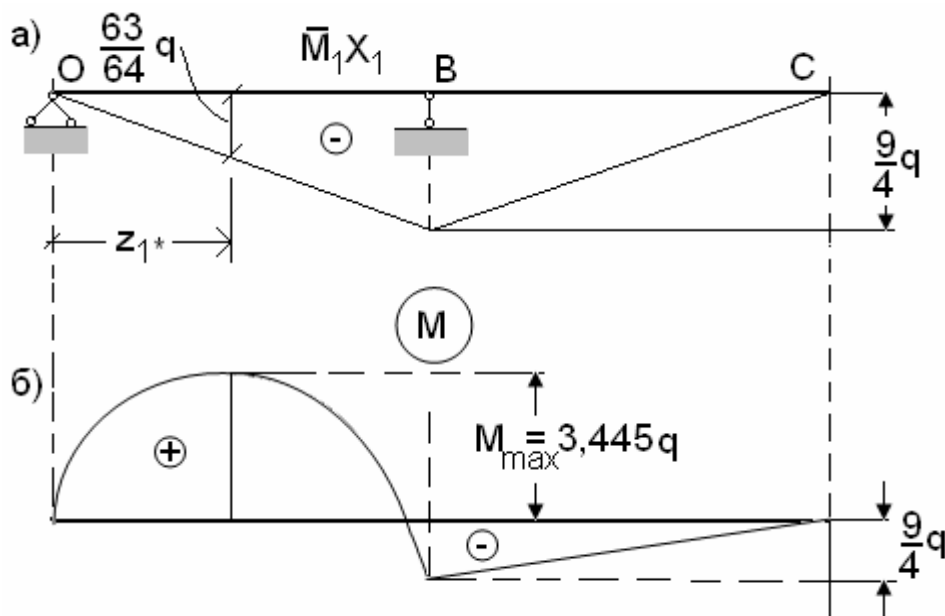


Рис.23. Эпюра $\bar{M}_1 X_1$ (а) и результирующая эпюра M (б).

Из уравнений равновесия балки (60), (61) определяем опорные реакции R_O, R_B :

$$R_B = -2R_C + 3q = \frac{3}{4}q + 3q = \frac{15}{4}q; R_O = -\frac{1}{2}R_B + \frac{9}{2}q = -\frac{15}{8}q + \frac{36}{8}q = \frac{21}{8}q.$$

Опорные реакции R_O , R_B , R_C совпадают с вычисленными выше.

Умножив эпюру \bar{M}_1 от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$, приложенной в точке С, на реакцию $R_C = X_1$, получим эпюру изгибающих моментов от силы R_C (рис.23,а). После наложения эпюры M_p от заданной нагрузки на эпюру $\bar{M}_1 X_1$ получим результирующую эпюру M – эпюру изгибающих моментов в исходной расчетной схеме (рис.23,б).

Найдем максимальный изгибающий момент M_{\max} . Координата сечения, в котором изгибающий момент достигает максимального значения, равна $z_{1*} = R_O / q = 21/8$ м. Подставляем z_{1*} в выражение $M = M_p + \bar{M}_1 X_1$; получаем максимальный изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M|_{z=\frac{21}{8}} = \frac{1}{2}q \cdot 6 \cdot \frac{21}{8} - \frac{1}{2}q \cdot \left(\frac{21}{8}\right)^2 - \frac{9}{4 \cdot 6}q \cdot \frac{21}{8} = \\ &= 7,875q - 4,43q = 3,445q \text{ кНм.} \end{aligned}$$

Максимальный изгибающий момент M_{\max} и опорные реакции R_O , R_B , R_C совпадают с найденными расчетом при использовании универсального уравнения прогибов балки, следовательно, выполненный расчет правильный.

Эпюра изгибающих моментов на рис.23,б совпадает с эпюрой на рис.20,в.

Таким образом, допускаемая нагрузка на балку q_{adm} определена правильно.

Расчеты закончены.

Задание № 12. Расчет плоских статически определимых рам

Для рам, расчетные схемы которых представлены на рис.1,а,б,в,г, требуется построить эпюры продольных (N) и перерезывающих (Q) сил, а также изгибающих моментов (M); определить перемещения точки D и угол поворота сечения стержней в точке A .

Нагрузки на рамы: $F = 10$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 5$ кН/м. Размеры указаны в метрах. Осевые моменты инерции J сечений стержней рам равны $5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$: $J = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; модуль упругости $E = 30$ ГПа.

Номер расчетной схемы выбирается по коду из трех цифр $n_2n_1n_0$, выданному преподавателем; n_2 , n_1 , n_0 – три цифры кода студента: n_2 – первая слева цифра, n_1 – вторая слева цифра, n_0 – последняя цифра кода.

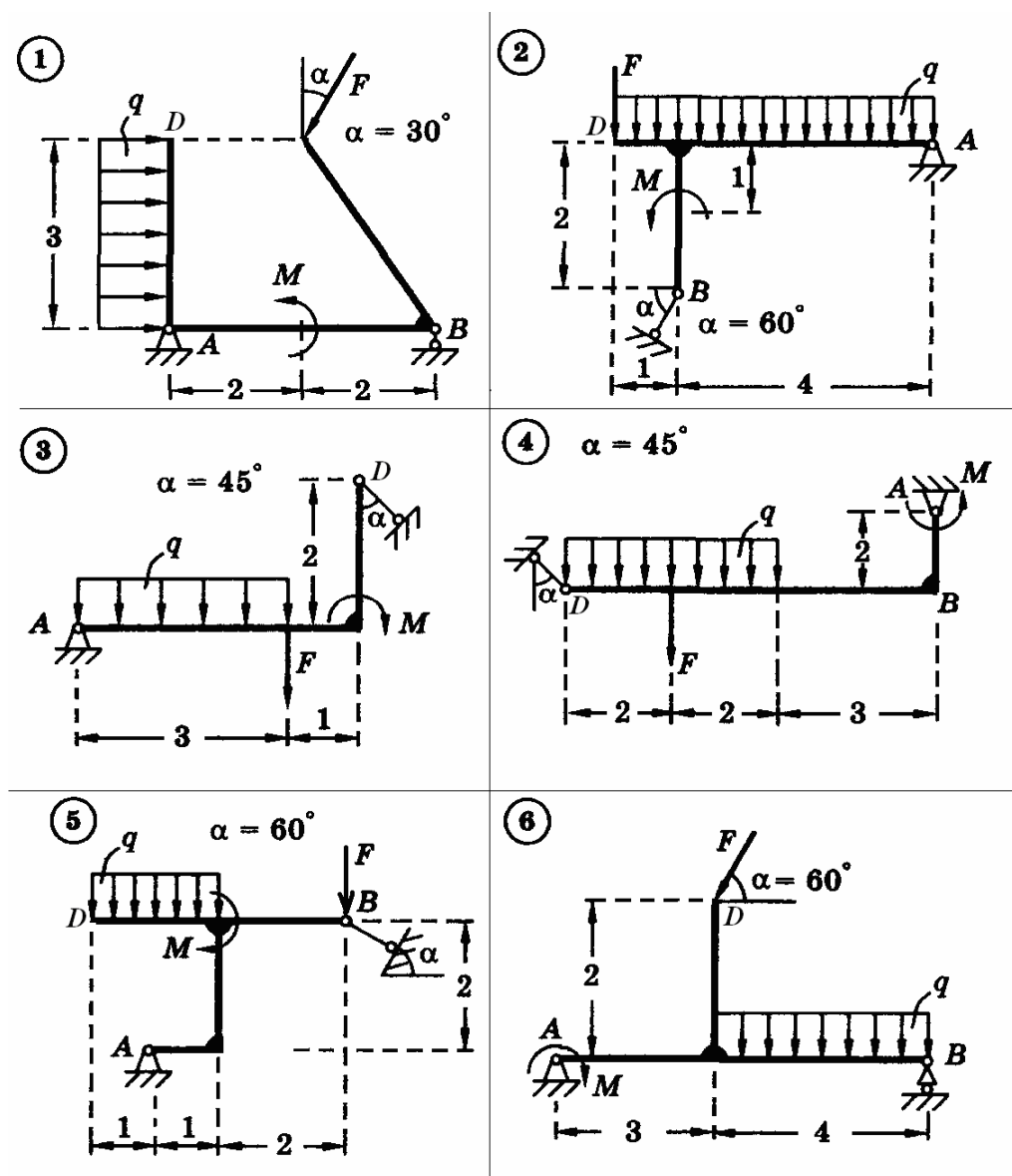


Рис.1,а. Расчетные схемы рам 1÷6.

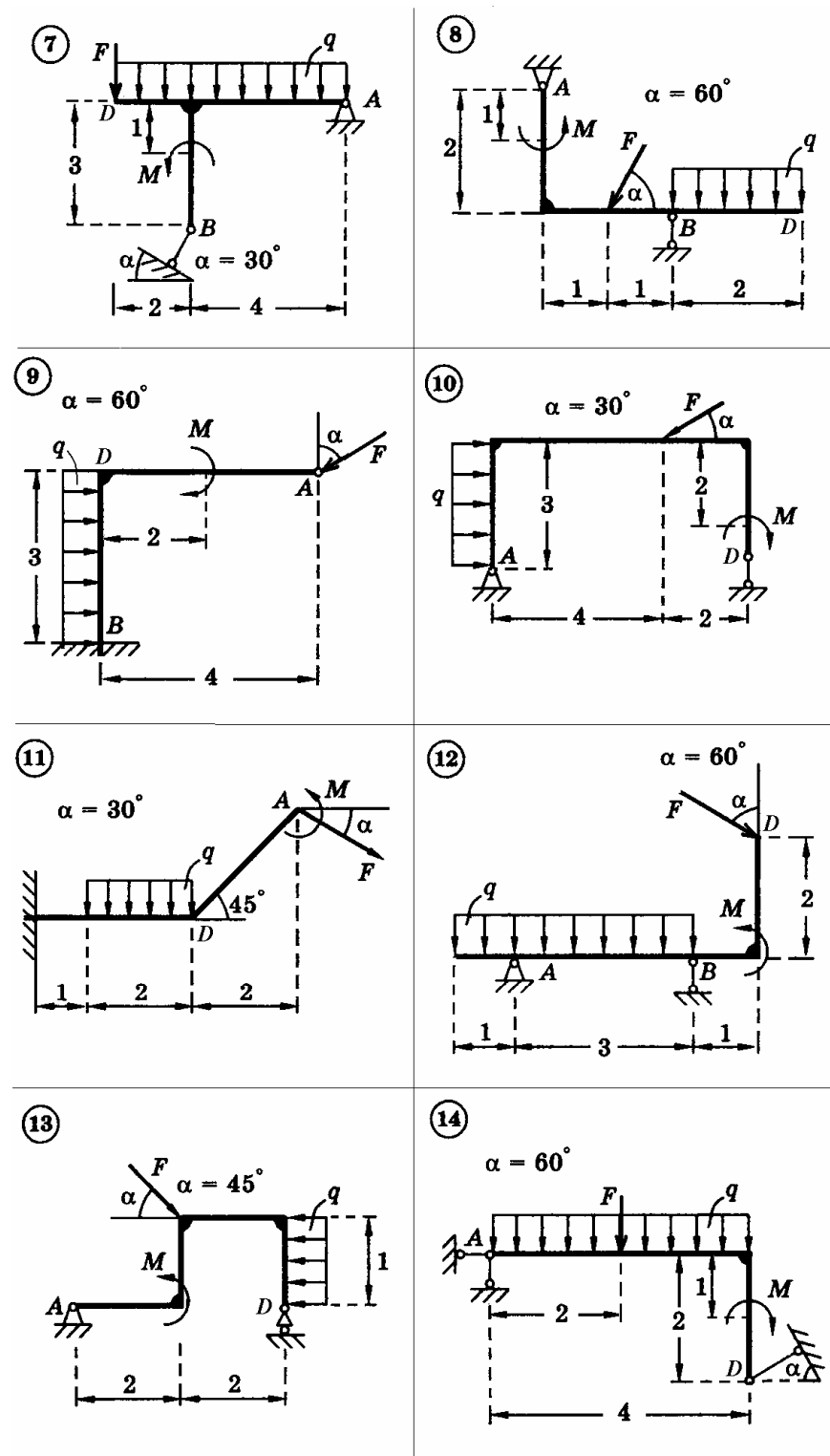


Рис.1,б. Расчетные схемы рам 7÷14.

Три цифры кода студента $n_2n_1n_0$ образуют трехзначное число. Номер расчетной схемы определяется делением числа $n_2n_1n_0$ на 30 с остатком и равен этому остатку. Обозначим номер расчетной схемы символом №, остаток – δ . Пусть результатом деления числа $n_2n_1n_0$ на 30 с остатком будет $30 \cdot k + \delta$, где k – целое число; тогда № = δ .

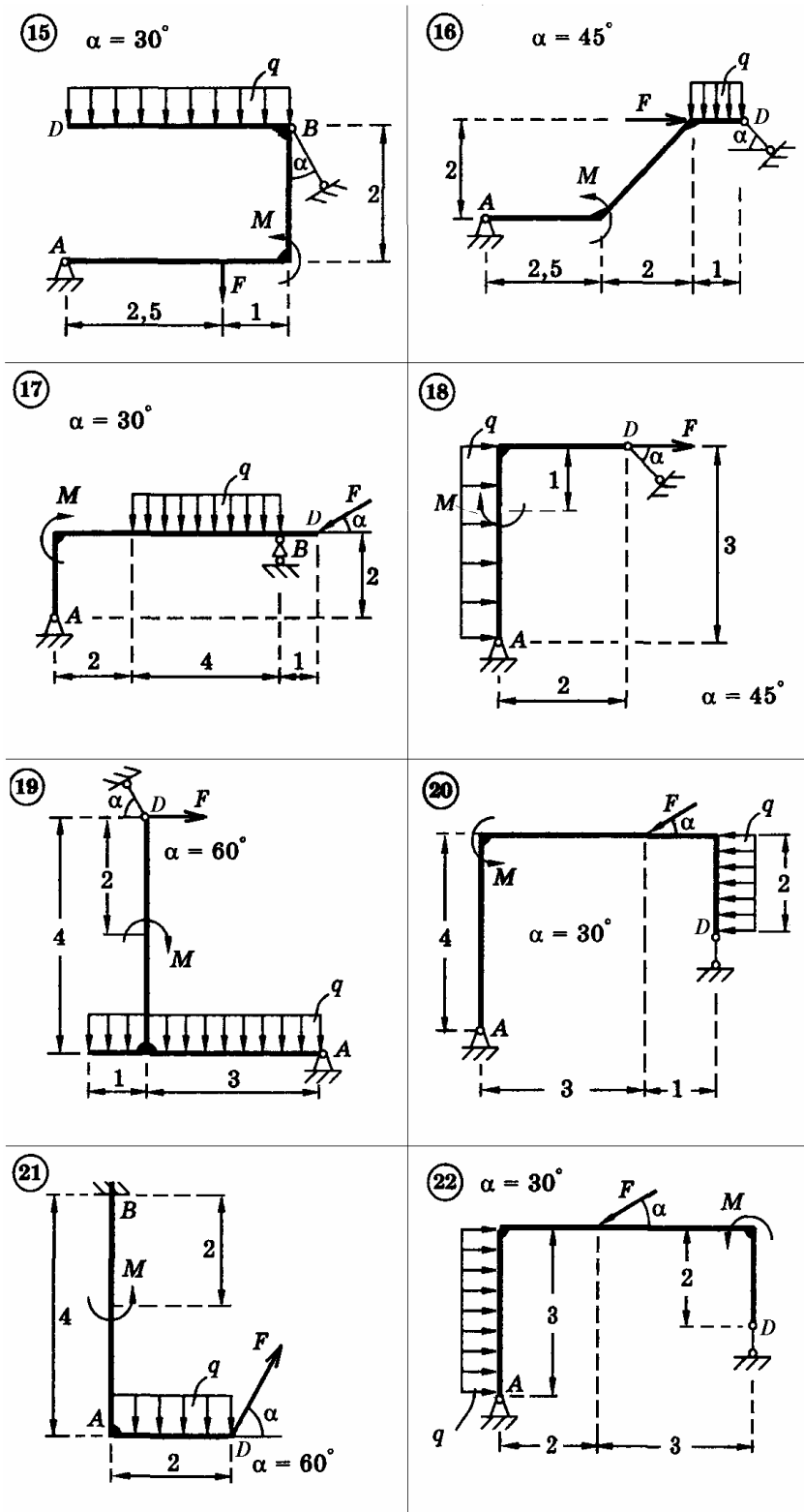


Рис.1,в. Расчетные схемы рам 15÷22.

Например, если $n_2 = 5$, $n_1 = 3$, $n_0 = 9$, то $n_2 n_1 n_0 = 539$; деление числа 539 на 30 с остатком дает: $30 \cdot 17 + 29$, $\delta = 29$ и $N_0 = 29$.

1. **Основные понятия.** Рама – это стержневая конструкция, стержни которой, в основном, жестко соединены между собой. Некоторые стержни

могут соединяться с помощью шарниров. Оси стержней рамы могут пересекаться между собой под произвольными углами.

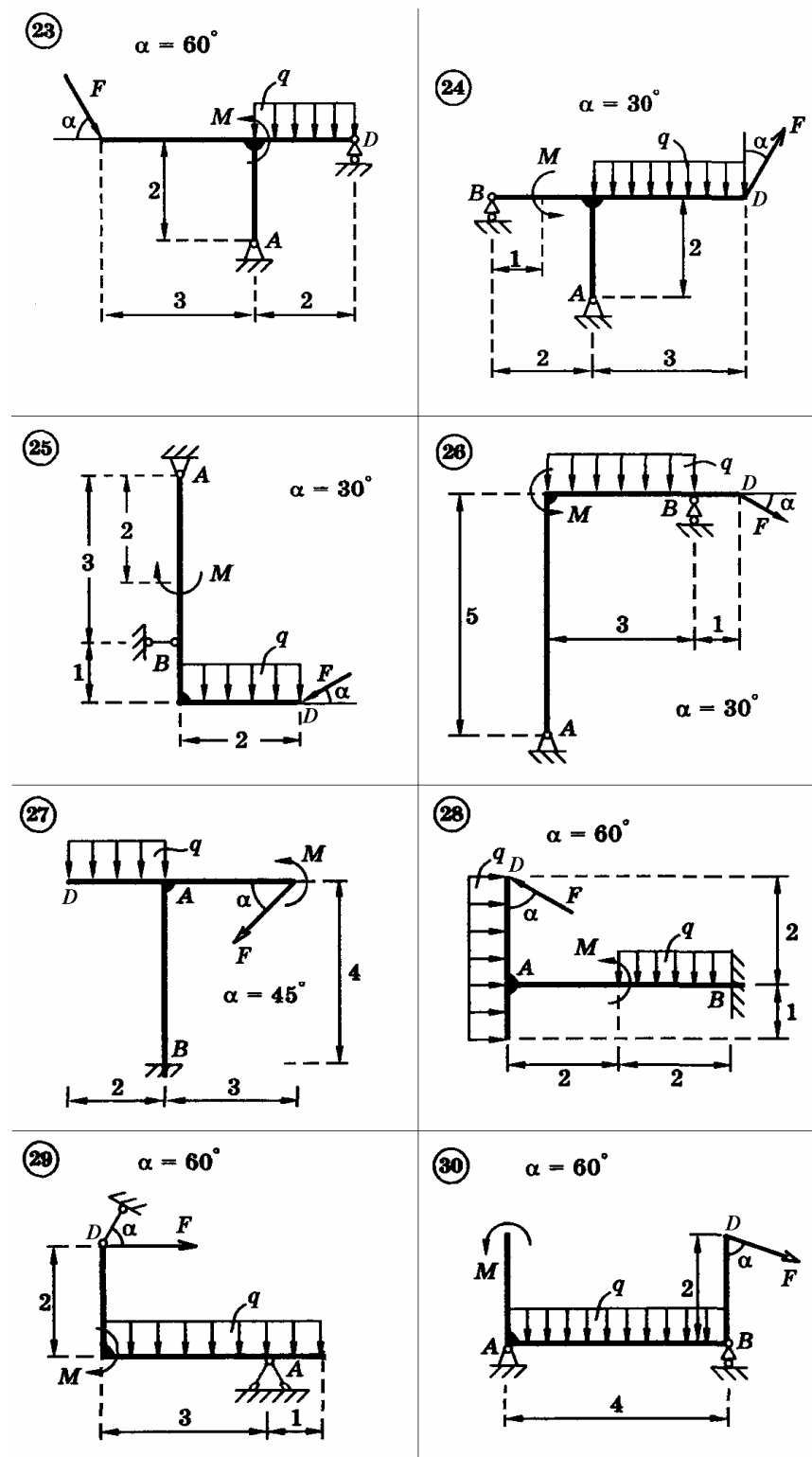


Рис.1,г. Расчетные схемы рам 23÷30.

Плоская рама – такая, оси стержней которой и внешние силы, включая и опорные реакции, лежат в одной плоскости.

В общем случае, в поперечных сечениях стержней плоских рам возникают продольные N и перерезывающие Q силы, а также изгибающие моменты M .

В задании рассматривается случай, когда внешние силы действуют в плоскости рамы.

Силы N , Q и изгибающий момент M будем называть обобщенными силами или силовыми факторами.

Рама называется статически определимой, если опорные реакции и внутренние силы во всех ее стержнях могут быть определены только из уравнений равновесия.

Для придания плоской раме геометрической неизменяемости и неподвижности необходимо закрепить ее на основании с помощью как минимум трех не параллельных и не пересекающихся в одной точке связей. Возникает плоская система сил, для которой можно составить три независимых уравнения равновесия.

Для расчета рамы на прочность и жесткость надо знать распределение силовых факторов N , Q , M по длине стержней, а также деформации стержней рамы.

Методика определения N , Q , M в стержнях рам аналогична методике определения Q , M в балках (см. Задание № 3). Отличие состоит в том, что при использовании метода сечений для определения N , Q , M в стержнях рам необходимо вводить локальные системы координат для каждого стержня и составлять не два, а три уравнения равновесия.

Деформации стержней рамы следует определять двумя способами – по теореме Кастильяно и по формуле Мора.

Теорема **Кастильяно** формулируется следующим образом: если упругое тело находится в равновесии под действием системы статически приложенных внешних сил, то обобщенное перемещение Δ_m произвольной точки тела m по направлению приложенной в этой точке обобщенной силы P_m можно определить как частную производную от потенциальной энергии тела U по этой силе P_m :

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m}. \quad (1)$$

Потенциальная энергия U деформации плоской стержневой системы вычисляется по формуле:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{(I_j)} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} + k_Q \cdot \frac{Q^2}{GA} \right) dz, \quad (2)$$

где M , N , Q – аналитические выражения изгибающих моментов, продольных и перерезывающих сил, обусловленных действием на

стержневую систему заданных сил, а также обобщенной силы P_m , приложенной в точке m по направлению обобщенного перемещения Δ_m ; n – число участков, на которые поделена рама; l_j – длина участка с номером j ; E, G – модули упругости и сдвига; A, J – площадь поперечного сечения и осевой момент инерции сечения j -го стержня; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения стержня на распределение касательных напряжений в поперечном сечении.

Участками называются части стержней, в пределах которых не изменяются ни внешние силы, ни поперечное сечение, ни материал стержней.

Зная, каким образом M, Q и N выражаются через обобщенные силы P_m , можно найти обобщенное перемещение Δ_m дифференцированием правой части формулы (2) под знаком интеграла:

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m} = \sum_{j=1}^n \int_{(l_j)} \left[\frac{M}{EJ_x} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_m} + k_Q \frac{Q}{GA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P_m} \right] dz. \quad (3)$$

Формула (3) – теорема *Кастильяно* для определения перемещений в плоских стержневых системах.

В случае, когда в точке m отсутствует заданная сила P_m , прикладывается фиктивная сила $P_m = 0$, которая исключается из выражений M, N, Q после дифференцирования M, N, Q по P_m .

В практических расчетах рам со стержнями, длина которых превышает наибольший размер поперечного сечения в десять и более раз, влиянием продольных (N) и перерезывающих (Q) сил на перемещения пренебрегают, ввиду малости их вклада в величину перемещений, и перемещения определяют по упрощенной формуле:

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m} = \sum_{j=1}^n \int_{(l_j)} \left[\frac{M}{EJ_x} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} \right] dz. \quad (4)$$

По *Мору* обобщенное перемещение Δ_i произвольной точки i плоской стержневой системы можно определить, используя выражение:

$$\Delta_i = \sum_{m=1}^n \int_{(l_m)} \left[\frac{M_p \bar{M}_i}{EJ_m} + \frac{N_p \bar{N}_i}{EA_m} + k_Q \frac{Q_p \bar{Q}_i}{GA_m} \right] dz, \quad (5)$$

где M_p, N_p, Q_p – эпюры изгибающих моментов, продольных и перерезывающих сил, обусловленных действием на стержневую систему заданных сил; $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ – эпюры изгибающих моментов, продольных и

перерезывающих сил, обусловленных действием на стержневую систему обобщенной единичной силы $\bar{P}_i = 1$, приложенной в i -ой точке по направлению обобщенного перемещения Δ_i ; n – число участков, на которые поделена рама; l_m – длина участка с номером m ; E , G – модули упругости и сдвига; A_m , J_m – площадь поперечного сечения и осевой момент инерции стержня на участке с номером m ; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения стержня на распределение касательных напряжений в поперечном сечении.

Выражение (5) называется *формулой Мора*.

2. Примеры расчетов.

Пример 1. *Определение внутренних усилий N , Q , M в статически определимой раме.* Расчетная схема рамы представлена на рис.2. Для определения усилий используем метод сечений. Для определения знаков усилий назначаем растянутые волокна и отмечаем их пунктирной линией.

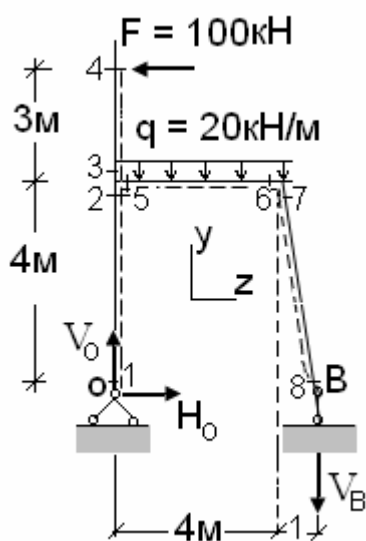
2.1. *Определение опорных реакций.* Обозначаем опорные реакции символами V_O , H_O , V_B . Вводим глобальную систему координат yz . Составляем следующие уравнения равновесия, из решения которых находим опорные реакции:

$$\Sigma F_z = 0: \quad H_O = F = 100 \text{ кН};$$

$$\Sigma m(B) = 0: \quad V_O \cdot 5 - 100 \cdot 7 - 20 \cdot 4 \cdot (2 + 1) = 0; \quad V_O = \frac{700 + 240}{5} = 188 \text{ кН};$$

$$\Sigma m(O) = 0: \quad -V_B \cdot 5 + 100 \cdot 7 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad V_B = \frac{700 - 160}{5} = 108 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \Sigma F_y = 0: \quad 188 - 20 \cdot 4 - 108 = 0.$$



2.2. *Определение внутренних сил в стержнях рамы.* Раму разбиваем на отдельные участки (стержни) и нумеруем их 1-2; 3-4; 5-6; 7-8 таким образом, чтобы в каждом узле имела нумерация примыкающих стержней.

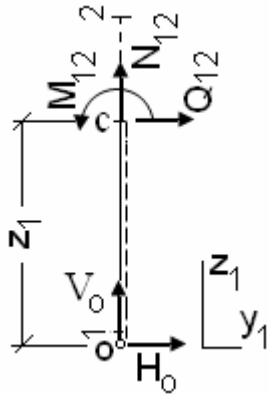
Далее используем локальные системы координат для стержней.

Составляем аналитические выражения для N , Q , M в локальных системах координат. Рассекаем раму по стержню 1-2 и отбрасываем часть рамы выше и правее стержня 1-2. В сечении прикладываем реакции отброшенной части – усилия N_{12} , Q_{12} , M_{12} (см рис.3).

Рис.2. Расчетная схема.

Для определения этих усилий составляем уравнения равновесия выделенной части стержня 1-2, из решения которых находим усилия N_{12} , Q_{12} , M_{12} .

Участок 1 – 2 (рис. 3).



$$\Sigma F_{z1} = 0; \quad N_{12} = -V_0 = -188 \text{ кН};$$

$$\Sigma F_{y1} = 0; \quad Q_{12} = -H_0 = -100 \text{ кН};$$

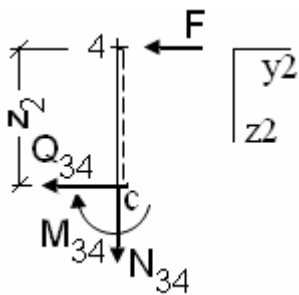
$$\Sigma m(c) = 0; \quad M_{12} = -H_0 \cdot z_1 = -100 \cdot z_1;$$

Изгибающий момент в стержне 1-2 – линейная функция; для построения ее графика достаточно иметь значения M_{12} в двух точках:

$$M_{12}|_{z_1=0} = 0; \quad M_{12}|_{z_1=4} = -400 \text{ кНм}.$$

Рис.3. Стержень 1-2.

Участок 3 – 4 (рис. 4).



$$\Sigma F_{z2} = 0; \quad N_{34} = 0; \quad \Sigma F_{y2} = 0; \quad Q_{34} = -F = -100 \text{ кН};$$

$$\Sigma m(c) = 0; \quad M_{34} = F \cdot z_2 = 100 \cdot z_2;$$

Изгибающий момент в стержне 3-4 – линейная функция; для построения ее графика достаточно иметь значения M_{34} в двух точках:

$$M_{34}|_{z_2=0} = 0; \quad M_{34}|_{z_2=3} = 300 \text{ кНм}.$$

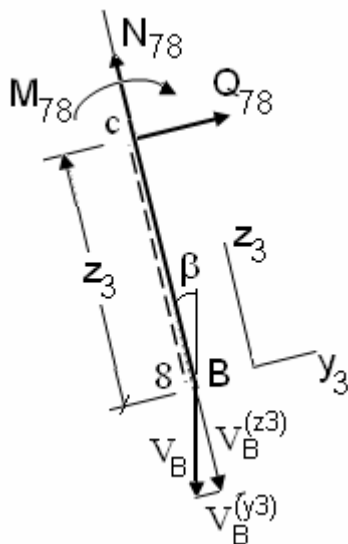
Участок 7 – 8 (рис. 5).

Раскладываем реакцию V_B на две составляющие – $V_B^{(y3)}$ и $V_B^{(z3)}$:

$$V_B^{(y3)} = V_B \sin \beta, \quad V_B^{(z3)} = V_B \cos \beta.$$

Угол β определяется как угол наклона стержня 7-8 к вертикали (см. рис. 2):

$$\beta = \arctg \left(\frac{1}{4} \right) = 0,245 \text{ рад}.$$



$$\Sigma F_{z3} = 0; N_{78} = V_B \cos \beta = 108 \cdot 0,97 = 105 \text{ кН};$$

$$\Sigma F_{y3} = 0; Q_{78} = V_B \sin \beta = 108 \cdot 0,242 = 26,14 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_{(c)} = 0; M_{78} = - V_B \sin \beta \cdot z_3 = - 26,14 \cdot z_3;$$

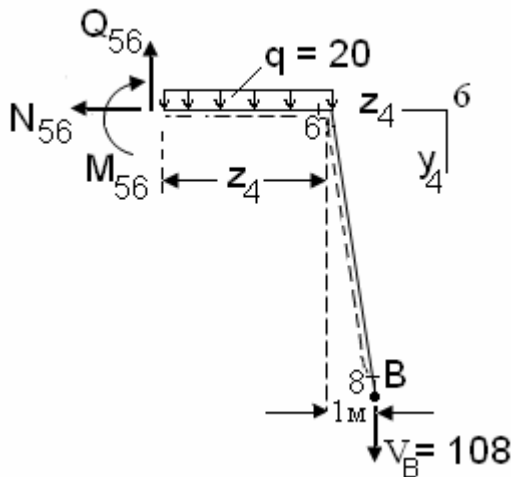
Изгибающий момент в стержне 7-8 – линейная функция; для построения ее графика достаточно иметь значения M_{78} в двух точках:

$$M_{78} \Big|_{z_3 = 0} = 0;$$

$$M_{78} \Big|_{z_3 = \sqrt{17}} = -26,14 \cdot \sqrt{17} = -107,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рис. 5. Стержень 7-8.

Участок 5 – 6 (рис. 6).



Рассекаем раму по стержню 5-6 и отбрасываем левую часть рамы. В сечении прикладываем реакции отброшенной части – усилия N_{56} , Q_{56} , M_{56} (см рис.6).

Для определения этих усилий составляем уравнения равновесия выделенной части рамы, из решения которых находим усилия N_{56} , Q_{56} , M_{56} . Локальную систему координат $y_4 z_4$ выбираем с началом в узле 6.

Рис.6. Стержень 5-6.

$$N_{56} = 0; Q_{56} = V_B + q \cdot z_4 = 108 + 20z_4;$$

$$M_{56} = - V_B \cdot (1 + z_4) - \frac{1}{2} q z_4^2 = - 108 (z_4 + 1) - 10z_4^2.$$

Перерезывающая сила в стержне 5-6 – линейная функция; для построения ее графика достаточно иметь значения Q_{56} в двух точках:

$$Q_{56} \Big|_{z_4 = 0} = 108 \text{ кН}; \quad Q_{56} \Big|_{z_4 = 4} = 108 + 20 \cdot 4 = 188 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент в стержне 5-6 – нелинейная функция; для построения ее графика необходимо иметь не менее трех значений M_{56} в трех точках:

$$M_{56}|_{z_4=0} = -108 \text{ кНм}; M_{56}|_{z_4=2} = -108 \cdot 3 - 10 \cdot 2^2 = -364 \text{ кНм};$$

$$M_{56}|_{z_4=4} = -108 \cdot 5 - 10 \cdot 16 = -540 - 160 = -700 \text{ кНм}.$$

2.3. Построение эпюр внутренних сил (**N**, **Q**, **M**). Используя построенные в п.2.2 аналитические выражения для **N**, **Q**, **M** строим их эпюры по точкам.

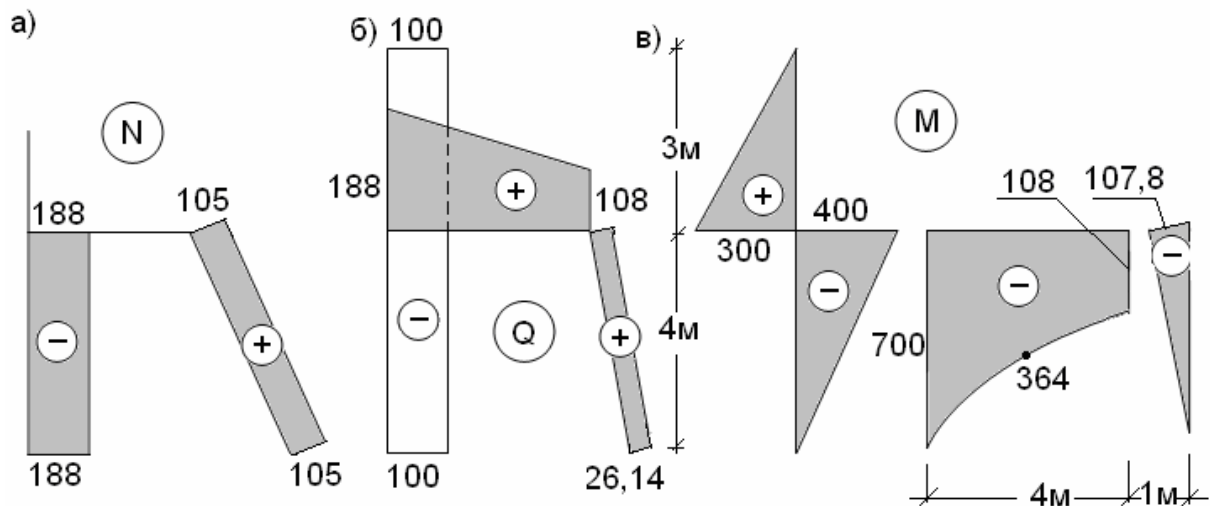


Рис.7. Эпюры внутренних усилий **N**, **Q**, **M**.

2.4. Проверка равновесие узлов. Проверяем равновесие узлов, в которых сходятся стержни 1-2, 3-4 и 3-6, а также стержни 3-6 и 7-8.

На рис.8,а и 8,б показаны силы и изгибающие моменты, действующие в узле, где сходятся стержни 1-2, 3-4 и 3-6; на рис. 8,в и 8,г – силы и изгибающие моменты в узле, где сходятся стержни 3-6 и 7-8. Длины примыкающих к узлам стержней предполагаются бесконечно малой величины.

Силы имеют размерность кН, изгибающие моменты – кНм.

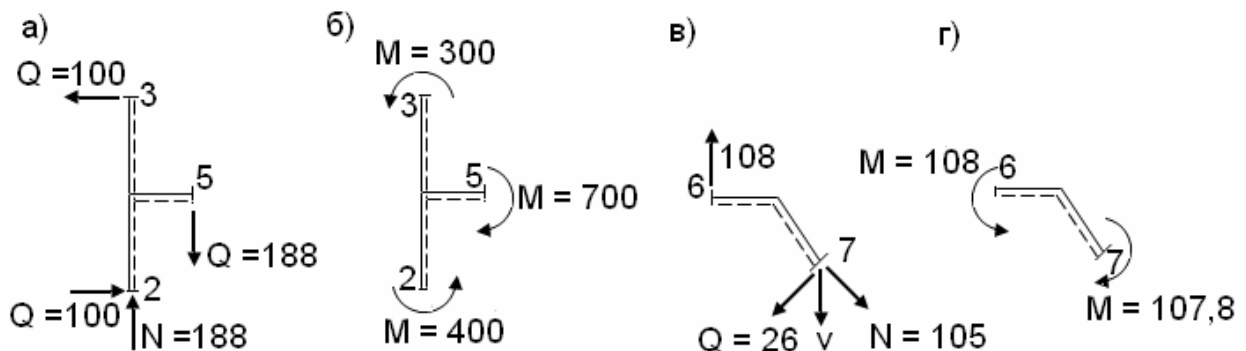


Рис.8. Равновесие узлов.

Равновесие узла, где сходятся стержни 1-2, 3-4 и 3-6, очевидно.

Проверяем равновесие узла, где сходятся стержни 5-6 и 7-8. Проецируем силы, приложенные к этому узлу, на оси уз глобальной системы координат (см. рис.2):

$$\Sigma F_y = 108 - \sqrt{105^2 + 26^2} = 108 - 108,2 = 0,8 \approx 0, \text{ так как невязка составляет менее } 1\% ;$$

$$\Sigma F_z = 26 \cdot \cos \beta - 105 \cdot \sin \beta = 26 \cdot 0,97 - 105 \cdot 0,245 =$$

$$= 25,22 - 25,725 = -0,505 \approx 0, \text{ так как невязка составляет около } 2\% : 0,505/25,22 \approx 2\%.$$

Пример 2. *Определение перемещений в статически определимой раме.*

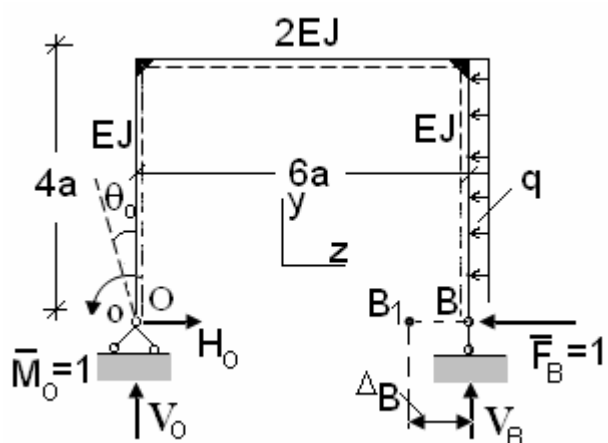


Рис.9. Расчетная схема рамы

На рис.9 представлена расчетная схема статически определимой рамы, вертикальные стержни которой имеют жесткость EJ, а горизонтальный стержень – 2EJ. Левая опора рамы – шарнирно-неподвижная, правая – шарнирно-подвижная. На раму действует равномерно распределенная нагрузка q. Осевой момент инерции $J = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; модуль упругости $E = 30 \text{ ГПа}$, $a = 1 \text{ м}$, $q =$

$$= 10 \text{ кН/м.}$$

Требуется найти горизонтальное перемещение узла B – Δ_B и угол поворота левого вертикального стержня в узле O – θ_0 .

2.5. *Определение перемещений по формуле Мора.* В точке B прикладываем единичную обобщенную силу $\bar{F}_B = 1$, в точке O – $\bar{M}_O = 1$. По упрощенной формуле Мора перемещение узла – Δ_B и угол поворота – θ_0 определяются выражениями:

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^3 \int_{(l_k)} \frac{M_p \bar{M}_1^{(B)}}{EJ_k} dz, \quad (6)$$

$$\theta_0 = \sum_{k=1}^3 \int_{(l_k)} \frac{M_p \bar{M}_1^{(o)}}{EJ_k} dz, \quad (7)$$

где $\bar{M}_1^{(B)}$, $\bar{M}_1^{(o)}$ – эпюры изгибающих моментов от единичных обобщенных сил $\bar{F}_B = 1$, $\bar{M}_O = 1$; M_p – эпюра изгибающих моментов от заданных внешних сил.

Построим эпюры M_p , $\bar{M}_1^{(B)}$, $\bar{M}_1^{(o)}$.

2.5.1. Определяем опорные реакции как от заданных внешних сил, так и от единичных обобщенных сил $\bar{F}_B = 1$, $\bar{M}_O = 1$:

$$\Sigma F_z = 0: \quad H_O = q \cdot 4a + \bar{F}_B;$$

$$\Sigma m_{(o)} = 0: \quad \bar{M}_O + V_B \cdot 6a + q \cdot 4a \cdot 2a = 0, \quad V_B = -(\bar{M}_O + 8qa^2)/6a;$$

$$\Sigma m_{(B)} = 0: \quad \bar{M}_O + q \cdot 4a \cdot 2a - V_O \cdot 6a = 0, \quad V_O = (\bar{M}_O + 8qa^2)/6a.$$

2.5.2. Определяем опорные реакции отдельно для каждой системы сил:
– действие заданных внешних сил q :

$$H_O = 4qa, \quad V_O = \frac{4}{3}qa, \quad V_B = -\frac{4}{3}qa;$$

– действие единичной обобщенной силы $\bar{F}_B = 1$:

$$H'_O = \bar{F}_B = 1, \quad V'_O = 0, \quad V'_B = 0;$$

– действие единичной обобщенной силы $\bar{M}_O = 1$:

$$H''_O = 0, \quad V''_O = \frac{1}{6}\bar{M}_O/a = 1/6a, \quad V''_B = -1/6a.$$

Эпюры M_p , $\bar{M}_1^{(B)}$, $\bar{M}_1^{(o)}$ представлены на рис. 10, 11, 12.

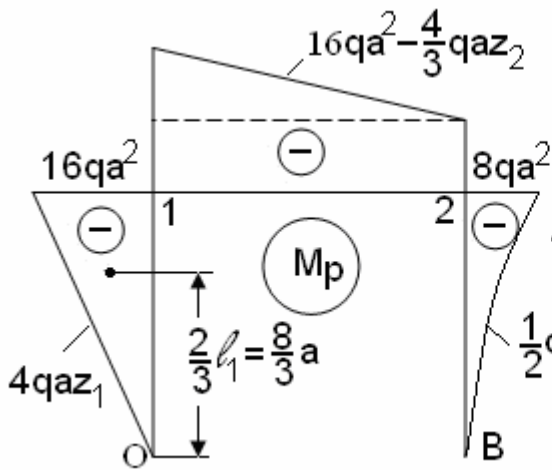


Рис.10. Эпюра M_p .

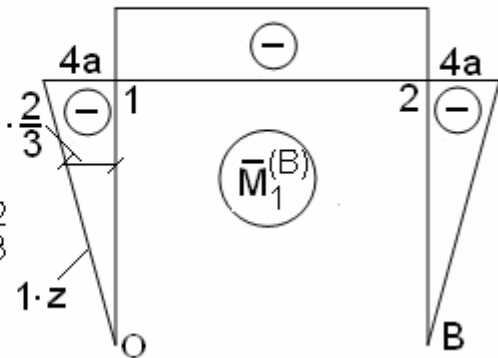


Рис. 11. Эпюра $M_1^{(B)}$.

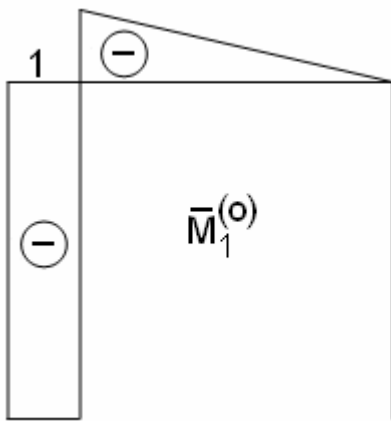


Рис. 12. Эпюра $M_1^{(O)}$.

2.5.3. *Определение перемещений.* Горизонтальное перемещение узла В – Δ_B и угол поворота левого вертикального стержня в узле о – θ_o определяем по формулам Мора (6), (7). Вычисляем интегралы, входящие в формулы Мора (6), (7), по правилу Верещагина. Длины стержней о-1, 1-2, 2-В обозначаем l_1 , l_2 , l_3 соответственно.

2.5.4. *Горизонтальное перемещение узла В:*

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^3 \int_{(l_k)} \frac{M_p \bar{M}_1^{(B)}}{EJ_k} dz.$$

Вычисляем интегралы по участкам, используя способ Верещагина (см. Приложение 12):

$$\int_{(l_1)} = \int_0^{4a} \frac{M_p \bar{M}_1^{(B)}}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 4a \cdot 16qa^2 \cdot \frac{8a}{3} = \frac{256qa^4}{3EJ};$$

$$\int_{(l_2)} = \int_0^{6a} \frac{M_p \bar{M}_1^{(B)}}{2EJ} ds = \frac{16+8}{2} qa^2 \cdot 6a \cdot 4a = \frac{144 qa^4}{EJ};$$

$$\int_{(l_3)} = \int_0^{4a} \frac{M_p \bar{M}_1^{(B)}}{EJ} ds = \frac{1}{3EJ} \cdot 8qa^2 \cdot 4a \cdot 4a \cdot \frac{3}{4} = \frac{32 qa^4}{EJ};$$

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^3 \int_{(l_k)} \frac{M_p \bar{M}_1^{(B)}}{EJ_k} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{256}{3} + 144 + 32 \right] qa^4 = \frac{784}{3} \frac{qa^4}{EJ}. \quad (8)$$

$$\Delta_B = \frac{784 qa^4}{3EJ} = \frac{784 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1}{3 \cdot 30 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,174 \text{ м.}$$

2.5.5. Угол поворота θ_0 стержня в узле O :

$$\theta_0 = \sum_{k=1}^3 \int_{(l_k)} \frac{M_p \bar{M}_1^{(o)}}{EJ_k} dz;$$

$$\theta_0 = \sum_{k=1}^3 \int_{(l_k)} \frac{M_p \bar{M}_1^{(o)}}{EJ_k} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{16}{2} qa^2 \cdot 4a \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 8qa^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 8qa^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ} [32 + 8 + 12] qa^3 = \frac{52 qa^3}{EJ}. \quad (9)$$

$$\theta_0 = \frac{52 qa^3}{EJ} = \frac{52 \cdot 10^3 \cdot 1}{30 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,347 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

2.6. Определение перемещений статически определимой рамы с помощью теоремы Кастильяно. Расчетная схема статически определимой рамы представлена на рис. 9.

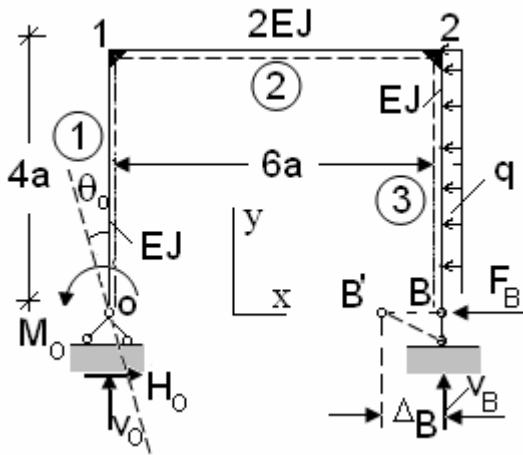
Требуется найти горизонтальное перемещение Δ_B узла B и угол поворота θ_0 левого вертикального стержня в узле o.

Определение перемещений Δ_B , θ_0 другим способом (по теореме Кастильяно) служит проверкой правильности найденных Δ_B , θ_0 по формуле Мора.

Пометим стержни рамы цифрами 1, 2, 3 в кружочках, как показано на рис. 13.

По теореме Кастильяно обобщенное перемещение Δ_j в направлении действия обобщенной силы P_j , приложенной в точке j , определяется частной производной от потенциальной энергии системы U по обобщенной силе P_j :

$$\Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}, \quad (10)$$



где обобщенная сила P_j и обобщенное перемещение Δ_j в данном случае определяются формулами:

$$P_j = \begin{cases} F_B = 0; \\ M_O = 0, \end{cases} \quad \Delta_j = \begin{cases} \Delta_B; \\ \theta_0. \end{cases} \quad (11)$$

Рис.13. Расчетная схема.

На опоре O приложим момент $M_O = 0$, на опоре B – горизонтальную силу $F_B = 0$. Определим опорные реакции:

$$\sum F_x = 0; \quad H_O = 4qa + F_B;$$

$$\sum m(B) = 0: \quad V_O \cdot 6a - M_O - 4qa \cdot 2a = 0, \quad V_O = \frac{M_O}{6a} + \frac{4}{3}qa;$$

$$\sum F_y = 0: \quad V_O + V_B = 0, \quad V_B = -V_O = -\frac{M_O}{6a} - \frac{4}{3}qa.$$

Составляем выражение для потенциальной энергии (без учета влияния продольных и поперечных сил):

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dz}{2EJ} = \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} \frac{M_k^2 dz}{2EJ}.$$

Участок 0 – 1 (стержень 1; рис.14):

$$M_1(z_1) = -M_0 - H_0 \cdot z_1 = -M_0 - (4qa + F_B) \cdot z_1.$$

Участок 1 – 2 (стержень 2; рис.15):

$$M_2(z_2) = V_0 \cdot z_2 - M_0 - H_0 \cdot 4a = \left(\frac{M_0}{6a} + \frac{4}{3}qa \right) z_2 - M_0 - (4qa + F_B) \cdot 4a.$$

Участок В – 2 (стержень 3; рис.16):

$$M_3(z_3) = -\frac{1}{2} qz_3^2 - F_B z_3.$$

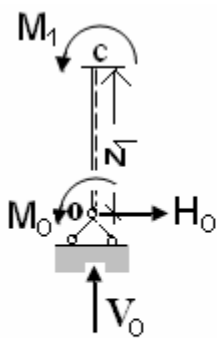


Рис.14.

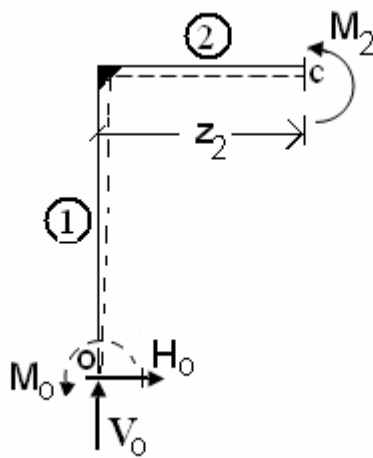


Рис. 15.

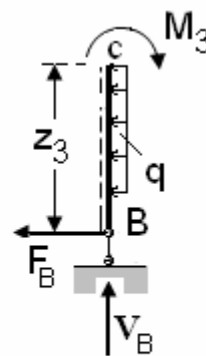


Рис. 16.

Вычисляем горизонтальное перемещение Δ_B узла В по формуле (4):

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{\partial U}{\partial F_B} = \int_0^l \frac{M_1}{EJ} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial F_B} dz + \int_0^l \frac{M_2}{2EJ} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial F_B} dz + \int_0^l \frac{M_3}{EJ} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial F_B} dz = \\ &= \int_0^l \frac{4a - 4qa z_1}{EJ} \cdot (-z_1) dz + \int_0^l \frac{6a \frac{4}{3} qa z_2 - 16qa^2}{2EJ} \cdot (-4a) dz + \\ &+ \int_0^l \frac{4a - \frac{1}{2} qz_3^2}{EJ} \cdot (-z_3) dz = \frac{4qa}{EJ} \int_0^l z_1^2 dz - \frac{8}{3} \frac{qa^2}{EJ} \int_0^l z_2 dz + \frac{32qa^3}{EJ} \int_0^l dz + \\ &+ \frac{q}{2EJ} \int_0^l z_3^3 dz = \frac{4qa}{3EJ} (4a)^3 - \frac{4}{3} \frac{qa^2}{EJ} (6a)^2 + \frac{32qa^3}{EJ} 6a + \end{aligned}$$

$$+ \frac{q}{8EJ} (4a)^4 = \frac{256 qa^4}{3EJ} - \frac{144 qa^4}{3EJ} + \frac{192 qa^4}{EJ} + \frac{256 qa^4}{8EJ} = \frac{784 qa^4}{3 EJ}. \quad (12)$$

Вычисляем угол поворота θ_0 левого вертикального стержня в узле O по формуле (4):

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_0^{l_1} \frac{M_1}{EJ} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial M_0} dz + \int_0^{l_2} \frac{M_2}{2EJ} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M_0} dz + \int_0^{l_3} \frac{M_3}{EJ} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial M_0} dz = \\ &= \int_0^{4a} \frac{-4qa z_1}{EJ} \cdot (-1) dz + \int_0^{6a} \frac{\frac{4}{3} qa z_2 - 16qa^2}{2EJ} \cdot \left(\frac{z_2}{6a} - 1\right) dz + 0 = \\ &= \frac{4qa}{EJ} \cdot \frac{z_1^2}{2} \Big|_0^{4a} + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{4}{3} qa \cdot \frac{1}{6a} \frac{z_2^3}{3} \Big|_0^{6a} - \frac{16qa^2}{6a} \cdot \frac{z_2^2}{2} \Big|_0^{6a} - \frac{4}{3} qa \cdot \frac{z_2^2}{2} \Big|_0^{6a} + \right. \\ &\left. + 16qa^2 z_2 \Big|_0^{6a} \right] = \frac{32}{EJ} qa^3 + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{4 \cdot 216}{3 \cdot 6 \cdot 3} qa^3 - \frac{4}{3} qa^3 \cdot 36 - \frac{72}{3} qa^3 + 96 qa^3 \right] = \\ &= \frac{qa^3}{EJ} (32 + 8 - 24 - 12 + 48) = \frac{52qa^3}{EJ}. \quad (13) \end{aligned}$$

Вычисленные по теореме Кастильяно значения перемещений Δ_B , θ_0 (формулы (12), (13)) совпадают с вычисленными значениями по формуле Мора (формулы (8), (9)), следовательно, эти значения правильные.

2.7. Построение эпюры деформированного состояния рамы.

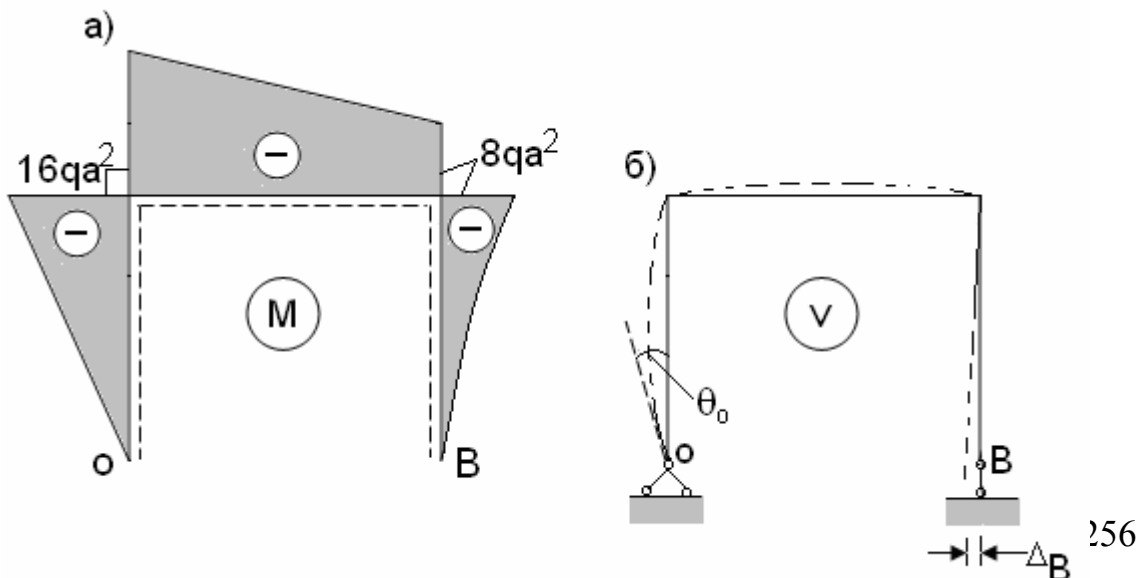


Рис.17. Эпюры изгибающих моментов (а) и прогибов рамы (б).

По выражениям изгибающих моментов $M_1(z_1) = -4qa \cdot z_1$, $M_2(z_2) = \frac{4}{3}qa z_2 - 16qa^2$, $M_3(z_3) = -\frac{1}{2}qz_3^2$, действующих в стержнях 1, 2, 3, на рис.17,а построена эпюра изгибающих моментов в раме (учтено, что $M_0 = 0$, $F_B = 0$).

На рис.17,б, с использованием вида и знаков эпюры изгибающих моментов на рис.17,а, качественно построена эпюра деформированного состояния рамы (эпюра прогибов стержней v).

Таким образом, определять перемещения и углы поворота сечений стержней плоских статически определимых рам можно как по формуле Мора, так и по теореме Кастильяно. Методики определения перемещений и углов поворота сечений стержней плоских статически определимых рам как по формуле Мора, так и по теореме Кастильяно включают ряд одних и тех же процедур, объем вычислений приблизительно одинаковый.

Расчеты закончены.

Задание № 13. Расчеты плоских статически неопределимых рам

1. **Формулировка задания.** Для рам, расчетные схемы которых представлены на рис.1,а,б,в,г, требуется построить эпюры изгибающих моментов (M), продольных (N) и перерезывающих (Q) сил, а также произвести статическую и кинематическую проверки правильности решения.

Нагрузка на рамы: $F = 10$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 5$ кН/м. Размеры указаны в метрах.

Номер расчетной схемы выбирается по коду из трех цифр $n_2n_1n_0$, выданному преподавателем; n_2 , n_1 , n_0 – три цифры кода студента: n_2 – первая слева цифра, n_1 – вторая слева цифра, n_0 – последняя цифра кода.

Три цифры кода студента $n_2n_1n_0$ образуют трехзначное число. Номер расчетной схемы определяется делением числа $n_2n_1n_0$ на 30 с остатком и равен этому остатку. Обозначим номер расчетной схемы символом №, остаток – δ . Пусть результатом деления числа $n_2n_1n_0$ на 30 с остатком будет $30 \cdot k + \delta$, где k – целое число; тогда № = δ .

Например, если $n_2 = 5$, $n_1 = 3$, $n_0 = 9$, то $n_2n_1n_0 = 539$; деление числа 539 на 30 с остатком дает: $30 \cdot 17 + 29$, $\delta = 29$ и № = 29.

2. **Основные понятия.** Рама – это стержневая конструкция, стержни которой, в основном, жестко соединены между собой. Некоторые стержни могут соединяться с помощью шарниров. Оси стержней рамы могут пересекаться между собой под произвольными углами.

Плоская рама – такая, оси стержней которой и внешние силы, включая и опорные реакции, лежат в одной плоскости.

В общем случае, в поперечных сечениях стержней плоских рам возникают изгибающие моменты M , продольные N и перерезывающие Q силы. В задании рассматривается случай, когда внешние силы действуют в плоскости рамы.

Для расчета рамы на прочность и жесткость надо знать распределение силовых факторов N , Q , M по длине стержней, а также деформации стержней рамы.

Зная распределение N , Q , M по длине стержней можно выполнить расчеты их на прочность.

Силы N , Q и изгибающий момент M будем называть обобщенными силами или силовыми факторами.

Для придания плоской раме геометрической неизменяемости и неподвижности необходимо закрепить ее на “основании” с помощью как минимум трех не параллельных и не пересекающихся в одной точке стержневых связей. Возникает плоская система сил, для которой можно составить три независимых уравнения равновесия.

Эти три связи являются необходимыми и достаточными, а все другие связи, сверх необходимых, соединяющие систему с “основанием”, являются как бы лишними. Если система соединена с “основанием” только необходимыми связями, то реакции в 3-х необходимых связях могут быть

определены с помощью 3-х уравнений равновесия, которые можно составить для плоской системы сил.

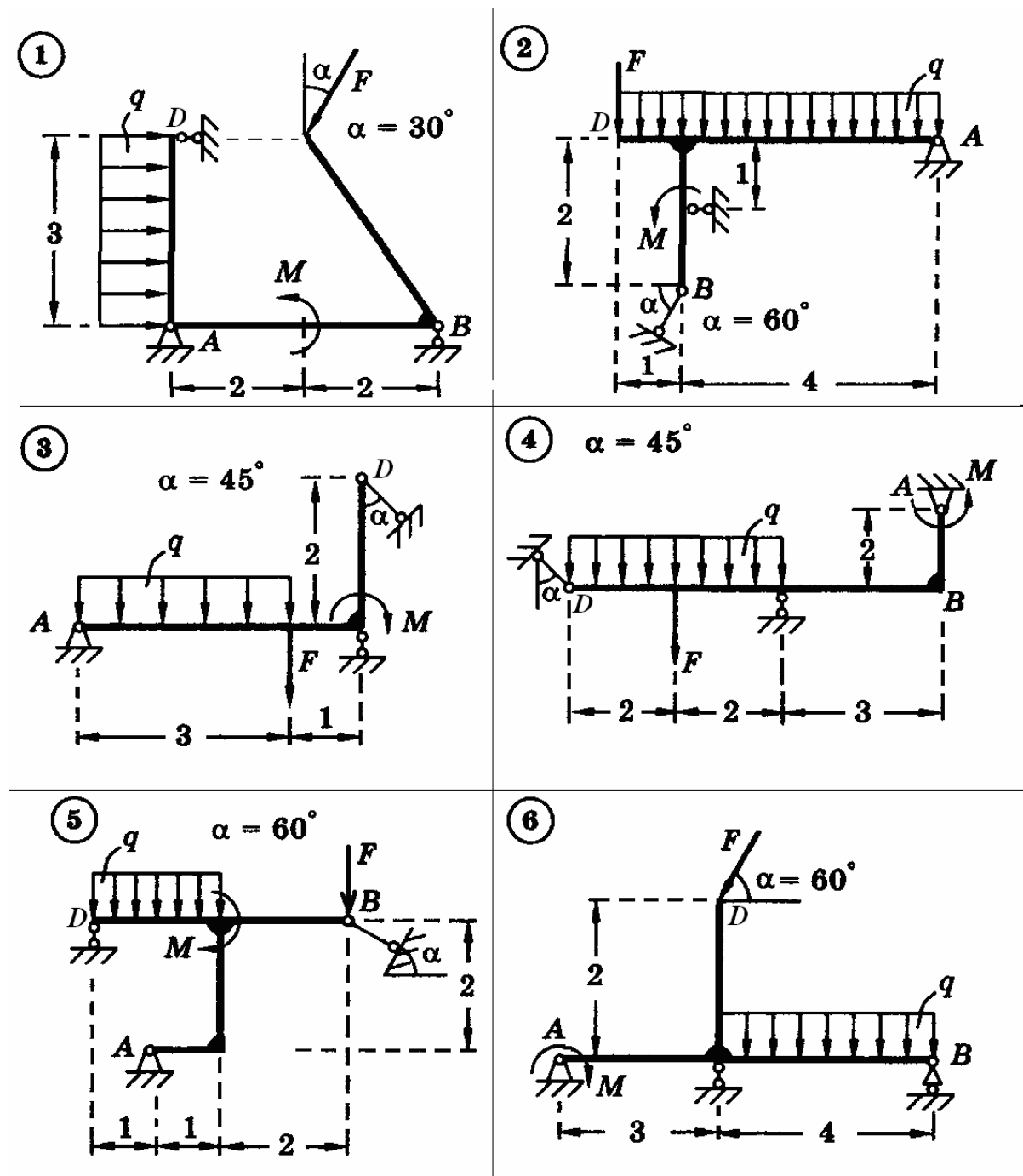


Рис.1,а. Расчетные схемы 1÷6.

Если, кроме того, и внутренние усилия в системе могут быть определены только из уравнений равновесия, то система называется *статически определимой*.

Если же реакции в опорных связях или какие-либо внутренние усилия в системе не могут быть определены только из уравнений равновесия, то система называется *статически неопределимой*.

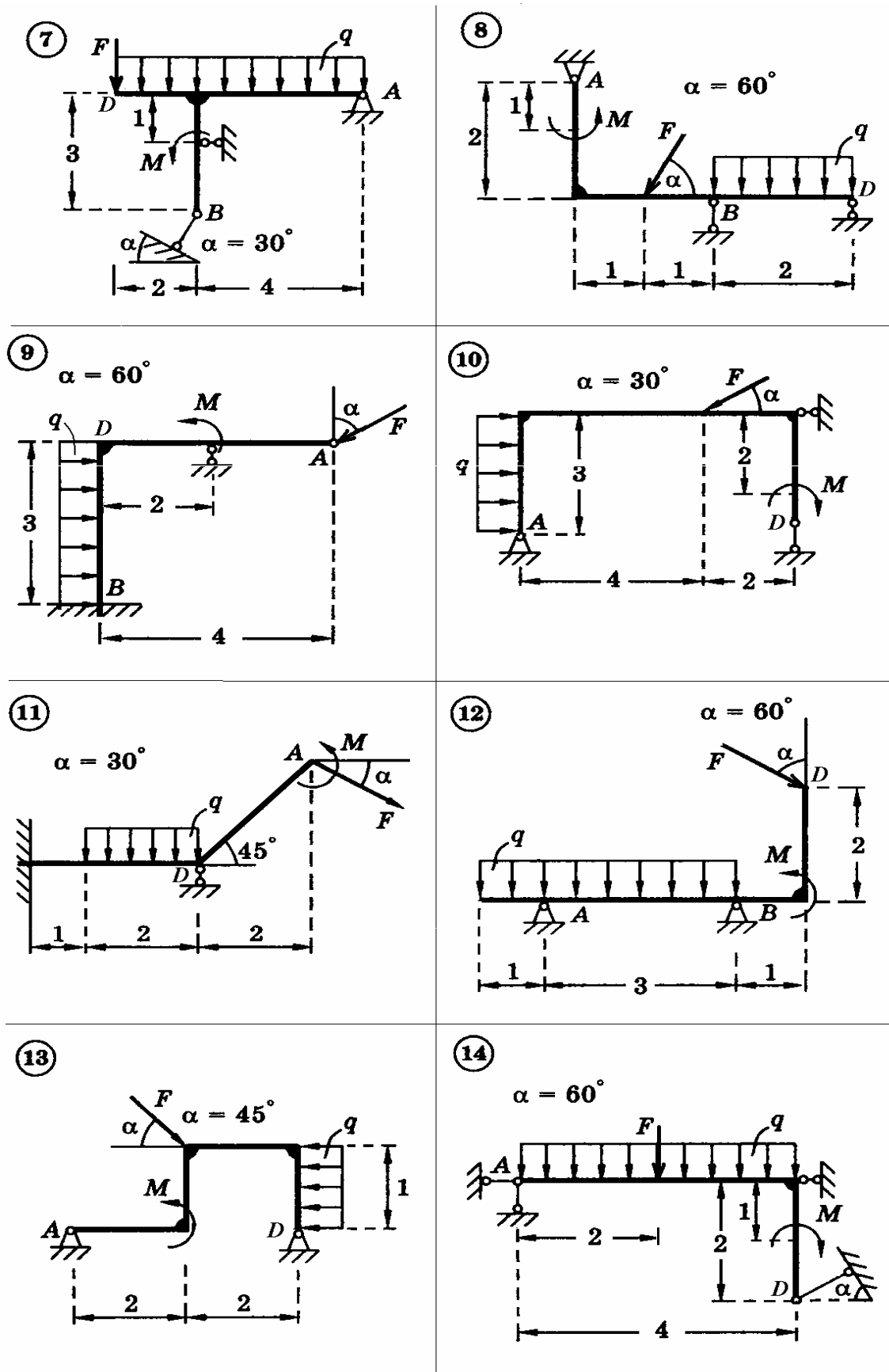


Рис.1,б. Расчетные схемы 7÷14.

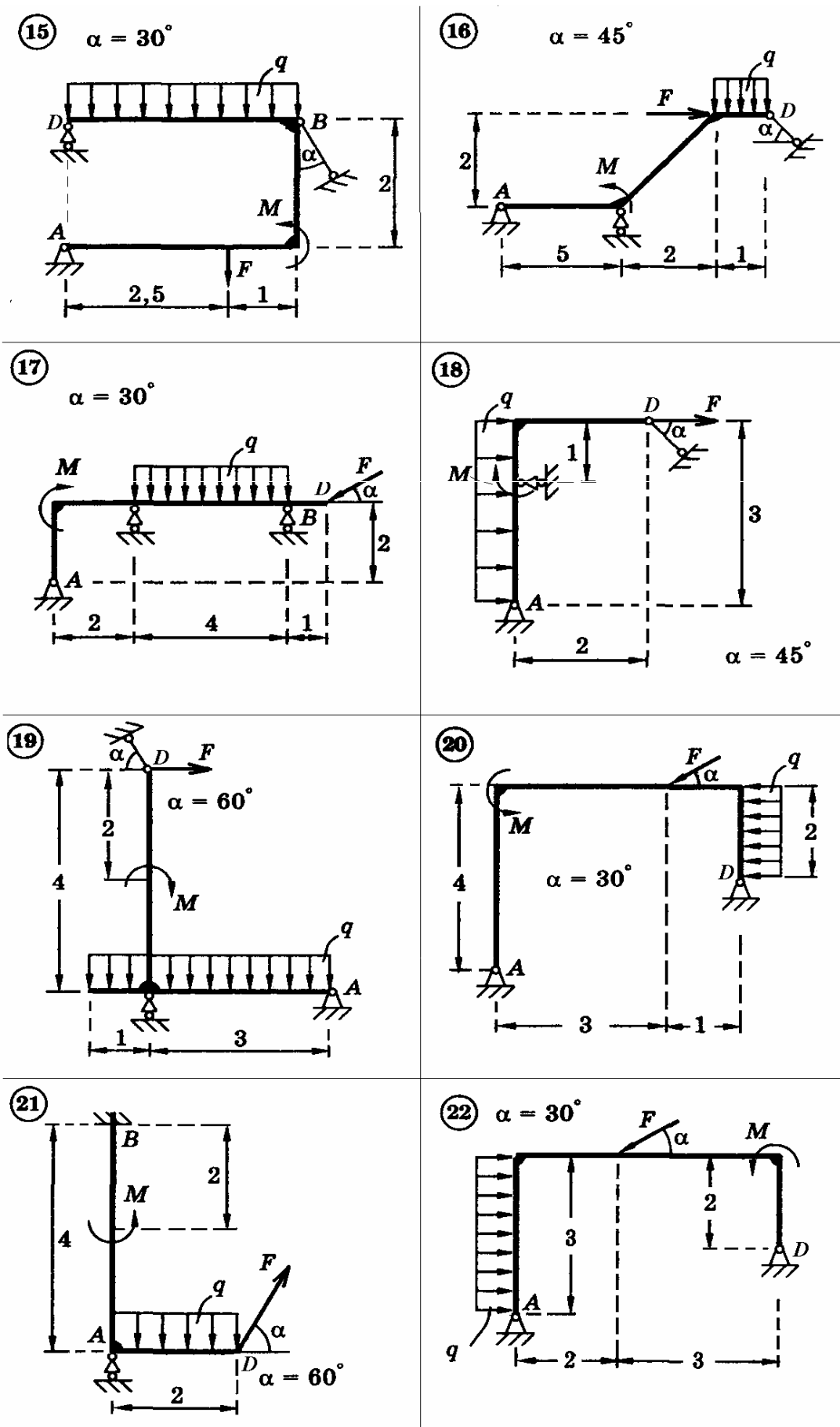


Рис.1,в. Расчетные схемы 15÷22.

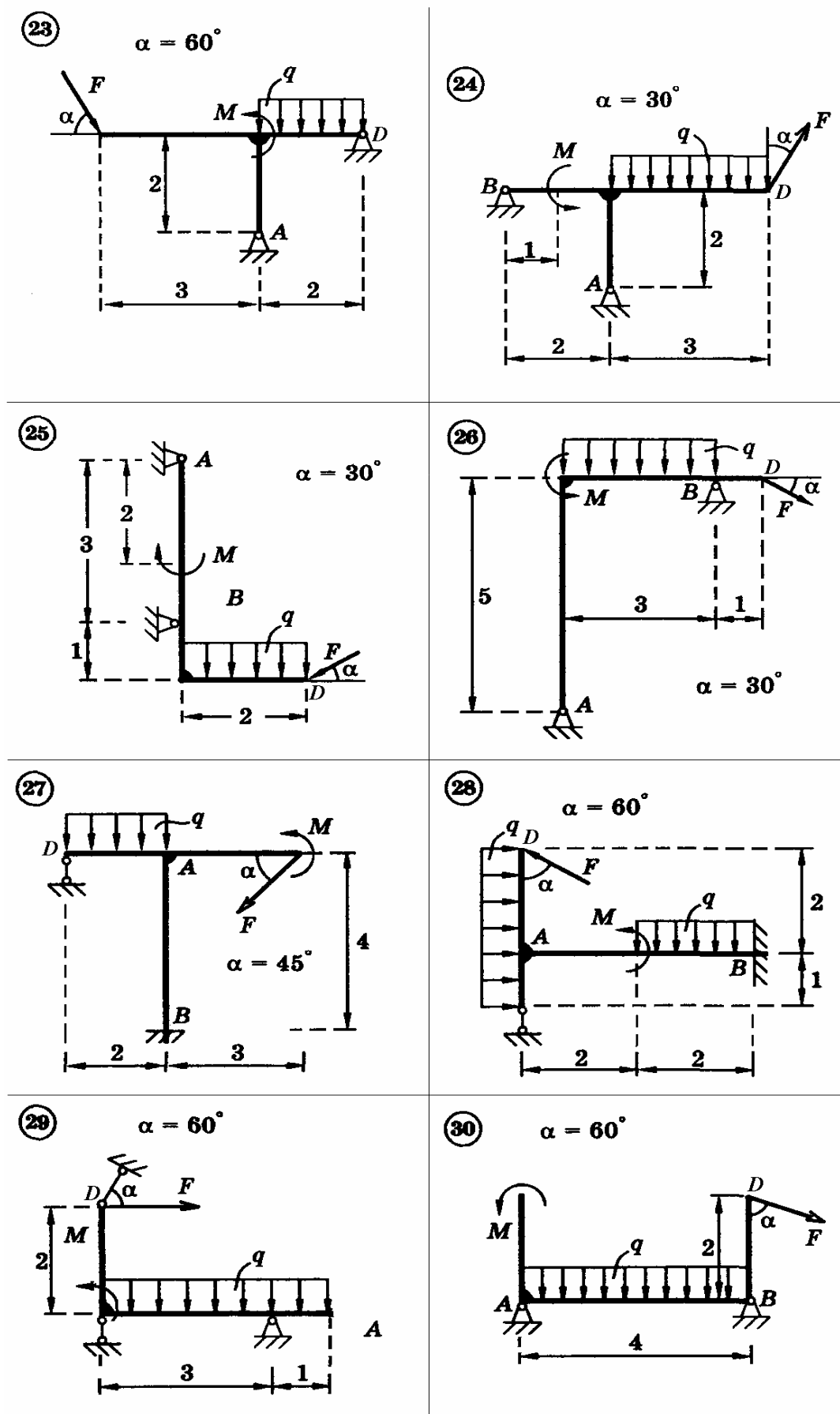


Рис.1,г. Расчетные схемы 23÷30.

Системы могут быть внешне и внутренне статически неопределимыми.

Если внутренние усилия в статически неопределимой системе могут быть определены только из уравнений равновесия, то система называется *внешне статически неопределимой*.

Если же реакции в опорных связях статически неопределимой системы могут быть определены из уравнений равновесия, а внутренние усилия не могут быть определены из уравнений равновесия, то система называется *внутренне статически неопределимой*.

Отличие внешне статически неопределимых систем от внутренне статически неопределимых систем разъяснено в Задании № 11 “Расчеты статически неопределимых балок”.

В Задании № 13 “Расчеты плоских статически неопределимых рам” рассматриваются *внешне статически неопределимые системы*, то есть такие системы, в которых реакции в опорных связях не могут быть определены только из уравнений равновесия, но внутренние усилия после определения опорных реакций могут быть определены только из уравнений равновесия.

3. Методы расчета статически неопределимых рам. Число “лишних” опорных связей определяет степень статической неопределимости *внешне статически неопределимых* рам.

В случае небольшого числа “лишних” опорных связей для их определения можно воспользоваться теоремой Кастильяно.

В общем случае применяют методы строительной механики, например, метод сил.

3.1. Метод сил для расчета статически неопределимых рам.

В этом методе за “лишние” неизвестные принимают обобщенные силы, поэтому метод называется *методом сил*. Для внешне статически неопределимой системы за “лишние” неизвестные принимают реакции в “лишних” связях.

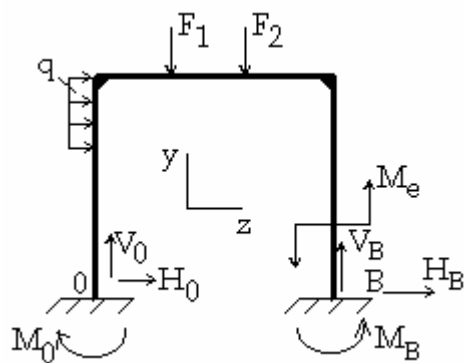


Рис.2. Исходная расчетная схема.

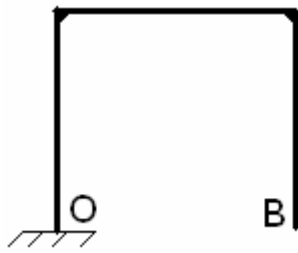
Для расчета надо рассмотреть деформации рамы и составить столько уравнений совместности перемещений, какова степень статической неопределимости.

Покажем на примере, как раскрывается статическая неопределимость методом сил.

На рис.2 представлена трижды статически неопределимая рама, нагруженная обобщенной силой $P = \{q, F_1, F_2, M_e\}$.

Найдем выражения опорных реакций $V_0, H_0, M_0, V_B, H_B, M_B$.

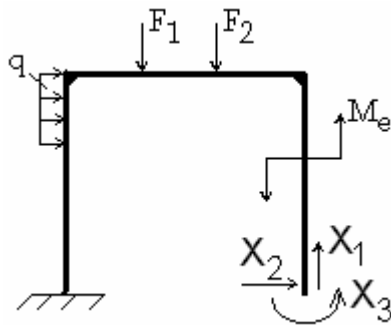
Будем считать “лишними” связи на опоре B. Эти связи препятствуют перемещениям сечения рамы по направлению осей y, z прямоугольной системы координат и повороту сечения рамы относительно оси, перпендикулярной к плоскости рамы.



Отбрасываем "лишние" связи рамы и прикладываем неизвестные реакции – "лишние" неизвестные $X_1 = V_B$, $X_2 = H_B$, $X_3 = M_B$ по направлениям отброшенных связей. Эта процедура приводит к выбору *основной системы* (рис.3). Основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой,

Рис.3. Основная система.

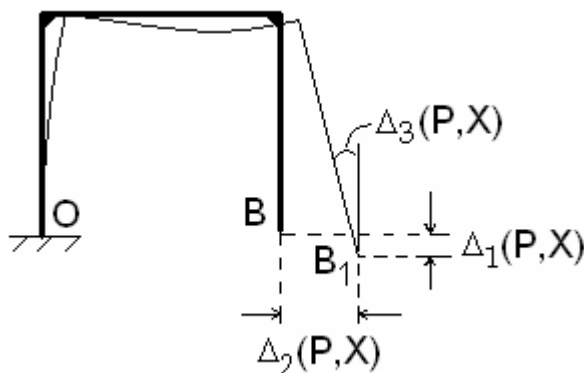
полученной отбрасыванием "лишних" связей из исходной системы. Основная система, нагруженная внешними силами $P = \{q, F, M_e, \dots\}$ и



реакциями отброшенных связей $X_1 = V_B$, $X_2 = H_B$, $X_3 = M_B$, называется *эквивалентной системой* (рис.4). Ее напряженно-деформированное состояние (НДС) совпадает с НДС исходной расчетной схемы.

Рассмотрим схему деформирования эквивалентной системы (рис.5). Под действием P и $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ сечение B получит перемещения

Рис.4. Эквивалентная система.



по направлениям $X_1, X_2, X_3 - \Delta_1(P, X), \Delta_2(P, X), \Delta_3(P, X)$, которые по принципу независимости действия сил можно найти отдельно от P и отдельно от X , а затем сложить. Зная, что в действительности

$$\begin{aligned} \Delta_1(P, X) &= 0; \\ \Delta_2(P, X) &= 0; \\ \Delta_3(P, X) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

Рис.5. Схема деформаций.

мы получим 3 уравнения совместности перемещений. Система из трех уравнений равновесия и трех уравнений совместности перемещений позволяет определить все опорные реакции $V_0, H_0, M_0, V_B, H_B, M_B$.

Аналогичным образом для n раз статически неопределимой системы получим n уравнений совместности перемещений:

$$\Delta_j(P, X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

По принципу независимости действия сил можно разделить перемещения, зависящие только от P , от перемещений, зависящих только от X :

$$\Delta_j(P, X) = \Delta_j(P) + \Delta_j(X). \quad (3)$$

Далее, еще раз воспользовавшись принципом независимости действия сил (обобщенным законом Гука), можно разложить $\Delta_j(X)$ на составляющие, зависящие только от каждой неизвестной X_m , и результаты сложить. Мы получим

$$\Delta_j(X) = \sum_{m=1}^n \delta_{jm} X_m, \quad (4)$$

где δ_{jm} – удельные перемещения j -ой точки в основной системе по направлению силы X_j под действием единичной силы $\bar{X}_m = 1$, приложенной в точке m . Удельные перемещения j -ой точки основной системы можно вычислить по формуле Мора:

$$\delta_{jm} = \sum_{k=1}^{n_1} (l_k) \int \left[\frac{\bar{M}_j \bar{M}_m}{EJ_k} + \frac{\bar{N}_j \bar{N}_m}{EA_k} + k_Q \frac{\bar{Q}_j \bar{Q}_m}{GA_k} \right] ds; \quad j, m = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Перемещение j -ой точки под действием обобщенной силы P в основной системе – $\Delta_{jP} = \Delta_j(P)$ также можно вычислить по формуле Мора:

$$\Delta_{jP} = \sum_{k=1}^{n_1} (l_k) \int \left[\frac{M_p \bar{M}_j}{EJ_k} + \frac{N_p \bar{N}_j}{EA_k} + k_Q \frac{Q_p \bar{Q}_j}{GA_k} \right] ds, \quad (6)$$

где n_1 – число участков интегрирования в системе; $\bar{M}_j, \bar{Q}_j, \bar{N}_j$ – эпюры изгибающих моментов, перерезывающих и продольных сил, обусловленных действием на основную систему обобщенной единичной силы $\bar{X}_j = 1$, приложенной в j -ой точке по направлению обобщенного перемещения Δ_j ; l_k – длина участка с номером k ; E, G – модули упругости и сдвига; A_k, J_k – площадь поперечного сечения и осевой момент инерции стержня на участке с номером k ; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения стержня на распределение касательных напряжений в поперечном сечении.

Подставляя в (3) выражения (4) приходим к канонической системе уравнений метода сил:

В дополнение к уравнениям равновесия рамы составляются уравнения совместности перемещений вида (2).

Обобщенное перемещение Δ_m выражается по формуле Кастильяно:

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m} = \sum_{j=1}^n \int_{(l_j)} \left[\frac{M_j}{EJ_j} \cdot \frac{\partial M_j}{\partial P_m} + \frac{N_j}{EA_j} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial P_m} + k_Q \frac{Q_j}{GA_j} \cdot \frac{\partial Q_j}{\partial P_m} \right] dz, \quad (10)$$

где U – потенциальная энергия деформации рамы; M_j , N_j , Q_j – аналитические выражения изгибающих моментов, продольных и перерезывающих сил на j -ом участке, обусловленных действием на стержневую систему заданных сил, а также обобщенной силы P_m , приложенной в точке m по направлению обобщенного перемещения Δ_m ; n – число участков, на которые поделена рама; l_j – длина участка с номером j ; E , G – модули упругости и сдвига; A_j , J_j – площадь поперечного сечения и осевой момент инерции сечения j -го стержня; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения стержня на распределение касательных напряжений в поперечном сечении.

Зная действительные перемещения сечений рамы, приравнивают выраженные по формуле Кастильяно перемещения действительным значениям перемещений и получают столько уравнений совместности перемещений, сколько отброшено “лишних” связей.

В практических расчетах рам, состоящих из стержней, длина которых превышает высоту поперечного сечения в десять и более раз, влиянием продольных (N) и перерезывающих (Q) сил на перемещения пренебрегают и перемещения определяют по упрощенной формуле:

$$\Delta_m = \frac{\partial U}{\partial P_m} = \sum_{j=1}^n \int_{(l_j)} \left[\frac{M_j}{EJ_j} \cdot \frac{\partial M_j}{\partial P_m} \right] dz. \quad (11)$$

Совокупности уравнений равновесия рамы и уравнений совместности перемещений достаточно для определения реакций всех опорных связей.

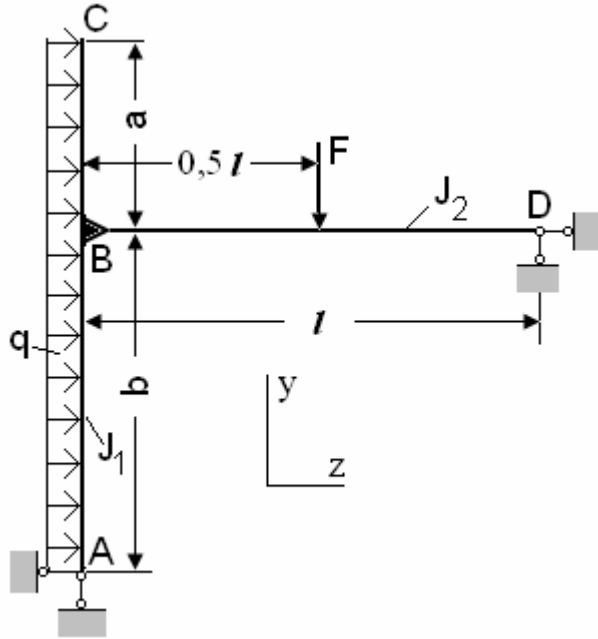
4. Примеры расчета плоских статически неопределимых рам.

Пример 1. Применение метода сил. Рама, расчетная схема которой представлена на рис.6, нагружена горизонтальной равномерно распределенной нагрузкой $q = 10$ кН/м и сосредоточенной вертикальной силой $F = 20$ кН. Размеры рамы: $a = 2$ м, $b = 4$ м, $l = 6$ м; осевые моменты инерции стержней $J_2 = 2J_1$. Модуль упругости E .

Требуется построить эпюры изгибающих моментов M , перерезывающих Q и продольных N сил.

Рама один раз статически неопределимая.

Выбираем основную систему, заменив жесткое соединение стержней AC и BD в точке B на шарнирное (рис.7). Реакцию отброшенных связей – изгибающий момент M_B – обозначаем буквой X_1 (рис.8). На рис.7 пунктиром отмечено так называемое “внутреннее волокно” стержней, по знаку напряжений в котором определяется знак изгибающего момента: растягивающему напряжению соответствует положительный изгибающий момент.



Каноническое уравнение метода сил в данном случае имеет вид:

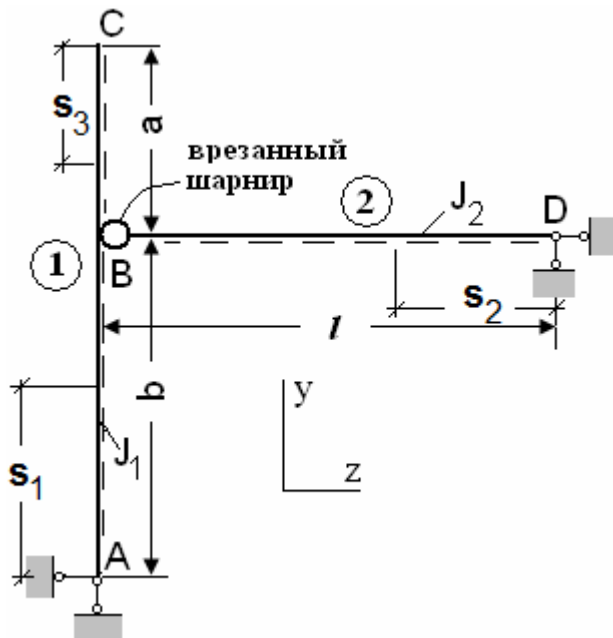
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (12)$$

где δ_{11} , Δ_{1p} – коэффициенты, определяемые по формуле Мора, в которой влияние поперечных и

продольных сил на эти коэффициенты не учитывается. Коэффициент δ_{11} определяют в основной системе при действии единичной обобщенной силы $\bar{X}_1 = 1$ по упрощенной формуле

Рис.6. Исходная расчетная схема.

где \bar{M}_1 – единичный изгибающий момент, построенный в основной системе от действия единичной обобщенной силы $\bar{X}_1 = 1$.



$$EJ_1 \delta_{11} = \sum_{k=1}^2 \int \bar{M}_1^2 \frac{J_1}{J_k} ds, \quad (13)$$

Коэффициент Δ_{1p} определяют по формуле Мора, в которой сохраняют только слагаемые, зависящие от произведения единичных изгибающих

Рис.7. Основная система.

моментов \bar{M}_1 и изгибающих моментов M_p , построенных в основной системе при действии обобщенных заданных сил $P = \{q, F\}$:

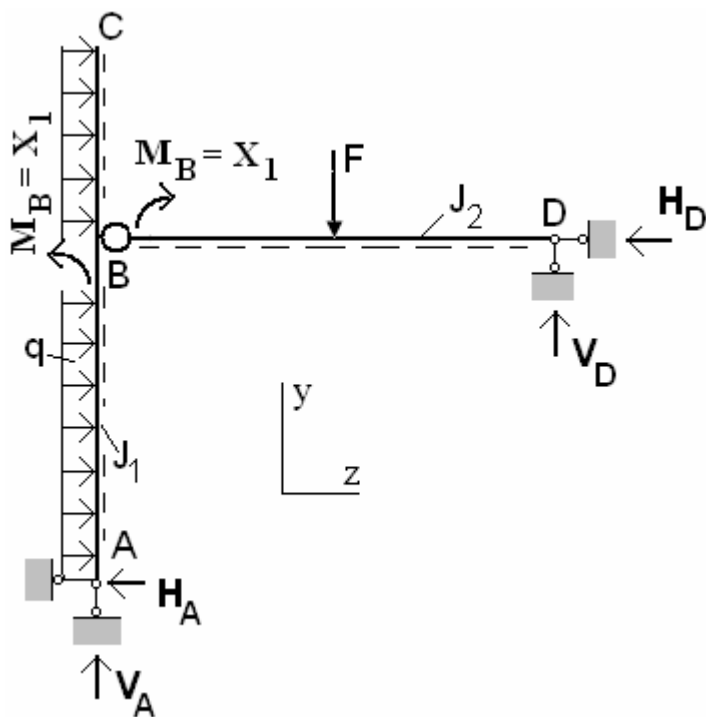


Рис.8. Эквивалентная система.

основной системе. С этой целью основную

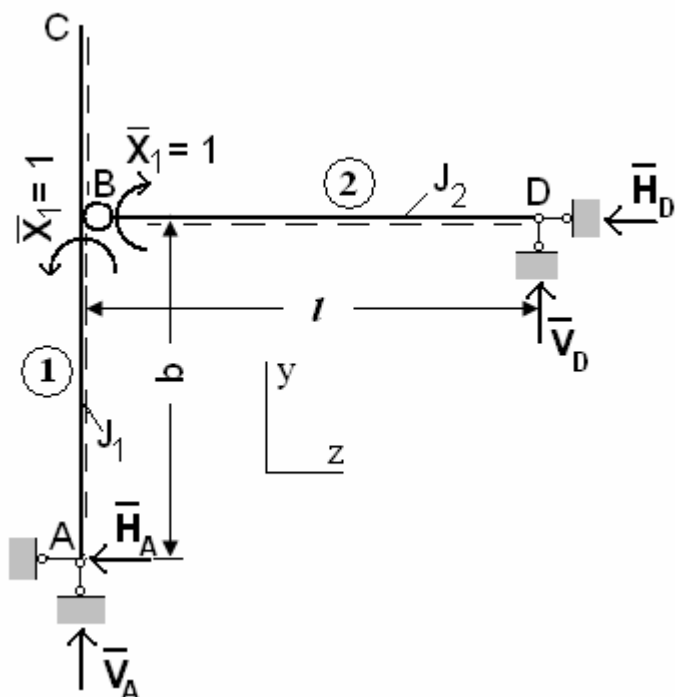


Рис.9.Схема к определению $\bar{V}_A, \bar{H}_A, \bar{V}_D, \bar{H}_D$.

$$EJ_1 \Delta_{1p} = \sum_{k=1}^3 \int \bar{M}_1 M_p \frac{J_1}{J_k} ds. \quad (14)$$

На рис.8 представлена эквивалентная система, в которой внутренние усилия и опорные реакции равны внутренним усилиям и опорным реакциям исходной расчетной схемы. Для определения опорных реакций V_A, H_A, V_D, H_D , а также внутренних усилий M, Q, N в стержнях рамы необходимо построить выражения единичных изгибающих моментов \bar{M}_1 и

изгибающих моментов M_p в изгибающих моментов M_p в основной системе. С этой целью основную систему нагружаем единичной обобщенной силой $\bar{X}_1 = 1$ (рис.9), определяем опорные реакции

$\bar{V}_A, \bar{H}_A, \bar{V}_D, \bar{H}_D$, выражаем

изгибающие моменты по участкам рамы в функции локальных координат s_1, s_2, s_3 (см. рис.7) и строим единичную эпюру \bar{M}_1 .

Определяем опорные реакции $\bar{V}_A, \bar{H}_A, \bar{V}_D, \bar{H}_D$.

Рассматриваем равновесие всей рамы : $\sum F_y = 0; \bar{V}_A + \bar{V}_D = 0, \bar{V}_D = -\bar{V}_A;$

$$\sum F_z = 0; \bar{H}_A + \bar{H}_D = 0, \bar{H}_D = -\bar{H}_A.$$

Рассматриваем равновесие стержня BD: $\sum m_{(B)} = 0; \bar{V}_D \cdot l + \bar{X}_1 = 0,$

$$\bar{V}_D = -1/l.$$

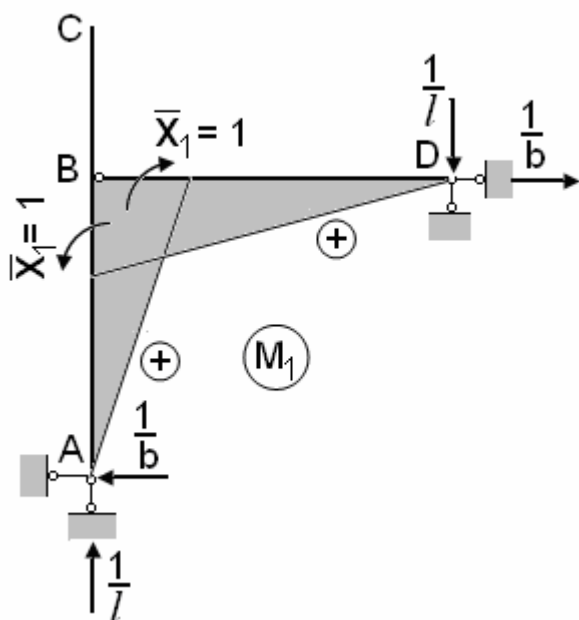
Опять рассматриваем равновесие всей рамы:

$$\sum m_{(D)} = 0; \bar{V}_A \cdot l + \bar{H}_A \cdot b = 0, \quad \bar{H}_A = -\bar{V}_A \cdot l/b.$$

Полученные соотношения дают:

$$\bar{V}_A = 1/l, \bar{H}_A = 1/b, \bar{V}_D = -1/l, \bar{H}_D = -1/b.$$

Обобщенная сила $\bar{X}_1 = 1$ не вызывает в стержне BC изгибающих моментов, поэтому аналитические выражения для изгибающих моментов \bar{M}_1 строим только для стержней AB (участок 1) и DB (участок 2).



Обозначим координаты на осях стержней AB, DB через s_1, s_2 , и будем отсчитывать их от узлов A, D соответственно. Тогда аналитические выражения для изгибающих моментов \bar{M}_1 примут вид:

$$\bar{M}_1(s_1) = s_1/b, \bar{M}_1(s_2) = s_2/l. \quad (15)$$

По выражениям (15) на рис.10 построена единичная эпюра \bar{M}_1 .

Переходим к построению эпюры изгибающих моментов в основной системе при действии заданных сил $P = \{q, F\}$.

Рис.10. Единичная эпюра \bar{M}_1 .

Определяем опорные реакции V_A, H_A, V_D, H_D в основной системе при действии заданных сил $P = \{q, F\}$.

Рассматриваем равновесие стержня BD:

$$\sum m_{(B)} = 0; V_D \cdot l - 0,5Fl = 0, V_D = 0,5F.$$

Рассматриваем равновесие всей рамы:

$$\sum F_y = 0; V_A + V_D = F; V_A = F - V_D = 0,5F;$$

$$\sum F_z = 0; H_A + H_D = q(a + b);$$

$$\sum m_{(D)} = 0; V_A \cdot l + H_A \cdot b + 0,5qa^2 - 0,5qb^2 - 0,5Fl = 0,$$

$$H_A = [-0,5qa^2 + 0,5qb^2 - 0,5Fl + 0,5Fl]/b, H_A = 0,5q(b^2 - a^2)/b;$$

$$H_D = q(a + b) - H_A = q(a + b) - 0,5q(b^2 - a^2)/b = 0,5 q(a + b)^2/b.$$

Полученные соотношения дают:

$$V_A = V_D = 0,5F; H_A = 0,5q(b^2 - a^2)/b; H_D = 0,5q(a + b)^2/b. \quad (16)$$

Строим аналитические выражения для изгибающих моментов M_p для стержней АВ (участок 1), DB (участок 2) и СВ (участок 3). Обозначим координаты на осях стержней АВ, DB и СВ через s_1 , s_2 и s_3 , и будем отсчитывать их от узлов А, D и С соответственно (рис.7). Тогда аналитические выражения для изгибающих моментов M_p примут вид:

$$\text{– на первом участке } M_p(s_1) = H_A \cdot s_1 - 0,5qs_1^2 = 0,5q\left(\frac{b^2 - a^2}{b}s_1 - s_1^2\right); \quad (17)$$

– на втором участке

$$\text{при } s_2 < 0,5l \quad M_p(s_2) = 0,5Fs_2; \quad (18)$$

$$\text{при } s_2 \geq 0,5l \quad M_p(s_2) = 0,5Fs_2 - F(s_2 - 0,5l) = 0,5Fl - 0,5Fs_2; \quad (19)$$

$$\text{– на третьем участке } M_p(s_3) = -0,5s_3^2. \quad (20)$$

По выражениям (17)÷(20) строим эпюру изгибающих моментов M_p в основной системе при действии заданных сил $P = \{q, F\}$, которая приведена на рис.11.

Вычисляем обобщенные перемещения δ_{11} и Δ_{1p} . Для упрощения вычислений умножим перемещения δ_{11} и Δ_{1p} на EJ_1 .

Так как эпюра \bar{M}_1 состоит из двух прямых, то интегрирование можно произвести по правилу Верещагина (см. Приложение 12), умножая площадь каждого треугольника на его же ординату, проходящую через центр тяжести.

По формуле (13) находим

$$EJ_1 \delta_{11} = \sum_{k=1}^2 \int \bar{M}_1^2 \frac{J_1}{J_k} ds = (b + I_1/J_2)/3. \quad (21)$$

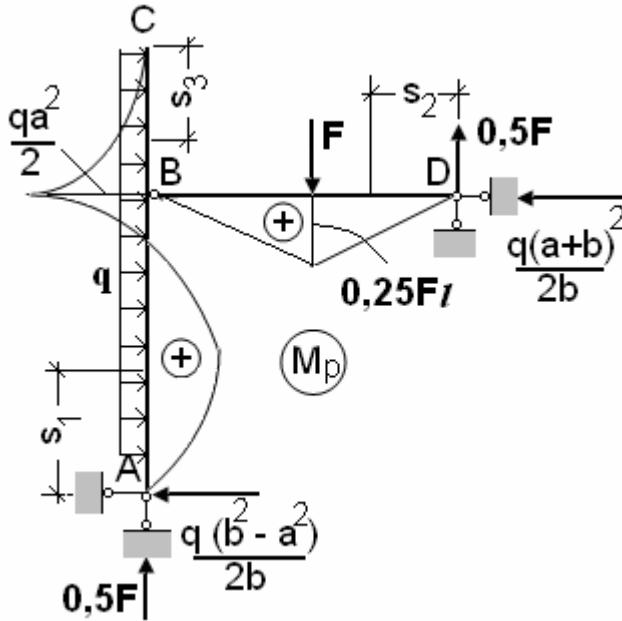


Рис.11. Расчетная схема и эпюра M_p .

Числовое значение $EJ_1 \delta_{11} = 7/3$.

Перемещение $EJ_1 \Delta_{1p}$

вычисляется по формуле (14)

$$EJ_1 \Delta_{1p} = \sum_{k=1}^3 \int \bar{M}_1 M_p \frac{J_1}{J_k} ds.$$

В выражения (17)÷(19) подставляем числовые значения $q = 10$ кН/м, $F = 20$ кН, $a = 2$ м, $b = 4$ м, $l = 6$ м, $J_2 = 2J_1$.

На первом участке имеем:

$$\bar{M}_1 = s_1/4, \quad M_p(s_1) = 15s_1 - 5s_1^2.$$

По формуле Симпсона

(см. Приложение 11) вычисляем

$$\int_0^4 \bar{M}_1 M_p ds = \frac{2}{3} \left[0 + 4 \cdot \frac{2}{4} (15 \cdot 2 - 5 \cdot 4) + \frac{4}{4} (15 \cdot 4 - 5 \cdot 16) \right] = 0.$$

На втором участке имеем:

$$\bar{M}_1 = s_2/6; \quad \text{если } s_2 < 3\text{ м, то } M_p(s_2) = 10s_2; \quad \text{если } s_2 \geq 3\text{ м, то } M_p(s_2) = -10s_2 + 60.$$

Интеграл $\int_0^6 \bar{M}_1 M_p ds$ вычисляем непосредственно:

$$\int_0^6 \bar{M}_1 M_p ds = \int_0^3 \frac{s}{6} \cdot 10s ds + \int_3^6 \frac{s}{6} (-10s + 60) ds = 45; \quad \frac{J_1}{J_2} \int_0^6 \bar{M}_1 M_p ds = 22,5.$$

На третьем участке

$$\int_0^2 \bar{M}_1 M_p ds = 0, \quad \text{так как } \bar{M}_1 = 0.$$

Таким образом, $EJ_1 \Delta_{1p} = 22,5$.

Подставив числовые значения $EJ_1 \delta_{11}$ и $EJ_1 \Delta_{1p}$ в каноническое уравнение (12), получим

$$M_B = X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{EJ_1 \Delta_{1p}}{EJ_1 \delta_{11}} = -\frac{22,5}{7} \cdot 3 = -9,64 \text{ кНм.}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов выражается формулой

$$M = M_p + M_1 X_1,$$

в соответствии с которой нужно умножить все ординаты эпюры \bar{M}_1 на найденное значение X_1 и к произведению алгебраически добавить эпюру M_p . Эти операции можно произвести либо аналитически, либо графически.

Для стойки АВ применим аналитический способ. В сечении с произвольной абсциссой s_1 имеем

$$\bar{M}_1 X_1 = -9,64 \frac{s_1}{b},$$

поэтому

$$M(s_1) = \frac{q(b^2 - a^2)}{2b} s_1 - \frac{qs_1^2}{2} - 9,64 \frac{s_1}{b}. \quad (22)$$

По формуле (22) можно вычислить любую ординату эпюры $M(s_1)$. В частности, при $s_1 = b$ $M(b) = -29,64$ кНм. Эпюра M показана на рис.12,а.

Поперечная сила в любом сечении может быть найдена двумя способами: во-первых, путем суммирования основных эпюр по формуле

$$Q = Q_p + \bar{Q}_1 X_1,$$

где Q_p и \bar{Q}_1 – эпюры поперечных сил, построенные в основной системе при действии заданных сил и единичной силы \bar{X}_1 ; во-вторых, путем дифференцирования окончательной эпюры моментов M . Воспользуемся последним способом для стойки АВ. Здесь эпюра Q будет иметь вид наклонной прямой, и нам достаточно найти две ее ординаты, а именно в сечениях А и В. Уравнение эпюры Q для стойки АВ

$$Q_{AB} = \frac{q(b^2 - a^2)}{2b} - qs_1 - \frac{9,64}{b}. \quad (23)$$

При $s_1 = 0$ $Q_A = 12,59$ кН. Можно было бы получить этот же результат из рис.11, сложив левую горизонтальную реакцию, показанную на эпюре M_p , с левой реакцией из эпюры \bar{M}_1 , умноженной на X_1 .

При $s_1 = b$ $Q_B = 12,59 - 10 \cdot 4 = -27,41$ кН.

Приравняв выражение (23) к нулю найдем координату сечения s_1^* , в котором достигается экстремум изгибающего момента $M(s_1)$.

$$\frac{q(b^2 - a^2)}{2b} - qs_1 - \frac{9,64}{b} = 0; s_1^* = 1,26 \text{ м.}$$

Подставив s_1^* в (23) получим $M(s_1^*) = 7,92 \text{ кНм}$.

Поперечные силы в стержне DB найдем отдельно при $s_2 < 0,5l$ и при $s_2 \geq 0,5l$. При $s_2 = 0$ поперечная сила Q_p равна вертикальной опорной реакции $-0,5F = -10 \text{ кН}$; на рис.10 при $s_2 = 0$ находим $\bar{Q}_1 = 1/6$, поэтому

$$Q_D(0) = -\frac{F}{2} + 9,64 \frac{1}{l} = -8,39 \text{ кН.}$$

При $s_2 = l$ в стержне DB поперечная сила Q_p равна вертикальной опорной реакции $0,5F = 10 \text{ кН}$; на рис.10 при $s_2 = l$ находим $\bar{Q}_1 = 1/6$, поэтому

$$Q_B(l) = 0,5F - 9,64/6 = 8,39 \text{ кН.}$$

Эпюра Q изображена на рис.12,б.

Продольная сила выражается формулой $N = N_p + \bar{N}_1 X_1$.

Учитывая опорные реакции рамы на рис.10 и рис.11, найдем

$$N_{AB} = -\frac{F}{2} + 9,64 \frac{1}{l} = -8,39 \text{ кН;}$$

$$N_{BC} = 0; \quad N_{BD} = -\frac{q(a+b)^2}{2b} - 9,64 \frac{1}{b} = -47,41 \text{ кН.}$$

Эпюра N представлена на рис.12,в.

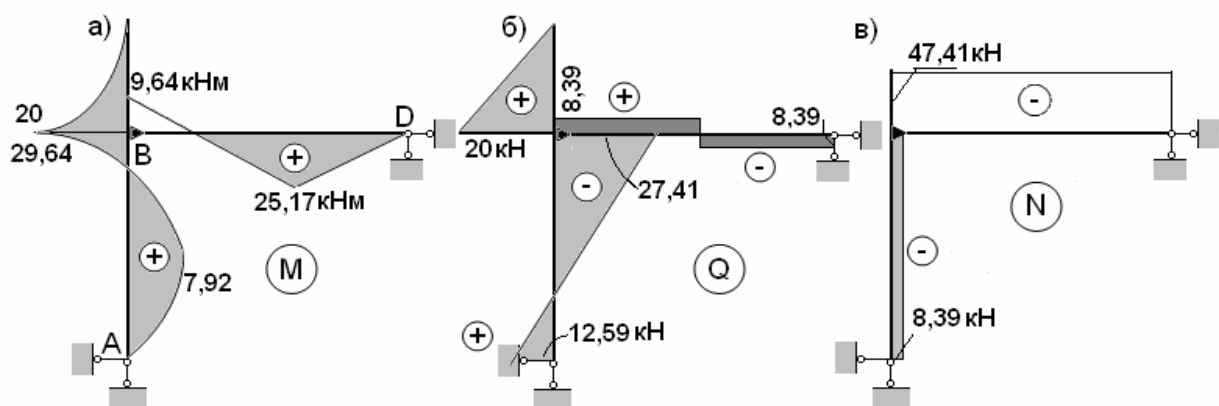


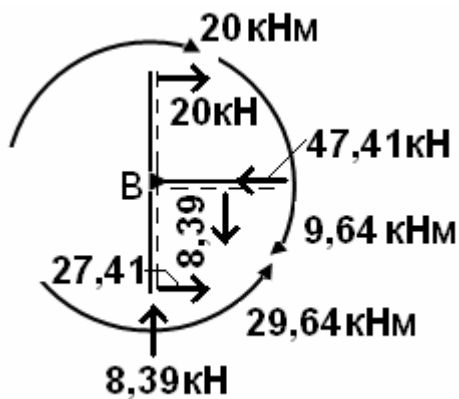
Рис.12. Эпюры M , Q , N в исходной расчетной схеме.

Для проверки равновесия вырежем узел В и приложим реакции отсеченных частей рамы – изгибающие моменты М, перерезывающие Q и продольные N силы, которые выражают действие отсеченных частей рамы на оставшуюся. Составим уравнения равновесия:

– алгебраическая сумма моментов относительно точки В равна нулю

$$\sum m_{(B)} = 20 + 9,64 - 29,64 = 0;$$

– алгебраическая сумма вертикальных реакций равна нулю



$$\sum F_y = 8,39 - 8,39 = 0;$$

– алгебраическая сумма горизонтальных реакций равна нулю

$$\sum F_z = 20 + 27,41 - 47,41 = 0.$$

Следовательно, узел В находится в равновесии. Кроме статической проверки необходима кинематическая проверка, так

Рис. 13. Равновесие узла В.

как следует убедиться в том, что деформации и перемещения системы удовлетворяют условиям опорных закреплений и неразрывности контура. Рассчитываемую раму можно рассматривать как статически определимую систему, нагруженную заданной внешней нагрузкой и лишней неизвестной. Обобщенное перемещение по направлению лишней неизвестной (угол взаимного поворота стержней в узле В исходной расчетной схемы) должно равняться нулю. Отсюда следует, что должно выполняться равенство

$$\sum \int \frac{M\bar{M}_1 ds}{EJ} = 0, \quad (24)$$

где \bar{M}_1 – единичная эпюра моментов, вызываемая в основной системе обобщенной силой $\bar{X}_1 = 1$.

Вычисление левой части (24) выполним методом непосредственного интегрирования.

Функции М и \bar{M}_1 на стержне АВ выражаются через s_1 следующим образом:

$$M(s_1) = \frac{q(b^2 - a^2)}{2b} s_1 - \frac{qs_1^2}{2} - 9,64 \frac{s_1}{b} = 12,59 s_1 - 5 s_1^2; \bar{M}_1 = 0,25 s_1.$$

Интегрирование по длине стержня АВ дает:

$$\int_0^4 M \bar{M}_1 ds = \int_0^4 (12,59s_1 - 5s_1^2) \cdot 0,25s_1 ds = 67,157 - 80 = -12,843.$$

Функции M и \bar{M}_1 на стержне DB выражаются через s_2 следующим образом:

– при $s_2 < 3$ м $M(s_2) = 25,17s_2/3$, $\bar{M}_1 = s_2/6$;

– при $s_2 \geq 3$ м $M(s_2) = -11,603s_2 + 59,98$.

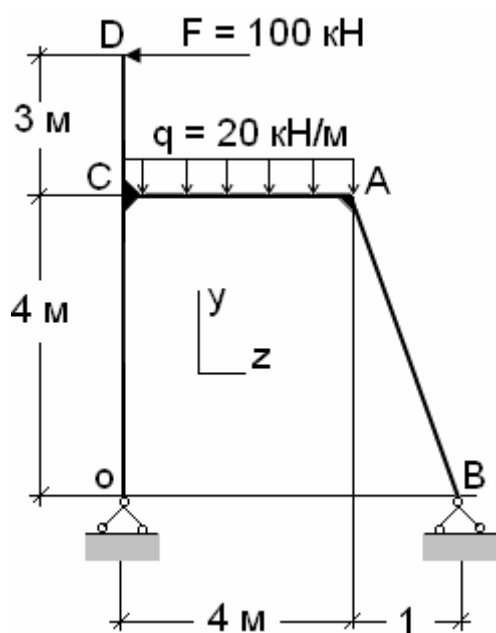
Интегрирование по длине стержня DB дает:

$$\begin{aligned} \int_0^6 M \bar{M}_1 ds &= \int_0^3 \frac{25,17}{3} s_2 \cdot \frac{s_2}{6} ds + \int_3^6 (-11,603s_2 + 59,98) \frac{s_2}{6} ds = \\ &= 12,582 - 121,842 + 134,96 = 25,7. \end{aligned}$$

$$EJ_1 \sum_{k=1}^2 \int \frac{MM_1 ds}{EJ_k} = \sum \int MM_1 \frac{J_1}{J_k} ds = -12,843 + 0,5 \cdot 25,7 = 7 \cdot 10^{-3}.$$

Ошибка егг в расчетах оценивается как отношение разницы между суммой положительных и суммой отрицательных чисел к наименьшей из этих сумм: $егг = 100 \cdot 0,007/12,843 = 0,055\%$.

Пример 2. Применение теоремы Кастильяно и метода сил.



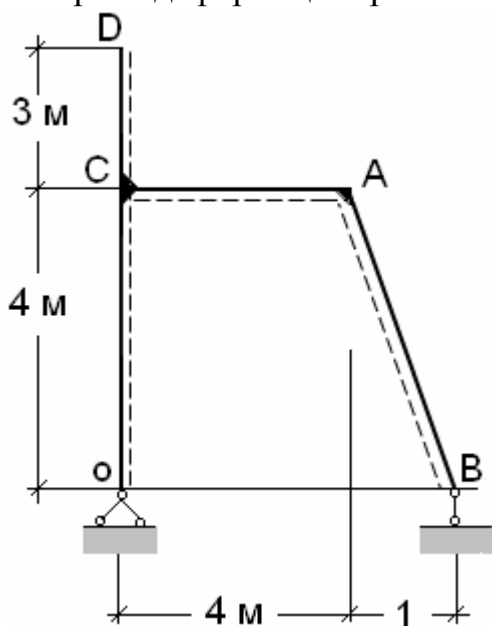
Расчетная схема рамы представлена на рис. 14. Осевые моменты J_k и модули упругости стержней E_k принимаем одинаковыми: $J_k = J$, $E_k = E$, $k = 1, 2, 3, 4$. Требуется построить эпюры изгибающих моментов (M), продольных (N) и перерезывающих (Q) сил. Рама один раз статически неопределимая. Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся теоремой Кастильяно:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad (25)$$

где Δ_i , P_i – обобщенное перемещение в

Рис.14. Исходная расчетная схема.

точке i и обобщенная сила, приложенная в точке i ; U – потенциальная энергия деформации рамы:



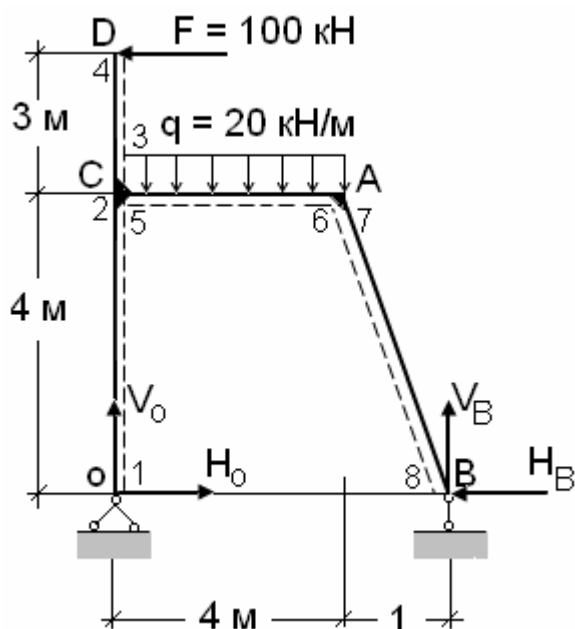
$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \left(\frac{M_k^2}{EJ_k} + \frac{N_k^2}{EA_k} + k_Q \frac{Q_k^2}{GA_k} \right) ds, \quad (26)$$

где M_k , N_k , Q_k – изгибающие моменты, продольные и поперечные силы в стержнях рамы на участке с номером k ; l_k – длина участка; G – модуль сдвига; k_Q – коэффициент влияния формы поперечного сечения на распределение касательных напряжений в этом сечении.

Выберем основную систему и покажем пунктиром "растянутые" волокна стержней (рис.15).

Рис.15. Основная система.

"Лишней" неизвестной является горизонтальная составляющая реакции на опоре В. Обозначим ее H_B . По теореме Кастильяно горизонтальное перемещение Δ_B опоры В можно определить по формуле (25). В исходной расчетной схеме $\Delta_B = 0$, поэтому



$$\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial H_B} = 0. \quad (27)$$

Приложив к основной системе заданные внешние силы q , F и искомую опорную реакцию H_B , получим эквивалентную систему (рис. 16), все усилия в которой равны усилиям в исходной расчетной схеме.

При вычислении потенциальной энергии деформации по формуле (26) вклады продольных и поперечных сил не учитываем, полагая, что стержни рамы длинные

Рис. 16. Эквивалентная система.

(отношение наибольшего размера поперечного сечения к длине менее 0,1).

Условие (27) получает вид:

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^n \int_{l_k} \frac{M_k}{EJ} \cdot \frac{\partial M_k}{\partial H_B} ds = 0. \quad (28)$$

Выразив M_k через H_B и заданные силы q , F , вычислив сумму интегралов и приравняв ее нулю, получим уравнение относительно четырех неизвестных реакций H_B , V_O , H_O , V_B , показанных на рис. 16.

Составив еще три уравнения равновесия, получим четыре уравнения для определения H_B , V_O , H_O , V_B .

Найдем опорные реакции основной системы по рис. 15 от заданных сил q , F и искомой реакции H_B .

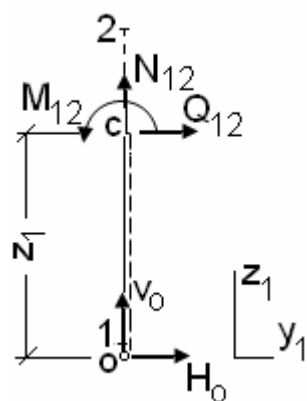
$$\sum m_{(O)} = 0: \quad V_B \cdot 5 + 7F - 4q \cdot 2 = 0; \quad V_B = -\frac{7F-8q}{5}; \quad (29)$$

$$\sum m_{(B)} = 0: \quad V_O \cdot 5 - 7F - 4q \cdot 3 = 0; \quad V_O = \frac{7F+12q}{5}; \quad (30)$$

$$\sum F_Z = 0: \quad H_O - F - H_B = 0; \quad H_O = F + H_B. \quad (31)$$

Для определения изгибающих моментов в стержнях раму разбиваем на отдельные участки (стержни) и нумеруем их 1-2; 3-4; 5-6; 7-8 таким образом, чтобы в каждом узле имелась нумерация примыкающих стержней (рис. 16). На каждом участке используем локальные системы координат.

Составляем аналитические выражения для изгибающих моментов в локальных системах координат. Рассекаем раму по стержню 1-2 и отбрасываем часть рамы выше и правее стержня 1-2. В сечении прикладываем реакции отброшенной части – усилия N_{12} , Q_{12} , M_{12} (рис. 17).



Для определения усилий N_{12} , Q_{12} , M_{12} составляем уравнения равновесия выделенной части стержня 1-2, из решения которого находим N_{12} , Q_{12} , M_{12} . В частности, составляем выражение для изгибающего момента M_{12} в стержне 1-2.

Участок 1-2 (рис.17).

$$\sum m_c = 0;$$

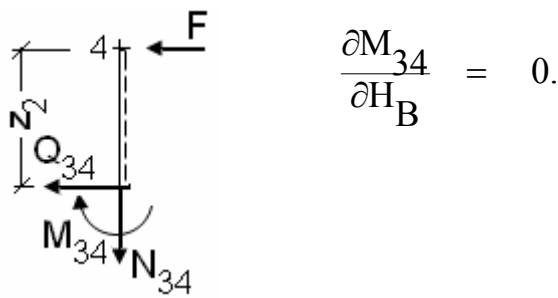
$$M_{12} = -H_O \cdot z_1 = -(F + H_B) z_1 = -(100 + H_B) z_1.$$

Рис. 17. Стержень 1-2.

Производная от изгибающего момента в стержне 1-2: $\frac{\partial M_{12}}{\partial H_B} = -z_1.$

Участок 3-4 (рис. 18).

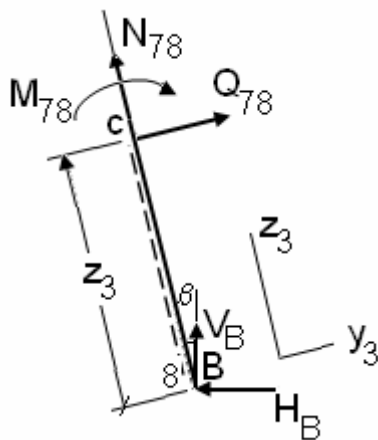
$$\sum m_c = 0; \quad M_{34} = F \cdot z_2 = 100 \cdot z_2;$$



$$\frac{\partial M_{34}}{\partial H_B} = 0.$$

Рис. 18. Стержень 3-4.

Участок 7 – 8 (рис. 19).



$$\sum m_{(c)} = 0; \quad M_{78} - V_B \cdot z_3 \cdot \sin \beta + H_B \cdot z_3 \cdot \cos \beta = 0.$$

Угол β определяется как угол наклона стержня 7-8 к вертикали (см. рис. 16):

$$\beta = \arctg\left(\frac{1}{4}\right) = 0,245 \text{ рад.}$$

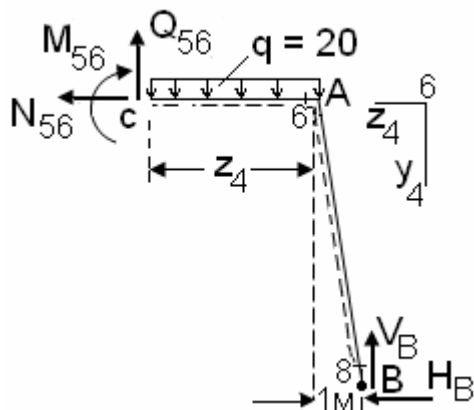
$$M_{78} = V_B \sin \beta \cdot z_3 - H_B \cdot \cos \beta \cdot z_3;$$

$$\frac{\partial M_{78}}{\partial H_B} = -z_3 \cdot \cos \beta.$$

Рис. 19. Стержень 7-8.

Длина стержня 7-8 $l_{78} = \sqrt{4^2 + 1} = 4,123 \text{ м.}$

Участок 5 – 6 (рис. 20).



Рассекаем раму по стержню 5-6 и отбрасываем левую часть рамы. В сечении прикладываем реакции отброшенной части – усилия N_{56} , Q_{56} , M_{56} (см. рис. 14).

Для определения M_{56} составляем уравнение равновесия выделенной части рамы, из решения которого находим M_{56} .

Локальную систему координат $y_4 z_4$ выбираем с началом в узле 6.

Рис. 20. Стержень 5-6.

$$\Sigma m_{(c)} = 0; M_{56} - V_B \cdot (z_4 + 1) + H_B \cdot 4 + \frac{1}{2} q z_4^2 = 0;$$

$$M_{56} = V_B \cdot (1 + z_4) - 4H_B - \frac{1}{2} q z_4^2 = V_B (z_4 + 1) - 10z_4^2 - 4H_B.$$

$$\frac{\partial M_{56}}{\partial H_B} = -4.$$

Подставляем выражения M_k и $\frac{\partial M_k}{\partial H_B}$ в формулу Кастильяно (28):

$$\begin{aligned} \Delta_B = \frac{1}{EJ} \sum_{k=1}^4 \int_{(l_k)} M_k \cdot \frac{\partial M_k}{\partial H_B} ds = \frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^4 (100 + H_B) z_1^2 dz_1 + 0 - \right. \\ \left. - \int_0^{4,123} (V_B \sin \beta \cdot \cos \beta - H_B \cos^2 \beta) z_3^2 dz_3 - \right. \\ \left. - 4 \int_0^4 (V_B (z_4 + 1) - 10 z_4^2 - 4H_B) dz \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Вычисляем интегралы в правой части (32).

$$\int_0^4 (100 + H_B) z^2 dz = (100 + H_B) \frac{z^3}{3} \Big|_0^4 = (100 + H_B) \frac{64}{3}; \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{4,123} \left(\frac{1}{2} V_B \sin 2\beta - H_B \cos^2 \beta \right) z^2 dz = \left(\frac{1}{2} V_B \sin 2\beta - H_B \cos^2 \beta \right) \frac{z^3}{3} \Big|_0^{4,123} = \\ = \left(\frac{1}{2} V_B \sin 2\beta - H_B \cos^2 \beta \right) \cdot \frac{70,087}{3}; \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 [V_B (z+1) - 10z^2 - 4H_B] dz = V_B \frac{z^2}{2} \Big|_0^4 + V_B z \Big|_0^4 - 10 \frac{z^3}{3} \Big|_0^4 - \\ - 4H_B z \Big|_0^4 = 8V_B + 4V_B - 10 \frac{64}{3} - 16H_B. \end{aligned} \quad (c)$$

Подставляем (a), (b), (c) в выражение (32) и получаем соотношение для определения Δ_B :

$$\Delta_B = \frac{1}{EJ} \left[100 \cdot \frac{64}{3} + \frac{64}{3} H_B - 0,235 \cdot \frac{70,087}{3} V_B + 0,941 \frac{70,087}{3} H_B - \right. \\ \left. - 32V_B - 16 V_B + 40 \frac{64}{3} + 64 H_B \right] = \frac{1}{EJ} \left[2986,67 - 53,49 V_B + 107,317 H_B \right]. \quad (d)$$

Приравнявая (d) к нулю, получаем в дополнение к уравнениям (29)÷(31) еще одно уравнение для определения опорных реакций.

$$53,49 V_B - 107,317 H_B = 2986,67. \quad (33)$$

Решив систему уравнений (29)÷(31), (33) находим опорные реакции:

$$V_B = -\frac{7 \cdot 100 - 8 \cdot 20}{5} = -108 \text{ кН}; V_O = \frac{7 \cdot 100 + 12 \cdot 20}{5} = 188 \text{ кН};$$

$$H_B = \frac{-53,49 \cdot 108 - 2986,67}{107,317} = -81,66 \text{ кН}; H_O = 100 - 81,66 = 18,34 \text{ кН}.$$

Проверяем уравновешенность реакций и внешних сил, действующих на раму (рис. 16):

$$\sum m(A) = V_O \cdot 4 - H_O \cdot 4 - V_B \cdot 1 + H_B \cdot 4 - F \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = \\ = 188 \cdot 4 - 18,34 \cdot 4 + 108 - 81,66 \cdot 4 - 100 \cdot 3 - 20 \cdot 8 = 0.$$

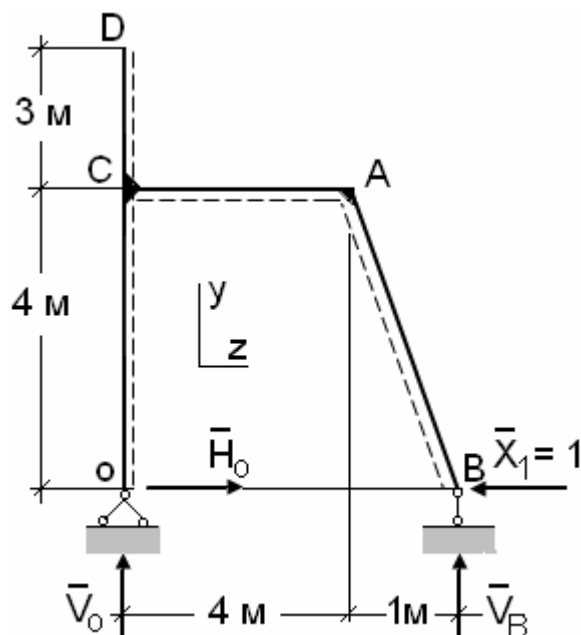


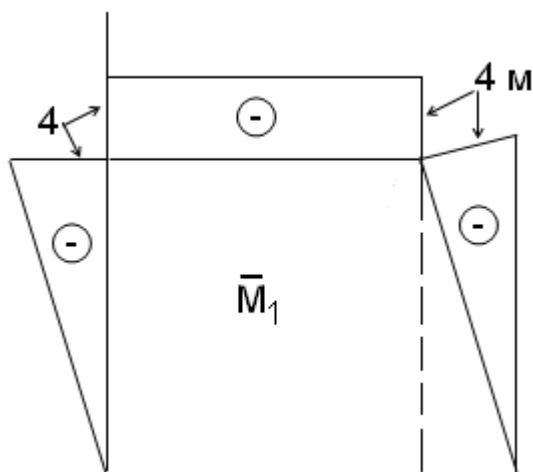
Рис. 21. Основная система.

Для проверки правильности определения опорных реакций раскроем статическую неопределенность другим методом – методом сил.

Расчетная схема та же самая (приведена на рис. 14). В качестве основной системы примем статически определимую раму на рис. 21.

Эквивалентная система показана на рис. 16. Приложим в точке B основной системы единичную силу $\bar{X}_1 = 1$, соответствующую опорной реакции H_B , и построим единичную эпюру \bar{M}_1 . Определяем опорные

реакции в основной системе при действии $\bar{X}_1 = 1$ в точке B.



$$\sum m_{(o)} = 0; \quad \bar{V}_B \cdot 5 = 0, \quad \bar{V}_B = 0;$$

$$\sum m_{(B)} = 0; \quad \bar{V}_O \cdot 5 = 0, \quad \bar{V}_O = 0;$$

$$\sum F_z = 0; \quad \bar{H}_O - \bar{X}_1 = 0, \quad \bar{H}_O = 1.$$

Составив аналитические выражения для функции \bar{M}_1 по участкам, строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 22).

Далее необходимо построить эпюру изгибающих моментов в основной

Рис. 22. Единичная эпюра изгибающих моментов.

системе под действием системы заданных сил $P = \{F, q\}$ – эпюру M_p . Попутно построим эпюры продольных N_p и поперечных Q_p сил.

Прикладываем к основной системе заданные силы F, q (рис.23) и составляем аналитические выражения для функции M_p по участкам.

2.1. *Определение опорных реакций.* Обозначаем опорные реакции символами V_O, H_O, V_B . Составляем уравнения равновесия, из решения которых находим опорные реакции:

$$\sum F_z = 0: \quad H_O = F = 100 \text{ кН};$$

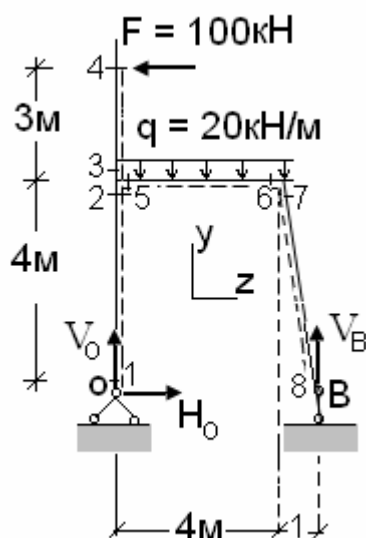
$$\sum m_{(B)} = 0: \quad V_O \cdot 5 - 100 \cdot 7 - 20 \cdot 4 \cdot (2 + 1) = 0;$$

$$V_O = \frac{700 + 240}{5} = 188 \text{ кН};$$

$$\sum m_{(o)} = 0: \quad V_B \cdot 5 + 100 \cdot 7 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

$$V_B = -\frac{700 - 160}{5} = -108 \text{ кН}.$$

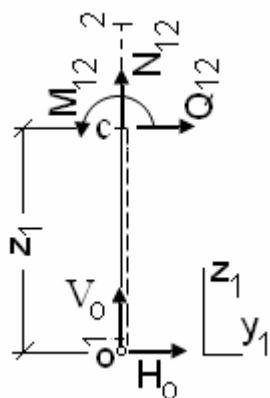
$$\text{Проверка: } \sum F_y = 0: \quad 188 - 20 \cdot 4 - 108 = 0.$$



2.2. *Определение внутренних сил в стержнях основной системы.* Раму разбиваем на отдельные участки (стержни) и нумеруем их 1-2; 3-4; 5-6; 7-8. Используем локальные системы координат для стержней. Составляем аналитические выражения

Рис.23. Схема для определения усилий в основной системе.

для N , Q , M в локальных системах координат. Рассекаем раму по стержню 1-2 и отбрасываем часть рамы выше и правее стержня 1-2. В сечении прикладываем реакции отброшенной части – усилия N_{12} , Q_{12} , M_{12} (см рис.24). Составляем уравнения равновесия выделенной части стержня 1-2, из решения которых находим усилия N_{12} , Q_{12} , M_{12} .
Участок 1 – 2 (рис.24).



$$\Sigma F_{z1} = 0; \quad N_{12} = -V_0 = -188 \text{ кН};$$

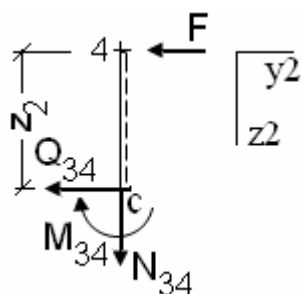
$$\Sigma F_{y1} = 0; \quad Q_{12} = -H_0 = -100 \text{ кН};$$

$$\Sigma m(c) = 0; \quad M_{12} = -H_0 \cdot z_1 = -100 \cdot z_1;$$

Для построения графика M_{12} достаточно иметь значения в двух точках:

$$M_{12}|_{z_1=0} = 0; \quad M_{12}|_{z_1=4} = -400 \text{ кНм}.$$

Рис.24. Стержень 1-2.



Участок 3 – 4 (рис. 25).

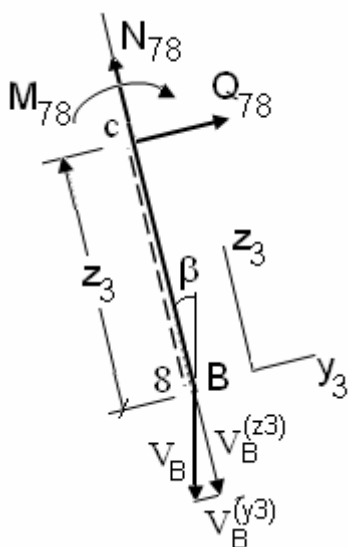
$$\Sigma F_{z2} = 0; \quad N_{34} = 0; \quad \Sigma F_{y2} = 0; \quad Q_{34} = -F = -100 \text{ кН};$$

$$\Sigma m(c) = 0; \quad M_{34} = F \cdot z_2 = 100 \cdot z_2;$$

Рис.25. Стержень 3-4. Для построения графика M_{34} достаточно иметь значения в двух точках:

$$M_{34}|_{z_2=0} = 0; \quad M_{34}|_{z_2=3} = 300 \text{ кНм}.$$

Участок 7 – 8 (рис.26).



Раскладываем реакцию V_B на две составляющие $V_B^{(y3)}$ и $V_B^{(z3)}$:

$$V_B^{(y3)} = V_B \sin \beta, \quad V_B^{(z3)} = V_B \cos \beta.$$

Угол β определяется как угол наклона стержня 7-8 к вертикали: $\beta = \arctg(0,25) = 0,245 \text{ рад}$.

$$\Sigma F_{z3} = 0; \quad N_{78} = V_B \cos \beta = 108 \cdot 0,97 = 105 \text{ кН};$$

$$\Sigma F_{y3} = 0; \quad Q_{78} = V_B \sin \beta = 108 \cdot 0,242 = 26,14 \text{ кН};$$

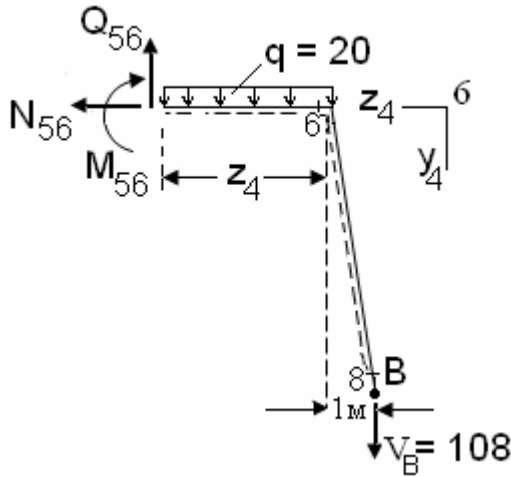
Рис. 26. Стержень 7-8.

$$\Sigma m(c) = 0; M_{78} = -V_B \sin \beta \cdot z_3 = -26,14 \cdot z_3;$$

Для построения графика M_{78} достаточно иметь значения в двух точках:

$$M_{78}|_{z_3=0} = 0; M_{78}|_{z_3=\sqrt{17}} = -26,14 \cdot \sqrt{17} = -107,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 5 – 6 (рис. 27).



Рассекаем раму по стержню 5-6 и отбрасываем левую часть рамы. В сечении прикладываем реакции отброшенной части – усилия N_{56} , Q_{56} , M_{56} (рис.27).

Для определения этих усилий

составляем уравнения равновесия выделенной части рамы, из решения которых находим усилия N_{56} , Q_{56} , M_{56} .

Локальную систему координат $y_4 z_4$ выбираем с началом в узле 6.

Рис.27. Стержень 5-6.

$$N_{56} = 0; Q_{56} = V_B + q \cdot z_4 = 108 + 20z_4;$$

$$M_{56} = -V_B \cdot (1 + z_4) - \frac{1}{2} q z_4^2 = -108(z_4 + 1) - 10z_4^2.$$

Для построения графика перерезывающей силы в стержне 5-6 достаточно иметь значения Q_{56} в двух точках:

$$Q_{56}|_{z_4=0} = 108 \text{ кН}; Q_{56}|_{z_4=4} = 108 + 20 \cdot 4 = 188 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент в стержне 5-6 – нелинейная функция; для построения ее графика необходимо иметь не менее трех значений M_{56} в трех точках:

$$M_{56}|_{z_4=0} = -108 \text{ кНм}; M_{56}|_{z_4=2} = -108 \cdot 3 - 10 \cdot 2^2 = -364 \text{ кНм};$$

$$M_{56}|_{z_4=4} = -108 \cdot 5 - 10 \cdot 16 = -540 - 160 = -700 \text{ кНм}.$$

2.3. Построение эюр внутренних сил (N_p , Q_p , M_p) в основной системе. Используя построенные в п.2.2 аналитические выражения для N , Q , M строим по точкам эюры N_p , Q_p , M_p (рис.28).

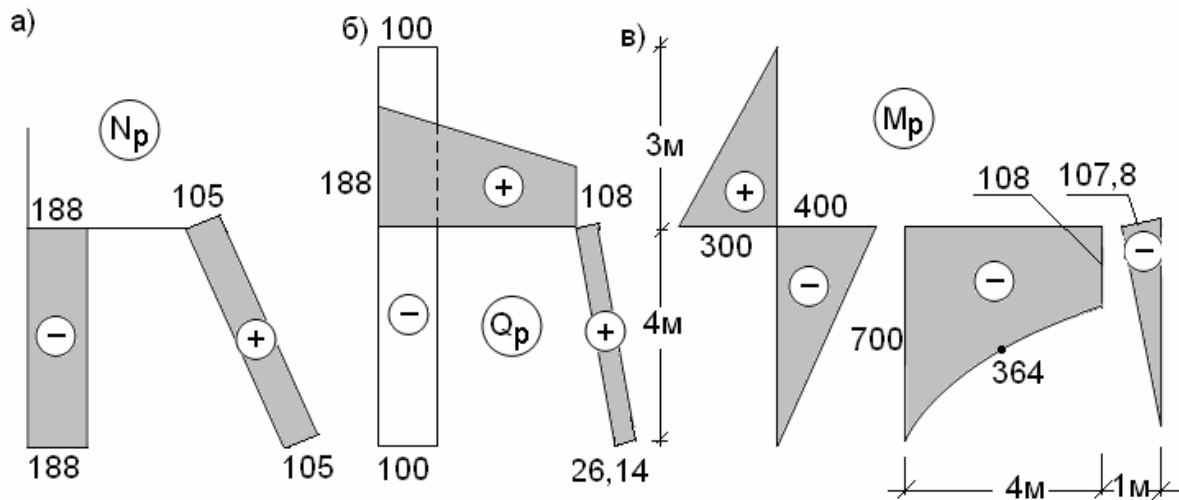


Рис.28. Эюры внутренних усилий N_p , Q_p , M_p в основной системе.

2.4. Определение опорной реакции H_B методом сил. Обозначим опорную реакцию H_B символом X_1 : $H_B = X_1$. Для определения X_1 используем каноническое уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (34)$$

где δ_{11} , Δ_{1p} – коэффициенты, определяемые в основной системе по формуле Мора:

$$EJ \delta_{11} = \sum_{k=1}^4 \int_{\ell_k} \bar{M}_1^2 ds, \quad (35)$$

$$EJ \Delta_{1p} = \sum_{k=1}^4 \int_{\ell_k} M_p \bar{M}_1 ds. \quad (36)$$

Коэффициент δ_{11} определяют в основной системе при действии единичной обобщенной силы $\bar{X}_1 = 1$, а коэффициент Δ_{1p} – при действии заданных сил $P = \{q, F\}$.

Единичная эюра \bar{M}_1 представлена на рис.22, эюра M_p – на рис.28,в.

Вычисляем по способу Верещагина $EJ\delta_{11}$:

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4,123 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 107,323 \text{ м}^3.$$

Вычисляем по способу Верещагина $EJ\Delta_{1p}$ на стержнях 1-2 и 7-8 (рис. 23, рис.28,в.):

$$\frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 107,8 \cdot 4,123 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 2725,945 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Вычисляем способом непосредственного интегрирования правой части (36) $EJ\Delta_{1p}$ на стержне 5-6 (рис. 23, рис.28,в.):

$$M_{56} = -V_B \cdot (1 + z_4) - \frac{1}{2} qz_4^2 = -108 (z_4 + 1) - 10z_4^2;$$

$$V_B = -108 \text{ кН}; \quad \bar{M}_1 = -4 \text{ м};$$

$$-4 \int_0^4 [V_B (z+1) - 10z^2] dz = -4 \left[V_B \frac{z^2}{2} \Big|_0^4 + V_B z \Big|_0^4 - 10 \frac{z^3}{3} \Big|_0^4 \right] =$$

$$= -4 \left[-108 \cdot 8 - 108 \cdot 4 - 10 \cdot \frac{64}{3} \right] = 6037,333 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Суммируем $EJ\Delta_{1p}$ на стержнях 1-2, 7-8 и 5-6:

$$EJ\Delta_{1p} = \sum_{k=1}^3 \int \bar{M}_1 M_p ds = 2725,945 + 6037,333 = 8763,278 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Из уравнения (34) находим $H_B = X_1$:

$$H_B = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = - \frac{8763,278}{107,323} = -81,65 \text{ кН}.$$

Вычисленное методом сил значение H_B с точностью до второй цифры после запятой совпадает со значением H_B , вычисленным с использованием теоремы Кастильяно, поэтому принимаем $H_B = -81,655$ кН.

2.5. Построение эпюр изгибающих моментов (M), продольных (N) и перерезывающих (Q) сил в исходной расчетной схеме. Используем зависимости (9), в правых частях которых остаются только по два слагаемых. Эпюра \bar{M}_1 представлена на рис.22.

Приложим в точке В основной системы единичную силу $\bar{X} = 1$ (рис.21) и построим единичные эпюры \bar{Q}_1, \bar{N}_1 . Опорные реакции в основной системе при действии $\bar{X}_1 = 1$ в точке В определены выше:

$$\bar{V}_B = 0; \quad \bar{V}_O = 0; \quad \bar{H}_O = 1.$$

Используя метод сечений, строим эпюры \bar{Q}_1, \bar{N}_1 (рис.29).

Умножив эпюры \bar{M}_1 , \bar{Q}_1 , \bar{N}_1 на $X_1 = -81,655$ кН, получим эпюры $\bar{M}_1 X_1$, $\bar{Q}_1 X_1$, $\bar{N}_1 X_1$, сложив которые с эпюрами M_p , Q_p , N_p , найдем эпюры изгибающих моментов (M), продольных (N) и поперечных (Q) сил в исходной расчетной схеме (рис.30).

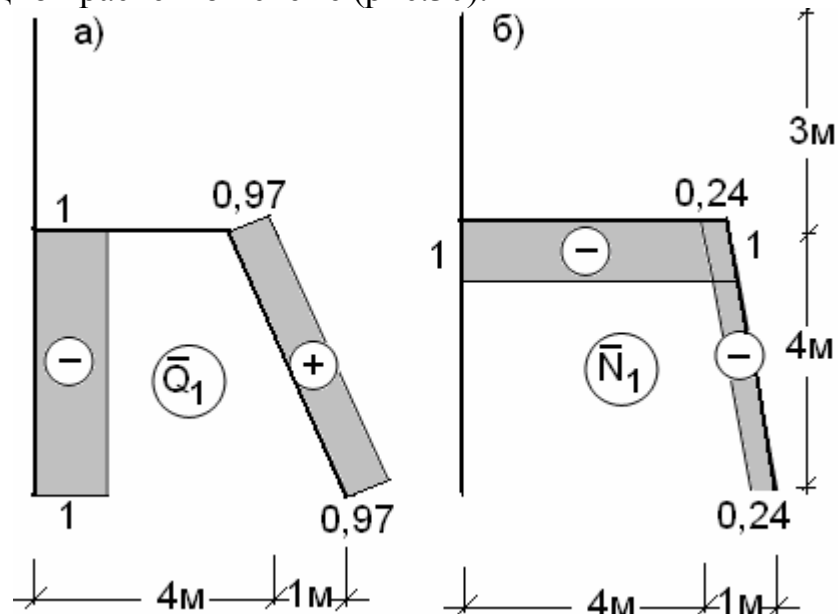


Рис. 29. Эпюры \bar{Q}_1 , \bar{N}_1 .

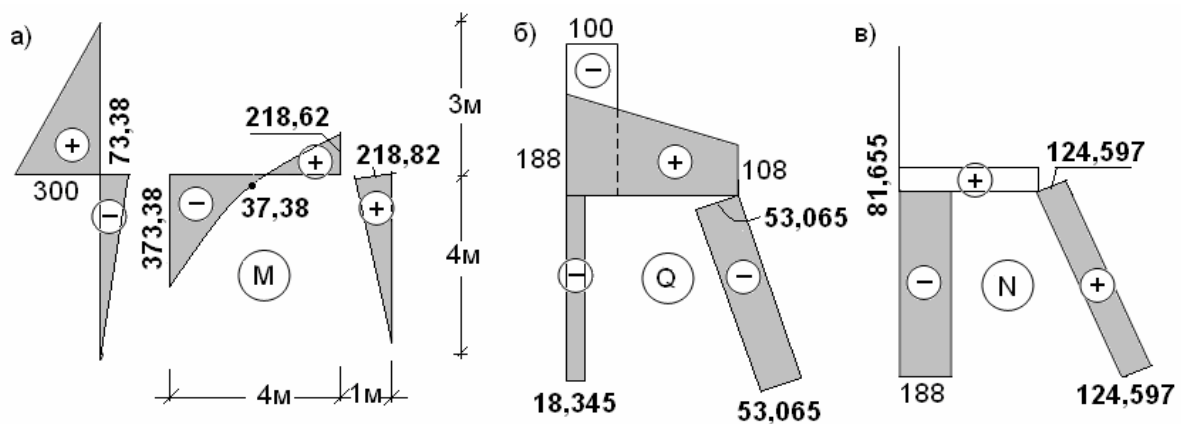


Рис. 30. Эпюры M , Q , N в исходной расчетной схеме.

2.6. Проверка равновесие узлов. Проверяем равновесие узлов, в которых сходятся стержни 1-2, 3-4 и 3-6, а также стержни 3-6 и 7-8.

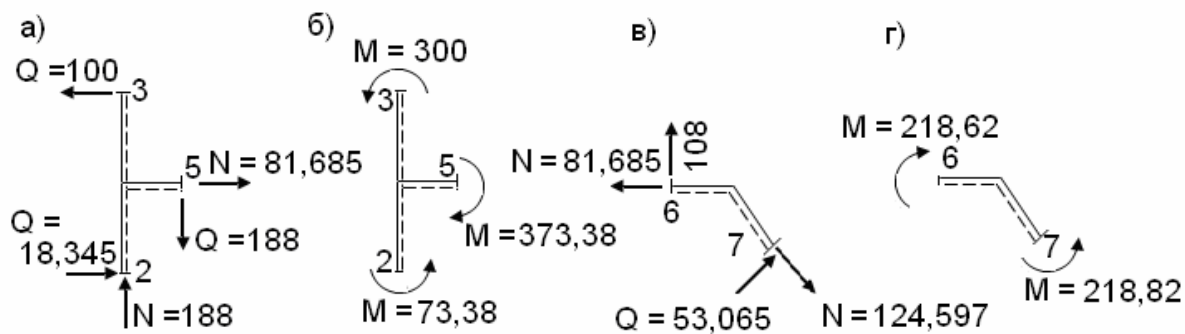


Рис.31. Равновесие узлов.

На рис.31,а и 31,б показаны силы и изгибающие моменты, действующие в узле С, где сходятся стержни 1-2, 3-4 и 5-6; на рис. 31,в и 31,г – силы и изгибающие моменты в узле А, где сходятся стержни 5-6 и 7-8. Длины примыкающих к узлам стержней предполагаются бесконечно малой величины. Силы имеют размерность кН, изгибающие моменты – кНм. Равновесие узла С, где сходятся стержни 1-2, 3-4 и 5-6, очевидно.

Проверяем равновесие узла А, где сходятся стержни 5-6 и 7-8. Проецируем силы, приложенные к этому узлу, на оси yz глобальной системы координат (см. рис.23):

$$\sum F_y = 108 - 124,597 \cdot \cos \beta + 53,065 \cdot \sin \beta = 108 - 124,597 \cdot 0,97 + 53,065 \cdot 0,24 = -0,123 \approx 0, \text{ так как невязка составляет менее } 0,2\% ;$$

$$\sum F_z = 53,065 \cdot \cos \beta + 124,59 \cdot \sin \beta - 81,685 = 53,065 \cdot 0,97 + 124,59 \cdot 0,24 - 81,685 = -0,309 \approx 0, \text{ так как невязка составляет менее } 0,6\% .$$

Равновесие узлов С и А имеет место. Так как опорная реакция H_B определена правильно и имеет место равновесие узлов С и А, кинематическую проверку выполнять нет необходимости.

Расчеты закончены.

Геометрические характеристики плоских фигур

	$x_c^{(0)} = (1 + b/(a+b))(b-a)/6;$ $y_c^{(0)} = [(b-a)/(a+b)]h/6;$ $A = (a+b)h/2;$ $J_x = [(a^2 + 4ab + b^2)h^3]/[36(a+b)];$ $J_y = a^3h/12 + a(b-a)^2h(1 + b/(a+b))^2/36 + (b-a)^3h[1 + 2(1,5 + 0,5b/(a+b))]^2/36$
	$x_c = b/3; \quad y_c = h/3; \quad A = bh/2$ $J_x = bh^3/36;$ $J_y = hb^3/36.$
	$\alpha = \arccos(1 - h/R), \quad (\alpha - \text{в радианах});$ $b = 2R \sin \alpha;$ $y_c = 4R \sin^3 \alpha / [3(2\alpha - \sin 2\alpha)];$ $A = 0,5R^2(2\alpha - \sin 2\alpha);$ $J_x = R^4 [2\alpha - \sin 2\alpha + 4\sin^3 \alpha \cos \alpha - 64\sin^6 \alpha / (9(2\alpha - \sin 2\alpha))] / 8;$ $J_y = R^4 (2\alpha - \sin 2\alpha - 4\sin^3 \alpha \cos \alpha / 3) / 8$
	$y_c = 0,4244R;$ $A = 0,5\pi R^2;$ $J_x = 0,10976R^4;$ $J_y = 0,4R^4.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Метод начальных параметров для определения перемещений в балках со ступенчато изменяющейся жесткостью

1. Постановка задачи. Рассматриваются малые упругие перемещения балок с поперечными сечениями, изменяющимися по длине балок, при плоском изгибе. Изменения поперечных сечений происходит “скачками” таким образом, что в пределах заданных интервалов длины балки поперечные сечения остаются постоянными.

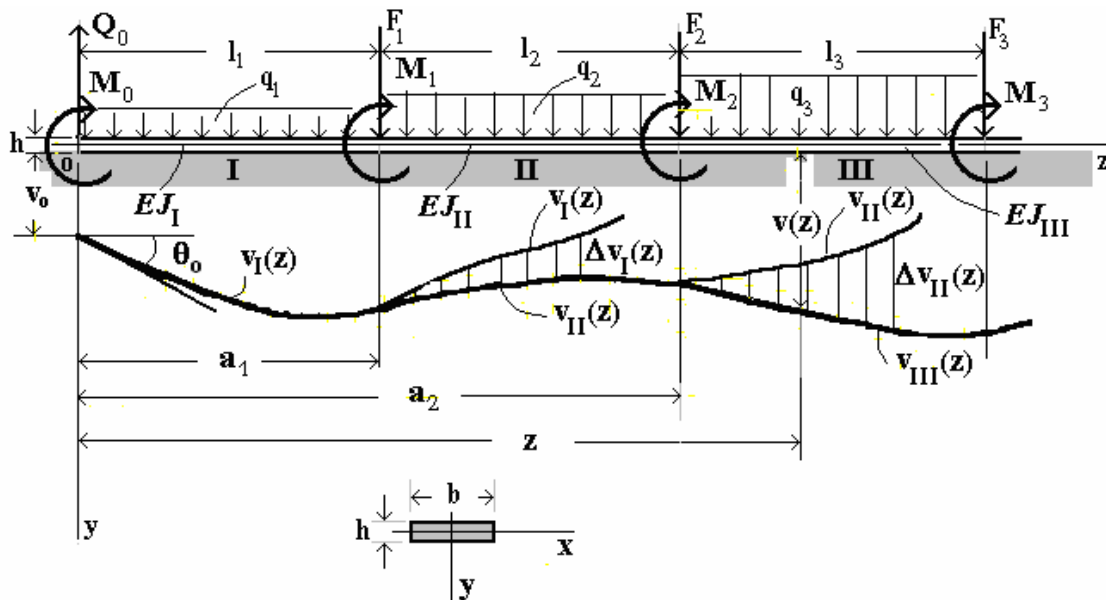


Рис.1,а. Расчетная схема.

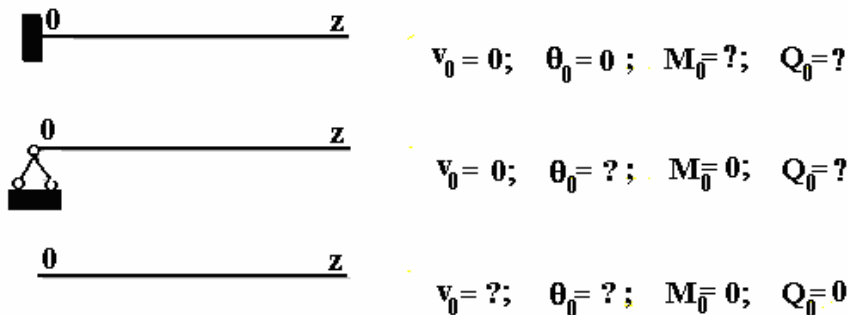


Рис.1,б. Граничные условия на левом конце балки.

На рис.1,а представлена обобщённая расчётная схема: балка находится в равновесии под действием внешних сил и опорных реакций; начало координат – на левом конце балки, который может быть либо

жёстко зашкремлён, либо опёрт на шарнирно-подвижную или шарнирно-неподвижную опору, либо свободен (показано на рис.1,б); поперечные сечения балок могут изменяться “скачками” на конечные величины, так что изгибная жёсткость EJ – ступенчатая функция (E – модуль упругости материала, J – осевой момент инерции поперечного сечения балок); ограничиваемся типичной совокупностью нагрузок: пары сил с моментами M_k , сосредоточенные силы F_k , равномерно распределенная нагрузка q_k , $k = 1, 2, \dots$.

Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M вдоль оси oz балки, то есть зависимости $M = M(z)$, $Q = Q(z)$, предполагаются известными. Требуется найти распределение прогибов балки v и углов поворота поперечных сечений θ по длине балки и построить эпюры (графики) функций $v = v(z)$, $\theta = \theta(z)$.

Эту задачу целесообразно решать методом начальных параметров.

Используем известные из теории плоского изгиба балок зависимости.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в принятой системы координат имеет вид:

$$\frac{d^2}{dz^2} v(z) = - M(z) / EJ. \quad (1)$$

Дифференциальные зависимости между M , Q и q :

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{dQ}{dz} = -q, \quad \frac{d^2M}{dz^2} = -q. \quad (2)$$

Углы поворота сечений $\theta(z)$ и прогибы балки $v(z)$ связаны зависимостью:

$$\theta = \frac{dv}{dz}. \quad (3)$$

В последующем изложении производные по координате z обозначаются штрихами:

$$v' = \frac{dv}{dz}, \quad v'' = \frac{d^2v}{dz^2}, \quad v''' = \frac{d^3v}{dz^3}, \quad v^{IV} = \frac{d^4v}{dz^4}.$$

Дифференцируя уравнение (1) по координате z при $EJ = \text{const}$, получаем ещё два соотношения, необходимых для построения метода:

$$v'''(z) = - Q(z) / EJ, \quad v^{IV}(z) = q(z) / EJ. \quad (4)$$

Таким образом, имеем следующие дифференциальные зависимости:

$$v'(z) = \theta(z), v''(z) = -M(z)/EJ, v'''(z) = -Q(z)/EJ, v^{IV}(z) = q(z)/EJ. \quad (5)$$

Используя зависимости (5) можно для принятой совокупности нагрузок построить универсальное (имеющее один и тот же вид) уравнение упругой линии балки $v = v(z)$ при плоском изгибе.

2. Универсальное уравнение упругой линии балки на первом участке. Будем строить решение по участкам, разлагая $v(z)$ в ряд Тэйлора (степенной ряд).

На I-ом участке разложение $v(z)$ в окрестности $z = 0$ даёт:

$$v_I(z) = v(0) + v'(0)z + v''(0)\frac{z^2}{2!} + v'''(0)\frac{z^3}{3!} + v^{IV}(0)\frac{z^4}{4!} \dots \quad (6)$$

Далее ограничиваемся пятью членами разложения функций в степенной ряд.

Значения прогибов балки v и углов поворота поперечных сечений θ , а также поперечных сил Q и изгибающих моментов M в начале системы координат обозначим $v(0) = v_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $Q(0) = Q_0$, $M(0) = M_0$; величины v_0 , θ_0 , Q_0 , M_0 называются начальными параметрами.

Согласно соотношениям (5):

$$v'(0) = \theta(0) = \theta_0; v''(0) = -M(0)/EJ_1 = -M_0/EJ_1;$$

$$v'''(0) = -Q(0)/EJ_1 = -Q_0/EJ_1; v^{IV}(0) = q(0)/EJ_1 = q_1/EJ_1. \quad (7)$$

После подстановки (7) в (6) получаем уравнение упругой линии балки на I-ом участке:

$$v_I(z) = v_0 + \theta_0 z - \frac{M_0}{EJ_1} \frac{z^2}{2!} - \frac{Q_0}{EJ_1} \frac{z^3}{3!} + \frac{q_1}{EJ_1} \frac{z^4}{4!}. \quad (8)$$

3. Универсальное уравнение упругой линии балки на втором участке. Продолжим функцию $v_I(z)$ на II-ой участок, то есть представим функцию $v_{II}(z)$ как сумму $v_I(z)$ и её приращения $\Delta v_I(z)$ на II-ом участке:

$$v_{II}(z) = v_I(z) + \Delta v_I(z), \quad \Delta v_I(z) = v_{II}(z) - v_I(z). \quad (a)$$

Дифференциальные уравнения изогнутой оси балки по участкам:

$$v''_I = -M_I(z)/EJ_1, \quad v''_{II} = -M_{II}(z)/EJ_2. \quad (б)$$

Вторая производная от приращения $\Delta v_I(z)$ по координате z :

$$\Delta v''_I(z) = v''_{II}(z) - v''_I(z) = - \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_2} M_{II}(z) - \frac{J_1}{J_1} M_I(z) \right]. \quad (B)$$

Множитель $J_1 / J_1 = 1$ у второго слагаемого в соотношениях (B) вводится для придания единообразия выражениям для приращений ("скачков") функций и их производных.

Разложим $\Delta v_I(z)$ в ряд Тэйлора в правой окрестности точки $z = a_1$, то есть при $z \rightarrow a_1 + 0$. С учетом сдвига точки разложения функций в ряд Тэйлора по оси z на отрезок a_1 получаем:

$$\begin{aligned} \Delta v_I(z) = & \Delta v_I(a_1) + \Delta v'_I(a_1) \frac{z - a_1}{1} + \Delta v''_I(a_1) \frac{(z - a_1)^2}{2!} + \Delta v'''_I(a_1) \frac{(z - a_1)^3}{3!} + \\ & + \Delta v_I^{IV}(a_1) \frac{(z - a_1)^4}{4!}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выразим коэффициенты ряда (9) через значения функций $v_I(z)$ и $v_{II}(z)$, а также их производных при $z = a_1$ (значения $v_{II}(z)$ вычисляем при $z \rightarrow a_1 + 0$, $v_I(z)$ при $z \rightarrow a_1 - 0$):

$$\Delta v_I(a_1) = [v_{II} - v_I]_{z=a_1};$$

$$\Delta v'_I(a_1) = [v'_{II} - v'_I]_{z=a_1} = [\theta_{II} - \theta_I]_{z=a_1};$$

$$\Delta v''_I(a_1) = [v''_{II} - v''_I]_{z=a_1} = - \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_2} M_{II} - \frac{J_1}{J_1} M_I \right]_{z=a_1}; \quad (10)$$

$$\Delta v'''_I(a_1) = [v'''_{II} - v'''_I]_{z=a_1} = - \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_2} Q_{II} - \frac{J_1}{J_1} Q_I \right]_{z=a_1};$$

$$\Delta v_I^{IV}(a_1) = [v^{IV}_{II} - v^{IV}_I]_{z=a_1} = \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_2} q_2 - \frac{J_1}{J_1} q_1 \right]_{z=a_1}.$$

Обозначим:

$$\Delta \theta_I = [\theta_{II} - \theta_I]_{z=a_1}; \quad \Delta M_I = \left[\frac{J_1}{J_2} M_{II} - \frac{J_1}{J_1} M_I \right]_{z=a_1}; \quad (r)$$

$$\Delta Q_I = \left[\frac{J_1}{J_2} Q_{II} - \frac{J_1}{J_1} Q_I \right]_{z=a_1}; \quad \Delta q_I = \left[\frac{J_1}{J_2} q_2 - \frac{J_1}{J_1} q_1 \right]_{z=a_1}.$$

Подставляем выражения (10) в (9) и получаем:

$$\Delta v_I(z) = \Delta v_I(a_1) + \Delta \theta_1(z - a_1) - \frac{\Delta M_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^3}{3!} + \frac{\Delta q_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^4}{4!}. \quad (\text{д})$$

Выражения (8) и (д) подставляем в первое из соотношений (а) и получаем уравнение изогнутой оси балки на II -ом участке:

$$v_{II}(z) = v_I(z) + \Delta v_I(z) = v_0 + \theta_0 z - \frac{M_0}{EJ_1} \frac{z^2}{2!} - \frac{Q_0}{EJ_1} \frac{z^3}{3!} + \frac{q_1}{EJ_1} \frac{z^4}{4!} + \Delta v_I(a_1) + \Delta \theta_1(z - a_1) - \frac{\Delta M_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^3}{3!} + \frac{\Delta q_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^4}{4!}. \quad (11)$$

4. Универсальное уравнение упругой линии балки на третьем участке. Продолжим функцию $v_{II}(z)$ на III-ий участок:

$$v_{III}(z) = v_{II}(z) + \Delta v_{II}(z), \quad \Delta v_{II}(z) = v_{III}(z) - v_{II}(z). \quad (\text{е})$$

Записываем дифференциальные уравнения изогнутой оси балки по участкам:

$$v''_{II} = -M_{II}(z)/EJ_2, \quad v''_{III} = -M_{III}(z)/EJ_3. \quad (\text{ж})$$

Для второй производной от приращения функции $v_{II}(z)$ по координате z на III-ем участке $\Delta v''_{II}(z)$ получаем:

$$\Delta v''_{II}(z) = v''_{III}(z) - v''_{II}(z) = -\frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_3} M_{III}(z) - \frac{J_1}{J_2} M_{II}(z) \right]. \quad (3)$$

Разлагаем $\Delta v_{II}(z)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки $z = a_2$, то есть при $z \rightarrow a_2 + 0$. Учитываем, что точки разложения функций в ряд Тэйлора должны быть сдвинуты по оси z на отрезок a_2 . Получаем:

$$\Delta v_{II}(z) = \Delta v_{II}(a_2) + \Delta v'_{II}(a_2) \frac{z - a_2}{1} + \Delta v''_{II}(a_2) \frac{(z - a_2)^2}{2!} + \Delta v'''_{II}(a_2) \frac{(z - a_2)^3}{3!} + \Delta v_{IV}(a_2) \frac{(z - a_2)^4}{4!}. \quad (12)$$

Выражаем коэффициенты ряда (12) через значения функций $v_{II}(z)$ и $v_{III}(z)$, а также их производных при $z = a_2$ (значения $v_{III}(z)$ вычисляем при $z \rightarrow a_2 + 0$, $v_{II}(z)$ при $z \rightarrow a_2 - 0$):

$$\Delta v_{II}(a_2) = [v_{III} - v_{II}]_{z=a_2}; \quad \Delta v'_{II}(a_2) = [v'_{III} - v'_{II}]_{z=a_2} = [\theta_{III} - \theta_{II}]_{z=a_2};$$

$$\Delta v''_{II}(a_2) = [v''_{III} - v''_{II}]_{z=a_2} = -\frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_3} M_{III} - \frac{J_1}{J_2} M_{II} \right]_{z=a_2}; \quad (и)$$

$$\Delta v'''_{II}(a_2) = [v'''_{III} - v'''_{II}]_{z=a_2} = -\frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_3} Q_{III} - \frac{J_1}{J_2} Q_{II} \right]_{z=a_2};$$

$$\Delta v^{IV}_{II}(a_2) = [v^{IV}_{III} - v^{IV}_{II}]_{z=a_2} = \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{J_1}{J_3} q_3 - \frac{J_1}{J_2} q_2 \right]_{z=a_2}.$$

Вводим обозначения:

$$\Delta \theta_2 = [\theta_{III} - \theta_{II}]_{z=a_2}; \quad \Delta M_2 = \left[\frac{J_1}{J_3} M_{III} - \frac{J_1}{J_2} M_{II} \right]_{z=a_2};$$

$$\Delta Q_2 = \left[\frac{J_1}{J_3} Q_{III} - \frac{J_1}{J_2} Q_{II} \right]_{z=a_2}; \quad \Delta q_2 = \left[\frac{J_1}{J_3} q_3 - \frac{J_1}{J_2} q_2 \right]_{z=a_2}. \quad (к)$$

Подставляем (и) и (к) в уравнение (12):

$$\Delta v_{II}(z) = \Delta v_{II}(a_2) + \Delta \theta_2 (z - a_2) - \frac{\Delta M_2}{EJ_1} \frac{(z - a_2)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_2}{EJ_1} \frac{(z - a_2)^3}{3!} + \frac{\Delta q_2}{EJ_1} \frac{(z - a_2)^4}{4!}. \quad (л)$$

После подстановки (л) и (11) в первое соотношение (е) получим уравнение изогнутой оси балки на III - ем участке:

$$v_{III}(z) = v_{II}(z) + \Delta v_{II}(z) = v_0 + \theta_0 z - \frac{M_0}{EJ_1} \frac{z^2}{2!} - \frac{Q_0}{EJ_1} \frac{z^3}{3!} + \frac{q_1}{EJ_1} \frac{z^4}{4!} + \Delta v_{II}(a_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta\theta_1(z - a_1) - \frac{\Delta M_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^3}{3!} + \frac{\Delta q_1}{EJ_1} \frac{(z - a_1)^4}{4!} + \Delta v_{II}(a_2) + \\
& + \Delta\theta_2(z - a_2) - \frac{\Delta M_2}{EJ_1} \frac{(z - a_2)^2}{2!} - \frac{\Delta Q_2}{EJ_1} \frac{(z - a_2)^3}{3!} + \frac{\Delta q_2}{EJ_1} \frac{(z - a_2)^4}{4!}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Аналогичные уравнения можно получить на IV, V, ..., N-ом участках.

5. Универсальное уравнение упругой линии балки для N-го участка. Теперь нетрудно обобщить уравнение (13) на N-ый участок балки по индукции (предварительно левую и правую часть (13) умножаем на EJ_1):

$$\begin{aligned}
EJ_1 v_N(z) = EJ_1 v_0 + EJ_1 \theta_0 z - M_0 \frac{z^2}{2!} - Q_0 \frac{z^3}{3!} + q_1 \frac{z^4}{4!} + \sum_{k=1}^{N-1} \{ EJ_1 \Delta v_k + \\
+ EJ_1 \Delta \theta_k (z - a_k) - \Delta M_k \frac{(z - a_k)^2}{2!} - \Delta Q_k \frac{(z - a_k)^3}{3!} + \Delta q_k \frac{(z - a_k)^4}{4!} \}, \quad (14)
\end{aligned}$$

где Δv_k , $\Delta \theta_k$, ΔM_k , ΔQ_k , Δq_k вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\Delta v_k &= [v_{k+1} - v_k]_{z=a_k}; \quad \Delta \theta_k = [\theta_{k+1} - \theta_k]_{z=a_k}; \\
\Delta M_k &= \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} M_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} M_k \right]_{z=a_k}; \quad \Delta Q_k = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} Q_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} Q_k \right]_{z=a_k}; \\
\Delta q_k &= \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} q_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} q_k \right]_{z=a_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (15)
\end{aligned}$$

Выражение для углов поворота θ_N получим дифференцированием (14) по z ($\theta_N = \frac{d}{dz} v_N$):

$$\begin{aligned}
EJ_1 \theta_N(z) = EJ_1 \theta_0 - M_0 z - Q_0 \frac{z^2}{2!} + q_1 \frac{z^3}{3!} + \sum_{k=1}^{N-1} \{ EJ_1 \Delta \theta_k - \Delta M_k (z - a_k) - \\
- \Delta Q_k \frac{(z - a_k)^2}{2!} + \Delta q_k \frac{(z - a_k)^3}{3!} \}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Выражения (8), (11), (13), (14), (16) содержат 4 параметра: v_0, θ_0, M_0, Q_0 , которые должны быть определены из граничных условий, т.е. из условий закрепления балки.

Заметим, что если, например, $M_{k+1} = M_k$, то $\Delta M_k = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} M_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} M_k \right]_{z=a_k} = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} - \frac{J_1}{J_k} \right] M_k$; если $Q_{k+1} = Q_k$, то $\Delta Q_k = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} Q_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} Q_k \right]_{z=a_k} = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} - \frac{J_1}{J_k} \right] Q_k$; если $q_{k+1} = q_k$, то $\left[\frac{J_1}{J_{k+1}} q_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} q_k \right]_{z=a_k} = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} - \frac{J_1}{J_k} \right] q_k \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) q_1, k = 1, 2, \dots, N-1$.

Как видим, для балок переменного сечения, если даже M, Q, q – непрерывные функции, в тех местах, где изменяется изгибная жёсткость балки EJ , будут иметь место "скачки" изгибающих моментов ΔM , поперечных сил ΔQ и распределённых нагрузок Δq .

Для балок постоянного сечения ($EJ = \text{const}$) приращение поперечной силы ("скачок") в данном сечении равен приложенной сосредоточенной силе, приращение изгибающего момента ("скачок") – внешнему сосредоточенному моменту: $\Delta Q = F_e, \Delta M = M_e$.

Для балки постоянного поперечного сечения выражения (15) учитывают заданные "скачки" изгибающих моментов ΔM_k , поперечных сил ΔQ_k и распределённых нагрузок Δq_k :

$$\Delta M_k = M_{k+1} - M_k = M_e^{(k)}, \quad \Delta Q_k = Q_{k+1} - Q_k = F_e^{(k)}, \quad \Delta q_k = q_{k+1} - q_k,$$

которые определяются по исходной расчётной схеме балки без построения эпюр Q, M .

Для балки ступенчато-изменяющегося сечения необходимо предварительно построить эпюры Q, M , так как нужно иметь числовые значения Q и M слева и справа от сечения.

В типичных случаях закрепления простых балок (как показано на рис.1,б) для определения начальных параметров необходимо найти решение системы алгебраических уравнений не выше 2-го порядка.

Для обычных неразрезных балок универсальное уравнение упругой линии (14) несколько упрощается, поскольку в таких балках изогнутая ось – непрерывная гладкая кривая, для которой $\Delta v_k = 0, \Delta \theta_k = 0$:

$$EJ_1 v_N(z) = EJ_1 v_0 + EJ_1 \theta_0 z - M_0 \frac{z^2}{2!} - Q_0 \frac{z^3}{3!} + q_1 \frac{z^4}{4!} + \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ -\Delta M_k \frac{(z - a_k)^2}{2!} - \right.$$

$$- \Delta Q_k \frac{(z - a_k)^3}{3!} + \Delta q_k \frac{(z - a_k)^4}{4!} \}. \quad (17)$$

6. Примеры построения уравнения изогнутой оси балки

Пример 1. Консольная балка переменной жесткости. Расчётная схема и эпюры перерезывающих сил Q и изгибающих моментов M представлены на рис.2.

Левый конец балки жестко зашпелен, на правом конце приложена сосредоточенная сила F . На части балки, примыкающей к заделке, изгибная жесткость равна EJ_1 , на остальной части – EJ_2 . Требуется построить уравнение изогнутой оси балки $v(z)$ и уравнение углов поворота поперечных сечений $\theta(z)$.

Используем универсальное уравнение упругой линии (11) на первом и втором участке. Так как упругая линия балки непрерывная гладкая кривая, то $\Delta v_1 = 0$, $\Delta \theta_1 = 0$. Начальные параметры: $v_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $M_0 = -Fl$, $Q_0 = F$.

Первый участок: $0 < z \leq a_1$:

$$EJ_1 v_I(z) = Fl \frac{z^2}{2} - F \frac{z^3}{3!} = \frac{Fz^2}{2} \left(\frac{3l - z}{3} \right).$$

Дифференцируя, получим:

$$EJ_1 \theta_I(z) = Flz - \frac{1}{2} Fz^2.$$

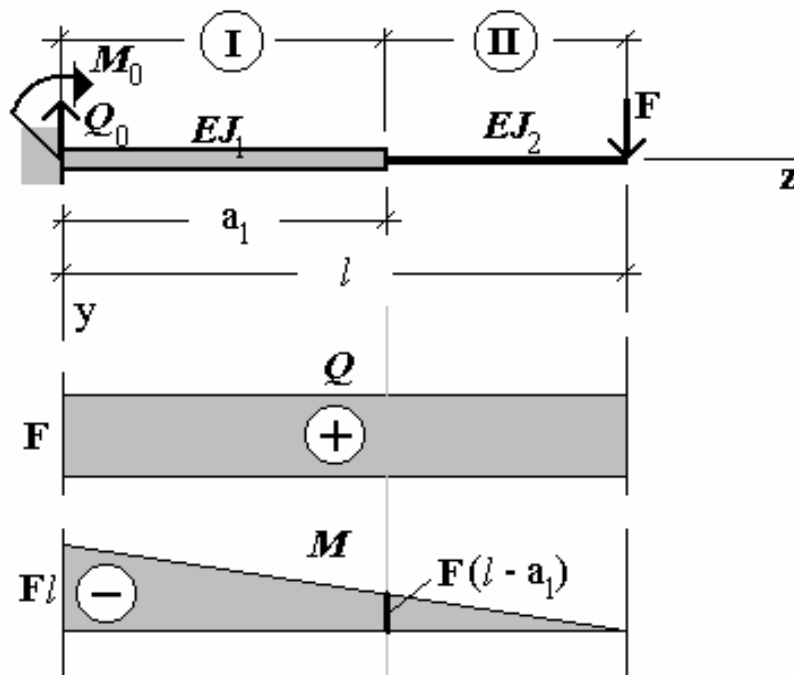


Рис.2. Консольная балка переменной жесткости.
Второй участок: $a_1 \leq z < l$.

$$\Delta M_1 = \left[\frac{J_1}{J_2} M_{II} - \frac{J_1}{J_1} M_I \right]_{z=a_1} = \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) M(a_1) = - \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) F(1 - a_1);$$

$$\Delta Q_1 = \left[\frac{J_1}{J_2} Q_{II} - \frac{J_1}{J_1} Q_I \right]_{z=a_1} = \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) Q(a_1) = \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) F;$$

$$EJ_1 v_{II} = Fl \frac{z^2}{2} - F \frac{z^3}{3!} + \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) F(1 - a_1) \frac{(z - a_1)^2}{2} - \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) F \frac{(z - a_1)^3}{3!};$$

$$EJ_1 \theta_{II} = Flz - \frac{1}{2} Fz^2 + \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) F(1 - a_1)(z - a_1) - \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) F \frac{(z - a_1)^2}{2}.$$

Преобразуя выражение для v_{II} , найдем:

$$v_{II} = \frac{F}{6EJ_1} \left[(3l - z)z^2 + \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) (3l - 2a_1 - z)(z - a_1)^2 \right].$$

Пример 2. Балка переменной жесткости на двух опорах. Расчётная схема и эпюры перерезывающих сил Q и изгибающих моментов M представлены на рис.3. Соотношения между осевыми моментами инерции: $J_1 = J$, $J_2 = J$, $J_3 = 3J$.

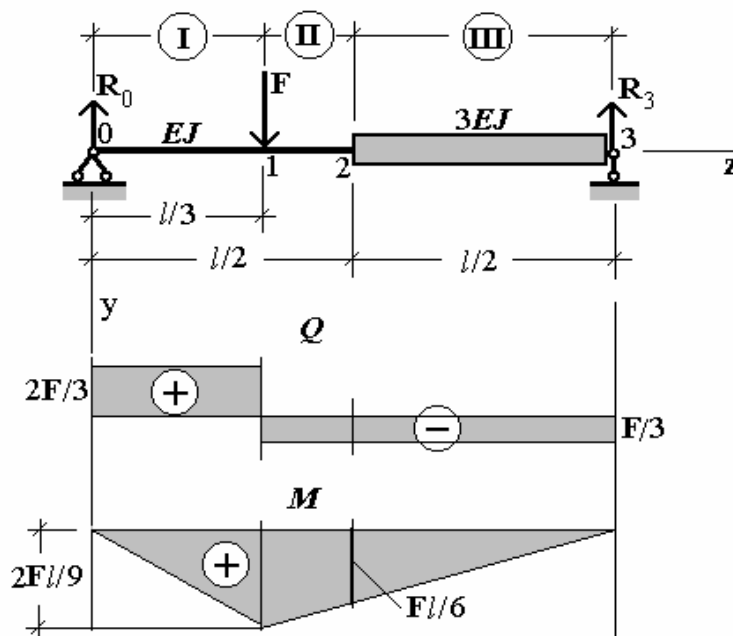


Рис.3. Простая балка переменного сечения.

Требуется построить уравнение изогнутой оси балки $v(z)$ и уравнение углов поворота поперечных сечений $\theta(z)$.

Граничные условия: $v_0 = 0$, $v(l) = 0$; $M_0 = 0$, $Q_0 = R_0$; угол поворота поперечного сечения θ_0 неизвестен. Опорные реакции:

$$R_0 = \frac{2}{3}F, \quad R_3 = \frac{1}{3}F.$$

Для определения θ_0 используем универсальное уравнение упругой линии (13) на третьем участке. Так как упругая линия балки непрерывная гладкая кривая, то $\Delta v_1 = 0$, $\Delta \theta_1 = 0$, $\Delta v_2 = 0$, $\Delta \theta_2 = 0$.

Первый участок: $0 < z \leq l/3$: $EJ_1 v_I = EJ_1 \theta_0 z - \frac{2}{3}F \frac{z^3}{3!}$.

Второй участок: $l/3 < z < l/2$: $\Delta v_1 = 0$, $\Delta \theta_1 = 0$; $\Delta M_1 = 0$, $\Delta Q_1 = -F$, $\Delta q_1 = 0$;

$$EJ_1 v_{II} = EJ_1 \theta_0 z - \frac{2}{3}F \frac{z^3}{3!} + F \frac{(z - l/3)^3}{3!}.$$

Третий участок: $l/2 < z \leq l$: $\Delta v_2 = 0$, $\Delta \theta_2 = 0$;

$$\Delta M_2 = \left[\frac{J_1}{J_3} M_{III} - \frac{J_1}{J_2} M_{II} \right]_{z=0,5l} = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \frac{1}{6} Fl = -\frac{1}{9} Fl;$$

$$\Delta Q_2 = \left[\frac{J_1}{J_3} Q_{III} - \frac{J_1}{J_2} Q_{II} \right]_{z=0,5l} = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(-\frac{1}{3} F \right) = \frac{2}{9} F; \quad \Delta q_2 = 0;$$

$$EJ_1 v_{III} = EJ_1 \theta_0 z - \frac{1}{9} Fz^3 + \frac{1}{6} F(z - l/3)^3 + \frac{1}{18} Fl(z - l/2)^2 - \frac{1}{27} F(z - l/2)^3.$$

Определяем θ_0 из условия, что при $z = l$ $v_{III} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= EJ_1 \theta_0 l - \frac{1}{9} Fl^3 + \frac{1}{6} F(2l/3)^3 + \frac{1}{18} Fl(l/2)^2 - \frac{1}{27} F(l/2)^3 = \\ &= EJ_1 \theta_0 l - \frac{1}{9} Fl^3 + \frac{4}{81} Fl^3 + \frac{1}{72} Fl^3 - \frac{1}{216} Fl^3 = EJ_1 \theta_0 l - \frac{17}{324} Fl^3. \end{aligned}$$

Второй начальный параметр вычислен: $EJ_1 \theta_0 = + \frac{17}{324} Fl^2$.

Теперь все начальные параметры известны и можно написать уравнение упругой линии по участкам:

$$v_I(z) = \frac{F}{EJ} \left(\frac{17}{324} l^2 z - \frac{1}{9} z^3 \right);$$

$$v_{II}(z) = \frac{F}{EJ} \left[\frac{17}{324} l^2 z - \frac{1}{9} z^3 + \frac{1}{162} (3z-1)^3 \right];$$

$$v_{III}(z) = \frac{F}{EJ} \left[\frac{17}{324} l^2 z - \frac{1}{9} z^3 + \frac{1}{162} (3z-1)^3 + \frac{1}{72} l(2z-1)^2 - \frac{1}{216} (2z-1)^3 \right]$$

Выражения для углов поворота сечений определяются дифференцированием полученных уравнений для прогибов балки.

Пример 3. Двухконсольная балка переменного сечения. Расчётная схема и эпюры перерезывающих сил Q и изгибающих моментов M представлены на рис.4.

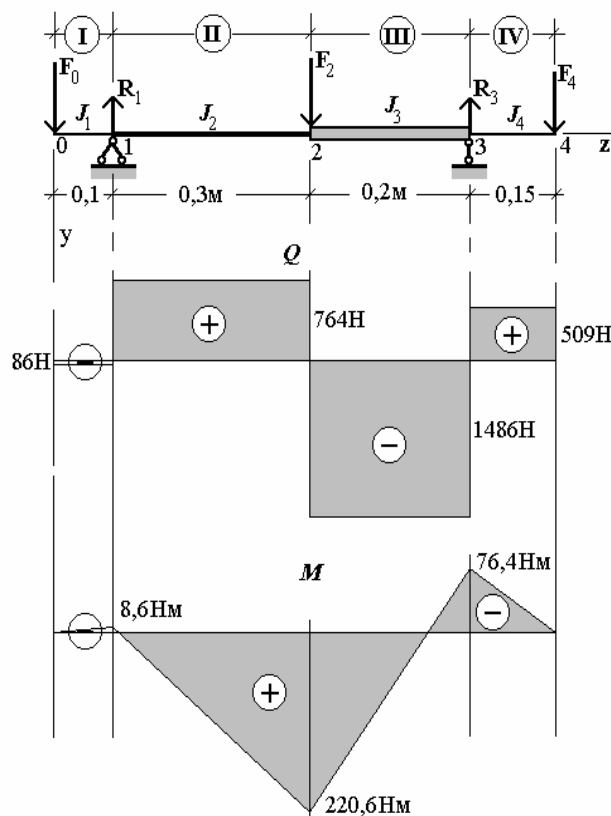


Рис.4. Двухконсольная балка переменного сечения.

Исходные данные: $E = 200$ ГПа; $J_1 = 5,15 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $J_2 = 10,23 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $J_3 = 20,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $J_4 = J_1$; $F_0 = 86 \text{ Н}$, $F_2 = 2250 \text{ Н}$, $F_4 = 509 \text{ Н}$.

Требуется построить уравнения прогибов и углов поворота поперечных сечений балки.

Опорные реакции: $R_1 = 850 \text{ Н}$, $R_3 = 1995 \text{ Н}$.

Используем универсальное уравнение упругой линии балки (14) для N-го участка.

Поскольку в расчетной схеме $q_k = 0$, а также $\Delta v_k = 0$, $\Delta \theta_k = 0$, универсальное уравнение упругой линии (14) упрощается и получает вид:

$$EJ_1 v_N(z) = EJ_1 V_0 + EJ_1 \theta_0 z - M_0 \frac{z^2}{2} - Q_0 \frac{z^3}{6} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[-\Delta M_k \frac{(z - a_k)^2}{2} - \Delta Q_k \frac{(z - a_k)^3}{6} \right], \quad (18)$$

$$\text{где } \Delta M_k = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} M_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} M_k \right]_{z=a_k}, \quad \Delta Q_k = \left[\frac{J_1}{J_{k+1}} Q_{k+1} - \frac{J_1}{J_k} Q_k \right]_{z=a_k}.$$

Начальные параметры: $M_0 = 0$, $Q_0 = -86$ Н; параметры v_0 и θ_0 необходимо определить из условий закрепления балки.

Для определения v_0 , θ_0 используем граничные условия:

$$v_I \Big|_{z=0,1} = 0; \quad v_{III} \Big|_{z=0,6} = 0. \quad (19)$$

Вычисляем ΔM_k , ΔQ_k :

$$\Delta M_1 = \left(\frac{5,15}{10,23} - 1 \right) (-8,6) = 4,27 \text{ Нм};$$

$$\Delta Q_1 = \frac{5,15}{10,23} 764 + 86 = 470,61 \text{ Н};$$

$$\Delta M_2 = \left(\frac{5,15}{20,2} - \frac{5,15}{10,23} \right) 220,6 = -54,81 \text{ Нм};$$

$$\Delta Q_2 = \frac{5,15}{20,2} (-1486) - \frac{5,15}{10,23} 764 = -378,86 - 384,61 = -763,47 \text{ Н};$$

$$\Delta M_3 = \left(\frac{5,15}{5,15} - \frac{5,15}{20,2} \right) (-76,4) = -56,92 \text{ Нм};$$

$$\Delta Q_3 = \frac{5,15}{5,15} 509 - \frac{5,15}{20,2} (-1486) = 509 + 378,86 = 887,86 \text{ Н}.$$

Записываем выражения для прогибов балки на первом и третьем участках – v_I и v_{III} :

$$EJ_1 v_I(z) = EJ_1 v_0 + EJ_1 \theta_0 z + 86 \frac{z^3}{6};$$

$$EJ_1 v_{III}(z) = EJ_1 v_0 + EJ_1 \theta_0 z + 86 \frac{z^3}{6} - 4,27 \frac{(z-0,1)^2}{2} - 470,61 \frac{(z-0,1)^3}{6} + \\ + 54,81 \frac{(z-0,4)^2}{2} + 763,47 \frac{(z-0,4)^3}{6}.$$

Используем граничные условия (19) для определения начальных параметров v_0 и θ_0 :

$$\begin{cases} EJ_1 v_I(0,1) = EJ_1 v_0 + EJ_1 \theta_0 \cdot 0,1 + 14,33 \cdot 10^{-3} = 0; \\ EJ_1 v_{III}(0,6) = EJ_1 v_0 + EJ_1 \theta_0 \cdot 0,6 - 5,128 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Изгибная жёсткость на первом участке: $EJ_1 = 200 \cdot 10^9 \cdot 5,15 \cdot 10^{-8} = 10,3 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$.

Разделив уравнения (20) на EJ_1 , для определения начальных параметров v_0 , θ_0 окончательно получим систему уравнений:

$$\begin{cases} v_0 + 0,1\theta_0 = -\frac{14,33 \cdot 10^{-3}}{10,3 \cdot 10^3} = -1,391 \cdot 10^{-6}; \\ v_0 + 0,6\theta_0 = \frac{5,128}{10,3 \cdot 10^3} = 0,498 \cdot 10^{-3}. \end{cases} \quad (21)$$

Из решения системы уравнений (21) находим:

$$v_0 = -1 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \theta_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Мы получили прогиб и угол поворота в точке $z = 0$, то есть на конце левой консоли. Таким образом, уравнения прогибов и углов поворота поперечных сечений балки имеют вид

– на первом участке:

$$v_I = -1 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-3} z + 97,087 \cdot 10^{-6} \cdot 86 \frac{z^3}{6}; \quad (22)$$

$$\theta_I = 1 \cdot 10^{-3} + 97,087 \cdot 10^{-6} \cdot 86 \frac{z^2}{6}; \quad (23)$$

– на втором участке:

$$v_{II} = -1 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-3}z + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[86 \frac{z^3}{6} - 4,27 \frac{(z-0,1)^2}{2} - 470,61 \frac{(z-0,1)^3}{6} \right]; \quad (24)$$

$$\theta_{II} = 1 \cdot 10^{-3}z + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[86 \frac{z^2}{2} - 4,27(z-0,1) - 470,61 \frac{(z-0,1)^2}{2} \right]; \quad (25)$$

– на третьем участке:

$$v_{III} = -0,1 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3}z + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[86 \frac{z^3}{6} - 4,27 \frac{(z-0,1)^2}{2} - 470,61 \frac{(z-0,1)^3}{6} + 54,81 \frac{(z-0,4)^2}{2} + 763,47 \frac{(z-0,4)^3}{6} \right]; \quad (26)$$

$$\theta_{III} = 1 \cdot 10^{-3} + 97,087 \cdot 10^{-6} \cdot \left[86 \frac{z^2}{2} - 4,27(z-0,1) - 470,61 \frac{(z-0,1)^2}{2} + 54,81(z-0,4) + 763,47 \frac{(z-0,4)^2}{2} \right]; \quad (27)$$

– на четвёртом участке:

$$v_{IV} = v_{III} + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[56,92 \frac{(z-0,6)^2}{2} - 887,86 \frac{(z-0,6)^3}{6} \right]; \quad (28)$$

$$\theta_{IV} = \theta_{III} + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[56,92(z-0,6) - 887,86 \frac{(z-0,6)^2}{2} \right]. \quad (29)$$

В уравнениях (22)÷(29) все члены разделены на $EJ_1 = 10,3 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$.

Вычисляем прогибы в точке 2 при $z = 0,4$ м и в точке 4 при $z = 0,75$ м. Используем выражения (24), (28) для $v_{II}(z)$ и $v_{IV}(z)$:

$$\begin{aligned}
v_{II}(0,4) &= 0,1 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4 + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[86 \frac{(0,4)^3}{6} - 4,27 \frac{(0,3)^2}{2} - \right. \\
&\quad \left. - 470,61 \frac{(0,3)^3}{6} \right] = 0,3 \cdot 10^{-3} - 0,135 \cdot 10^{-3} = 0,165 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\
v_{IV}(0,75) &= 0,1 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,75 + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[86 \frac{(0,75)^3}{6} - \right. \\
&\quad \left. - 4,27 \frac{(0,65)^2}{2} - 470,61 \frac{(0,65)^3}{6} + 54,81 \frac{(0,35)^2}{2} + 763,47 \frac{(0,35)^3}{6} + \right. \\
&\quad \left. 56,9 \frac{(0,15)^2}{2} - 887,86 \frac{(0,15)^3}{6} \right] = 0,65 \cdot 10^{-3} + 97,087 \cdot 10^{-6} (-7,444) = \\
&= 0,65 \cdot 10^{-3} - 0,722 \cdot 10^{-3} = -0,073 \cdot 10^{-3} \text{ м}.
\end{aligned}$$

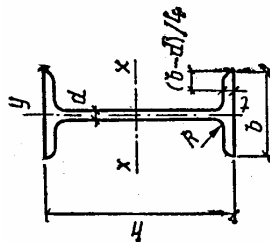
Вычисляем углы поворота на опорах (в точке 1 при $z = 0,1$ и в точке 3 при $z = 0,6$ м). Используем выражения (23), (27) для $\theta_I(z)$ и $\theta_{III}(z)$:

$$\begin{aligned}
\theta_I(0,1) &= 1 \cdot 10^{-3} + 97,087 \cdot 10^{-6} \cdot 86 \frac{(0,1)^2}{2} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \\
\theta_{III}(0,6) &= 1 \cdot 10^{-3} + 97,087 \cdot 10^{-6} \left[86 \frac{(0,6)^2}{2} - 4,27 \cdot 0,5 - 470,61 \cdot \frac{(0,5)^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + 54,81 \cdot 0,2 + 763,47 \frac{(0,2)^2}{2} \right] = 1 \cdot 10^{-3} + 97,087 \cdot 10^{-6} (41,711 - 60,96) = \\
&= 1 \cdot 10^{-3} - 1,869 \cdot 10^{-3} = -0,869 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}
\end{aligned}$$

Метод начальных параметров для определения перемещений балок постоянного поперечного сечения изложен в учебной литературе [1÷4,6].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Сортамент стальных прокатных профилей
Двутавровые балки (по ГОСТ 8239-72*)



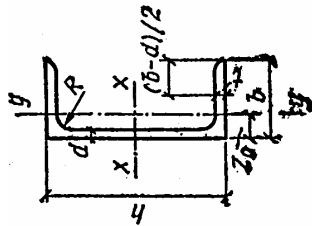
h – высота балки; b – ширина полки; d – толщина стенки; t – средняя толщина полки; R – радиус внутреннего закругления; J – момент инерции; W – момент сопротивления; S – статический момент полусечения; t – радиус инерции; J_t – момент инерции при кручении.

* Профили, рекомендуемые по сокращенному сортаменту, утвержденному от 20.04.1984 г. № 59 Госстроем СССР.

Номер балки	Размер, мм				A , см ²	Масса 1 м, кг	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_{x_3} , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	J_t , см ⁴
	h	b	d	t										
10*	100	55	4,5	7,2	12	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22	2,28
12*	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	2,88
14*	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	3,59
16*	160	81	5	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7	4,46
18*	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	82,4	82,6	18,4	1,88	5,6
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	6,92
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	8,6
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	11,1
27	270	125	6	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	13,6
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	17,4
33	330	140	7	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	23,8
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	31,4
40	400	155	8,3	13	72,7	57	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	40,6
45	450	160	9	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	54,7
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	75,4
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	100
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,8	1491	1725	182	3,54	135

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Сортамент швеллеров (по ГОСТ 8240-72*)



h – высота швеллера; b – ширина полки; d – толщина стенки; t – средняя толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления; J – момент инерции; W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции; S – статический момент полусечения; Z_0 – расстояние от оси y – y до наружной грани стенки; A – площадь поверхности сечения; J_t – момент инерции при кручении.

* Профили, рекомендуемые по сокращенному сортаменту, утвержденному от 20.04.1984 г.
 № 59 Госстроем СССР.

Номер профиля	Масса I м, кг	Размер, мм				A , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Z_0 , см	J_t , см ⁴	
		h	b	d	t											R
5	4,84	50	32	4,4	7	6	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,1	1
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	6	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24	1,2
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	1,52
10*	8,59	100	46	4,5	7,6	7	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	1,96
12*	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	2,56
14*	12,3	140	58	4,9	8,1	8	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67	3,19
16*	14,2	160	64	5	8,4	8,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8	3,97
18*	16,3	180	70	5,1	8,7	9	20,7	1090	121	7,24	68,8	86	17	2,04	1,94	4,87
20*	18,4	200	76	5,2	9	9,5	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07	5,9
22*	21	220	82	5,4	9,5	10	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	7,48
24*	24	240	90	5,6	10	10,5	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42	9,6
27*	27,7	270	95	6	10,5	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	11,98
30*	31,8	300	100	6,5	11	12	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52	14,98
33	36,5	330	105	7	11,7	13	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	19,21
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68	25,1
40*	48,3	400	115	8	13,5	15	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	32,41

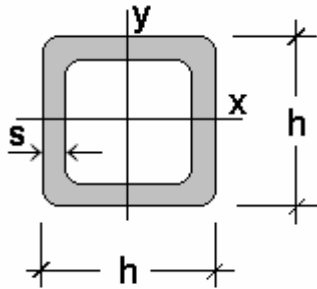
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

	<p>Трубы стальные электросварные прямошовные по ГОСТ 10704 – 91</p>
---	--

Размеры, мм		Линейная плотность, кг/м	Площадь, см ²	Радиус инерции, см	Размеры, мм		Линейная плотность, кг/м	Площадь, см ²	Радиус инерции, см
D	s				D	s			
63,5	3,5	5,2	6,6	2,1	168	5,0	20,1	25,6	5,8
	3,8	5,6	7,1	2,1		5,5	22,0	28,1	5,8
70	3,5	5,7	7,3	2,4		6,0	24,0	30,5	5,7
	3,8	6,2	7,9	2,4		7,0	27,8	35,4	5,7
	4,0	6,5	8,3	2,3		219	5,0	26,4	33,6
76	4,0	7,1	9,0	2,6			6,0	31,5	40,2
	4,5	7,9	10,1	2,5	7,0		36,6	46,6	7,5
	5,0	8,8	11,1	2,5	8,0		41,6	53,0	7,5
	5,5	9,6	12,2	2,3	9,0		46,6	59,4	7,4
89	4,0	8,4	10,7	3,0	10,0		51,5	65,6	7,4
	4,5	9,4	11,9	3,0	12,0	61,3	78,0	7,3	
	5,0	10,4	13,2	3,0	273	7,0	45,9	58,5	9,4
5,5	11,3	14,4	3,0	8,0		52,3	66,6	9,4	
102	4,0	9,7	12,3	3,5	325	7,0	54,9	69,9	11,2
	4,5	10,8	13,8	3,5		8,0	62,5	79,6	11,2
	5,0	12,0	15,2	3,4		9,0	70,1	89,3	11,2
108	4,0	10,3	13,1	3,7	426	6,0	62,1	79,2	14,9
	4,5	11,5	14,6	3,7		7,0	72,3	92,1	14,8
	5,0	12,7	16,2	3,7		8,0	82,5	105,0	14,8
	5,5	13,9	17,7	3,6		9,0	92,6	118,0	14,8
114	4,5	12,2	15,5	3,9		10,0	102,6	131,0	14,7
	5,0	13,4	17,1	3,9		530	9,0	115,6	147,0
	5,5	14,7	18,8	3,8	10,0		128,2	163,0	18,4
127	4,5	13,6	17,3	4,3	11,0		140,8	179,0	18,4
	5,0	15,0	19,2	4,3	12,0	153,3	197,0	18,3	
	5,5	16,5	21,0	4,3	630	7,0	107,5	137,0	22,0
133	4,5	14,3	18,2	4,6		8,0	122,7	153,0	22,0
	5,0	15,8	20,1	4,5		9,0	137,8	175,0	22,0
	5,5	17,3	22,0	4,5		10,0	152,9	195,0	21,9
152	4,5	16,4	20,8	5,2	11,0	167,9	214,0	21,9	
	5,0	18,1	23,1	5,2		12,0	182,9	233,0	21,8
	5,5	19,9	25,3	5,2					

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Профили гнутые замкнутые сварные квадратные по ТУ 36 – 2287



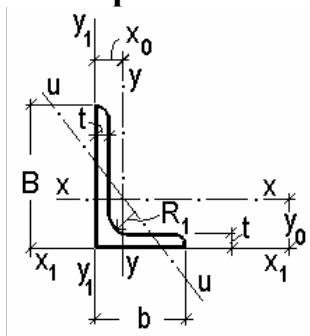
Размеры, мм		Линейная плотность, кг/м	Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные данные для осей		
h	s			x – x , y – y		
				$J_x = J_y,$ см ⁴	$W_x =$ $W_y,$ см ³	$i_x = i_y,$ см
80	3	7,26	9,24	91,4	22,8	3,14
	4	9,54	12,16	117,3	29,3	3,10
	5	11,77	15	141,2	35,3	3,07
	6	13,94	17,76	163,1	40,7	3,03
100	3	9,13	11,64	182,7	36,5	3,96
	4	12,05	15,36	236,3	47,2	3,92
	5	14,92	19	286,5	57,3	3,89
	6	17,71	22,56	333,5	66,7	3,84
120	3	11,02	14,04	320,5	53,4	4,77
	4	14,57	18,56	416,7	69,4	4,74
	5	18,06	23	507,9	84,6	4,69
	6	21,48	27,36	594,2	99	4,66
140	4	17,08	21,76	671,3	95,9	5,55
	5	21,19	27	821,2	117,3	5,51
	6	25,24	32,16	964,3	137,7	5,48
	7	29,23	37,24	1100,9	157,2	5,44
	8	33,16	42,24	1231,1	175,8	5,39
160	4	19,6	24,96	1013	126,6	6,37
	5	24,33	31	1242,5	155,3	6,33
	6	29,01	36,96	1463,1	182,8	6,29
	7	33,63	42,84	1647,9	209,3	6,25
	8	38,18	48,64	1878,1	234,7	6,21
180	5	27,47	35	1787,9	198,6	7,15
	6	32,78	41,76	2109,7	234,4	7,11
	7	38,02	48,44	2420,2	268,9	7,07
	8	43,21	55,04	2719,7	302,1	7,03

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Сталь круглая по ГОСТ 2590 — 71*

Диаметр D, мм	Площадь A, см ²	Линейная плотность, кг/м	Диаметр D, мм	Площадь A, см ²	Линейная плотность, кг/м
5	0,196	0,154	45	15,9	12,48
5,6	0,246	0,193	48	18,1	14,21
6	0,283	0,222	50	19,64	15,42
6,3	0,312	0,245	53	22,06	17,32
6,5	0,332	0,26	56	24,63	19,33
7	0,385	0,302	60	28,27	22,19
8	0,503	0,395	63	31,17	24,47
9	0,636	0,499	65	33,18	26,05
10	0,785	0,617	70	38,48	30,21
11	0,95	0,746	75	44,18	34,68
12	1,131	0,888	80	50,27	39,46
13	1,327	1,04	85	56,75	44,55
14	1,539	1,21	90	63,62	49,94
15	1,767	1,39	95	70,88	55,64
16	2,011	1,58	100	78,54	61,65
17	2,27	1,78	105	86,59	67,97
18	2,545	2	110	95,03	74,6
19	2,835	2,23	120	113,1	88,78
20	3,142	2,47	125	122,72	96,33
21	3,464	2,72	130	132,73	104,2
22	3,801	2,98	140	153,94	120,84
24	4,524	3,55	150	176,72	138,72
25	4,909	3,85	160	201,06	157,83
26	5,309	4,17	170	226,98	178,18
28	6,158	5,83	180	254,47	199,76
30	7,069	5,55	190	283,53	222,57
32	8,042	6,31	200	314,16	246,62
34	9,079	7,13	210	346,36	271,89
36	10,18	7,99	220	380,13	298,4
38	11,34	8,9	240	452,39	355,13
40	12,57	9,87	250	490,88	385,34
42	13,85	10,87			

Неравнополочные уголки (выборка из ГОСТ 8510 — 72*)



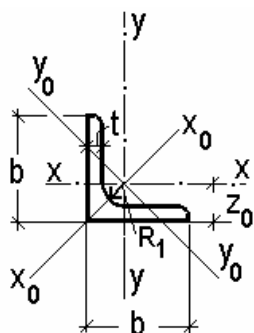
B — ширина большой полки; b — ширина малой полки; t — толщина полки; J — момент инерции; i — радиус инерции; A — площадь поверхности сечения

Размер			R_1 , мм	A , см ²	Масса 1 м, кг	y_0 , см	x_0 , см	J_x , см ⁴	i_x , см	J_y , см ⁴	i_y , см	J_{x1} , см ⁴
B	b	t										
63	40	5	7	4,98	3,91	2,08	0,86	19,9	2	6,26	1,12	41,4
		6		5,9	4,63	2,12	0,99	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9
		8		7,68	6,03	2,2	1,07	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9
70	45	5	7,5	7,5	5,59	4,39	2,28	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7
75	50	5	8	6,11	4,79	2,39	1,17	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7
		6		7,25	5,69	2,44	1,21	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9
		8		9,47	7,43	2,52	1,29	52,4	2,35	18,5	1,40	112
80	50	5	8	6,36	4,99	2,6	1,13	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6
		6		7,55	5,92	2,65	1,17	49	2,55	14,8	1,4	102
90	56	5,5	9	7,86	6,17	2,92	1,26	65,3	2,88	19,7	1,58	132
		6		8,54	6,7	2,95	1,28	70,6	2,88	21,2	1,58	155
		8		11,87	8,77	3,04	1,36	90,9	2,85	27,1	1,56	194
100	63	6	10	9,59	7,53	3,23	1,42	98,3	3,2	30,6	1,79	198
		7		11,1	8,7	3,28	1,46	113	3,19	35	1,78	232
		8		12,6	9,87	3,32	1,5	127	3,18	39,2	1,77	266
		10		15,5	12,1	3,4	1,58	154	3,15	47,1	1,75	383
110	70	6,5	10	11,4	8,98	3,55	1,58	142	3,53	45,6	2	286
		7		12,3	9,64	3,57	1,6	152	3,52	48,7	1,99	309
		8		13,9	10,9	3,61	1,64	172	3,51	54,6	1,98	353
125	80	7	11	14,1	11	4,01	1,8	227	4,01	73,7	2,29	452
		8		16	12,5	4,05	1,84	256	4	83	2,28	518
		10		19,7	15,5	4,14	1,92	312	3,98	100	2,26	648
		12		23,4	18,3	4,22	2	365	3,95	117	2,24	781
140	90	8	12	18	14,1	4,49	2,03	364	4,49	120	2,58	727
		10		12,2	17,5	4,58	2,12	444	4,47	146	2,56	911
160	100	9	13	22,9	18	5,19	2,23	606	5,15	186	2,85	1221
		10		25,3	19,8	5,23	2,28	667	5,13	204	2,84	1359
		12		30,0	23,6	5,32	2,36	784	5,11	239	2,82	1634
		14		34,7	27,3	5,4	2,43	897	5,08	272	2,8	1916
180	110	10	14	28,3	22,2	5,88	2,44	952	5,8	276	3,12	1933
		12		33,7	26,4	5,97	2,52	1123	5,77	324	3,1	2324

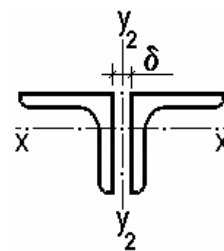
200	125	11	14	34,9	27,4	6,5	2,79	1449	6,45	446	3,58	2920
		12		37,9	29,7	6,54	2,83	1568	6,43	482	3,57	3189
		14		43,9	34,4	6,62	2,91	1801	6,41	551	3,54	3726
		16		49,8	39,1	6,71	2,99	2026	6,38	617	3,52	4264
250	160	12	18	48,3	37,9	7,97	3,53	3147	8,07	1032	4,62	6212
		16		63,6	49,9	8,14	3,69	4091	8,07	1333	4,58	8308
		18		71,7	55,8	8,23	3,77	4545	7,99	1475	4,56	9358
		20		78,5	61,7	8,31	3,85	4987	7,97	1613	4,53	10410

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Равнополочные уголки (выборка из ГОСТ 8509—86)



b — ширина полки; t — толщина полки; J — момент инерции; i — радиус инерции; δ — расстояние между уголками; A — площадь поверхности сечения.



* — профили, рекомендуемые по сокращенному сортаменту, утвержденному Госстроем СССР от 20.IV.1984, № 69.

Размер уголка, мм		R _t , мм	A, см ²	Масса 1 м, кг	z ₀ , см	J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x1} , см ⁴	J _{x0} , см ⁴	i _{x0} , см	J _{y0} , см ⁴	i _{y0} , см	Радиус инерции i _{y2} для двух уголков при δ, мм			
b	t												8	10	12	14
45	4	5	3,48	2,73	1,26	6,63	1,38	12,1	10,5	1,74	2,74	0,89	2,16	2,24	2,32	2,4
	5		4,29	3,37	1,3	8,03	1,37	15,3	12,7	1,72	3,33	0,88	2,18	2,26	2,34	2,42
50*	4	5,5	3,89	3,05	1,38	9,21	1,54	16,6	14,6	1,94	3,8	0,99	2,35	2,43	2,51	2,59
	5*		4,8	3,77	1,42	11,2	1,53	20,9	17,8	1,92	4,63	0,98	2,38	2,45	2,53	2,61
56	4	6	4,38	3,44	1,52	13,1	1,73	23,3	20,8	2,18	5,41	1,11	2,58	2,66	2,73	2,81
	5		5,41	4,25	1,57	16	1,72	29,2	25,4	2,16	6,59	1,1	2,61	2,72	2,77	2,85
63*	4	7	4,96	3,9	1,69	18,9	1,95	33,1	29,9	2,45	7,81	1,25	2,86	2,93	3,01	3,09
	5*		6,13	4,81	1,74	23,1	1,94	42,5	36,6	2,44	9,52	1,25	2,89	2,96	3,04	3,12
	6		7,28	5,72	1,78	27,1	1,93	50	42,9	2,43	11,2	1,24	2,9	2,99	3,06	3,14
70*	4,5	8	6,2	4,87	1,88	29	2,16	51	46	2,72	12	1,39	3,21	3,21	3,29	3,37
	5*		6,86	5,38	1,9	31,9	2,16	56,7	50,7	2,72	13,2	1,39	3,16	3,23	3,3	3,38
	6*		8,15	6,39	1,94	37,6	2,15	68,4	59,6	2,71	15,5	1,38	3,18	3,25	3,33	3,4
	7		9,42	7,39	1,99	43	2,14	80,1	68,2	2,69	17,8	1,37	3,2	3,28	3,38	3,44
75*	8	9	10,7	8,37	2,02	48,2	2,13	91,9	76,4	2,68	20	1,37	3,22	3,29	3,37	3,45
	5		7,39	5,8	2,02	39,5	2,31	69,6	62,6	2,91	16,4	1,49	3,35	3,42	4,49	3,57
	6*		8,78	6,89	2,06	46,6	2,3	83,9	73,9	2,9	19,3	1,48	3,3	3,44	3,52	3,6
	7		10,1	7,96	2,1	53,3	2,29	98,3	84,6	2,89	22,1	1,48	3,4	3,47	3,54	3,62
80*	8	9	11,5	9,02	2,15	59,8	2,28	113	94,9	2,87	24,8	1,47	3,43	3,5	3,57	3,65
	9		12,8	10,1	2,18	66,1	2,27	127	105	2,86	27,5	1,46	3,44	3,51	3,59	3,67
	5,5		8,63	6,78	2,17	52,7	2,47	93,2	83,6	3,11	21,8	1,59	3,57	3,64	3,71	3,79
	6		9,38	7,36	2,19	57	2,47	102	90,4	3,11	23,5	1,58	3,58	3,65	3,72	3,8
90*	7*	10	10,8	8,51	2,23	65,3	2,45	119	104	3,09	27	1,58	3,6	3,67	3,75	3,82
	8		12,3	9,65	2,27	73,4	2,44	137	116	3,08	30,3	1,57	3,62	3,69	3,77	3,84
90*	6*	10	10,6	8,33	2,43	82,1	2,78	145	130	3,5	34	1,79	3,96	4,04	4,11	4,19
	7*		12,3	9,64	2,47	94,3	2,77	169	150	3,49	38,9	1,78	3,99	4,06	4,13	4,21
	8		13,9	10,9	2,51	106	2,76	194	168	3,48	43,8	1,77	4,01	4,08	4,16	4,23
	9		15,6	12,2	2,55	118	2,75	219	186	3,46	48,6	1,77	4,04	4,11	4,18	4,26

ПРИЛОЖЕНИЕ 9. Продолжение.

Размер уголка, мм		R _t , мм	A, см ²	Мас-са 1 м, кг	z ₀ , см	J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x1} , см ⁴	J _{x0} , см ⁴	i _{x0} , см	J _{y0} , см ⁴	i _{y0} , см	Радиус инерции i _{y2} для двух уголков при δ, мм			
b	t												8	10	12	14
110*	7 8*	12	15,2 17,2	11,9 13,5	2,96 3,0	176 198	3,4 3,39	308 353	279 315	4,29 4,28	72,7 81,8	2,19 2,18	4,78 4,8	4,85 4,8	4,92 4,9	5 5,02
125*	8* 9* 10 12 14 16	14	19,7 22 24,3 28,9 33,4 37,8	15,5 17,3 19,1 22,7 26,2 29,6	3,36 3,4 3,45 3,53 3,61 3,68	294 327 360 422 482 539	3,87 3,86 3,85 3,82 3,8 3,78	516 582 649 782 916 1051	467 520 571 670 764 853	4,87 4,86 4,84 4,82 4,78 4,75	122 135 149 174 200 224	2,49 2,48 2,47 2,46 2,45 2,44	5,39 5,41 5,44 5,48 5,52 5,66	5,5 5,5 5,5 5,6 5,6 5,7	5,5 5,6 5,6 5,6 5,7 5,7	5,6 5,63 5,66 5,7
140*	9* 10* 12	14	24,7 27,3 32,5	19,4 21,5 25,5	3,78 3,82 3,9	466 512 602	4,34 4,33 4,31	818 911 1097	739 814 957	5,47 5,46 5,43	192 211 248	2,79 2,78 2,76	6,02 6,05 6,08	6,1 6,12 6,15	6,16 6,19 6,25	6,24 6,26 6,3
160*	10* 11* 12 14 16 18 20	16	31,4 34,4 37,4 43,3 49,1 54,8 60,4	24,7 27 29,4 34 38,5 43 47,4	4,3 4,35 4,39 4,47 4,55 4,63 4,7	774 944 913 1046 1175 1299 1419	4,96 4,95 4,94 4,92 4,89 4,87 4,85	1356 1494 1633 1911 2191 2472 2756	1229 1341 1450 1662 1866 2061 2246	6,25 6,24 6,23 6,2 6,17 6,13 6,1	319 348 376 431 485 537 589	3,19 3,18 3,17 3,16 3,14 3,13 3,12	6,84 6,86 6,88 6,91 6,95 7 7,04	6,91 6,93 6,95 6,98 7,03 7,07 7,11	6,97 7 7,02 7,05 7,1 7,14 7,18	7,05 7,13 7,09 7,13 7,18 7,22 7,26
180*	11* 12*	16	38,8 42,2	30,5 33,1	4,85 4,89	1216 1317	5,6 5,59	2128 2324	1933 2093	7,06 7,04	500 540	3,59 3,58	7,67 7,69	7,74 7,76	7,81 7,83	7,82 7,84
200*	12* 13 14* 16 20* 25 30*	18	47,1 50,9 54,6 62 76,5 94,3 111,5	37 39,9 42,8 48,7 60,1 74 87,6	5,37 5,42 5,46 5,54 5,7 5,89 6,07	1823 1961 2097 2363 2871 3466 4020	6,22 6,21 6,2 6,17 6,12 6,06 6	3182 3452 3722 4264 5355 6733 8130	2896 3116 3333 3755 4560 5494 6351	7,84 7,83 7,81 7,78 7,72 7,63 7,55	749 805 861 970 1182 1438 1688	3,99 3,98 3,97 3,96 3,93 3,91 3,89	8,48 8,5 8,52 8,56 8,65 8,74 8,83	8,55 8,58 8,6 8,64 8,72 8,81 8,9	8,62 8,64 8,66 8,7 8,79 8,88 8,97	8,69 8,71 8,73 8,77 8,86 8,95 9,05
220*	14* 16*	21	60,4 68,6	47,4 53,8	5,93 6,02	2814 3175	6,83 6,81	4941 5661	4470 5045	8,9 8,58	1159 1306	4,38 4,36	9,31 9,35	9,37 9,42	9,45 9,49	9,52 9,56
250*	16* 18 20* 22 25 28 30	24	78,4 87,7 97 106,1 119,7 138,1 142	61,5 68,9 76,1 83,3 94 104,5 111,4	6,75 6,83 6,91 7 7,11 7,23 7,31	4717 5247 5765 6270 7006 7717 8177	7,76 7,73 7,71 7,69 7,65 7,61 7,59	8286 9342 10401 11464 13064 14674 15763	7492 8337 9160 9961 11125 12244 12965	9,78 9,75 9,72 9,69 9,64 9,59 9,56	1942 2158 2370 2579 2887 3190 2389	4,98 4,96 4,94 4,93 4,91 4,89 4,89	10,55 10,59 10,62 10,67 10,72 10,78 10,82	10,62 10,65 10,69 10,74 10,79 10,85 10,89	10,68 10,72 10,76 10,81 10,86 10,92 10,96	10,75 10,8 10,83 10,88 10,93 10,99 10,03

ПРИЛОЖЕНИЕ 10

Коэффициенты φ продольного изгиба центрально сжатых элементов

Гиб- кость λ	Предел текучести стали σ_y , МПа					Чугун	Дерево
	200	240	280	320	360		
10	988	987	985	984	983	970	990
20	967	962	959	955	952	910	970
30	939	931	924	917	911	810	930
40	906	894	883	873	863	690	870
50	869	852	836	822	809	570	800
60	827	805	785	766	749	440	710
70	782	754	724	687	654	340	600
80	734	686	641	602	566	260	480
90	665	612	565	522	483	200	380
100	599	542	493	448	408	160	310
110	537	478	427	381	338	130	250
120	479	419	366	321	287	110	220
130	425	364	313	276	247	100	180
140	376	315	272	240	215	80	160
150	328	276	239	211	189	70	140
160	290	244	212	187	167	-	120
170	259	218	189	167	150	-	110
180	233	196	170	150	135	-	100
190	210	177	154	136	122	-	90
200	191	161	140	124	111	-	80
210	174	147	128	113	102		
220	160	135	118	104	094		

Примечание: Значения коэффициентов φ продольного изгиба в таблице увеличены в 1000 раз.

Вычисление определенных интегралов от произведения двух функций по формуле Симпсона

При определении перемещений в стержневых системах по формуле Мора, а также при составлении канонической системы метода сил для расчета статически неопределимых систем, приходится вычислять определенные интегралы от произведения двух функций, одна из которых – линейная, а вторая имеет порядок не выше второго, так что произведение этих двух функций – полином не выше третьей степени. Такие определенные интегралы целесообразно вычислять по формуле Симпсона, которая в указанном случае приводит к точному результату.

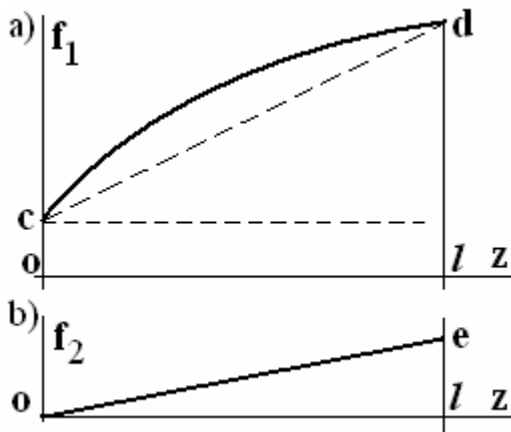
Пусть требуется вычислить определенный интеграл от произведения двух функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ в интервале $[a, b]$

$$I = \int_a^b f_1(z)f_2(z)dz, \quad (1)$$

где $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – полином не выше третьей степени.

Применив формулу Симпсона для численного интегрирования (1),

$$I = \frac{b-a}{6} \left[f_1 f_2 |_{z=a} + 4f_1 f_2 |_{z=0,5(a+b)} + f_1 f_2 |_{z=b} \right], \quad (2)$$



получим точное значение I .

Например, вычислим интеграл от произведения двух функций, графики которых представлены на рис.1,а и на рис.1,б, в интервале $[0, l]$.

Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ выражаются через z :

$$f_1 = c + \frac{d-c}{l} z + 0,5qlz - 0,5qz^2, \quad (3)$$

$$f_2 = \frac{e}{l} z, \text{ где } c, d, e, l, q \text{ – постоянные.} \quad (4)$$

Рис.1. Вид функций $f_1(z)$, $f_2(z)$.

Вычисляем

$$f_1 f_2 = c \frac{e}{l} z + \frac{d-c}{l} \frac{e}{l} z^2 + 0,5qe z^2 - 0,5qz^2 \frac{e}{l} z; \quad (5)$$

$$f_1 f_2|_{z=0} = 0; f_1 f_2|_{z=0,5l} = 0,25ce + 0,25de + 0,0625qe l^2; f_1 f_2|_{z=l} = de;$$

$$I = cel/6 + del/3 + qel^3/24. \quad (6)$$

Непосредственное интегрирование (1) дает результат (6).

Формулу Симпсона (1) можно использовать для приближенного вычисления определенных интегралов от произведения двух функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ в интервале $[a, b]$ и в случае, когда $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – полином выше третьей степени. В этом случае для достижения необходимой точности рекомендуется интервал $[a, b]$ разбить на несколько подинтервалов.

Графоаналитический способ вычисления определенных интегралов от произведения двух функций (способ Верещагина)

При определении перемещений в стержневых системах по формуле Мора, а также при составлении канонической системы метода сил для расчета статически неопределимых систем, приходится вычислять определенные интегралы от произведения двух функций, одна из которых – нелинейная, а вторая – линейная функция.

Такие определенные интегралы можно вычислять графоаналитическим способом (способом Верещагина)

Пусть требуется вычислить определенный интеграл от произведения двух функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ в интервале $[0, l]$

$$S = \int_0^l f_1(z)f_2(z)dz, \quad (1)$$

где $f_1(z)$ – нелинейная, а $f_2(z)$ – линейная функция (см. рис1,а; рис1,б).

Пусть, например, f_2 – линейная функция вида:

$$f_2 = a + bz, \quad (2)$$

где a, b – постоянные; $b = \operatorname{tg}\alpha$;

$f_1(z)$ – нелинейная функция, график

которой представлен на рис1,а.

Обозначим: $\omega = \int_0^l f_1 dz$ – площадь под

графиком функции $f_1(z)$ в интервале $(0, l)$; z_c – абсцисса центра площади эпюры $f_1(z)$ на рис.1,а; $f_2(z_c)$ – ордината графика функции f_2 в точке с координатой z_c .

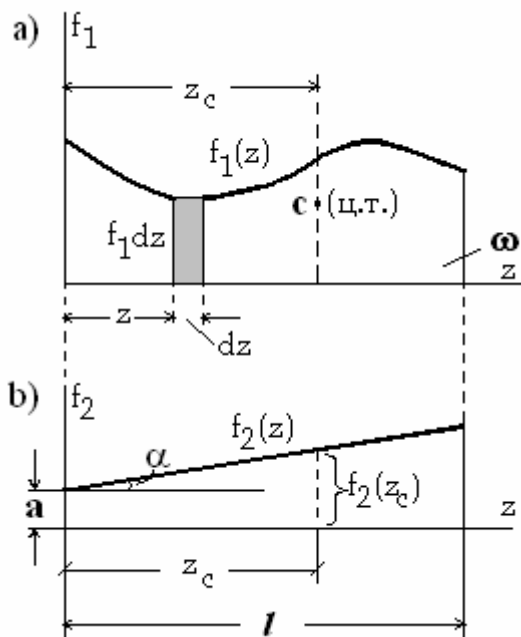


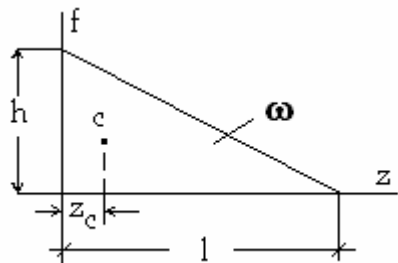
Рис.1. Графики функций $f_1(z)$, $f_2(z)$.

Графоаналитический способ вычисления определенных интегралов от произведения двух функций (способ Верещагина) состоит в следующем: определенный интеграл от произведения двух функций f_1 и f_2 , одна из которых, например f_2 – линейная функция, равен произведению площади ω

эпюры нелинейной функции f_1 на значение $f_2(z_c)$ линейной функции f_2 в точке с абсциссой c центра площади эпюры нелинейной функции f_2

$$S = \omega \cdot f_2(z_c). \quad (3)$$

Площади и центры площадей простейших фигур.



$$\omega = \frac{1}{2}lh, \quad z_c = \frac{1}{3}l. \quad (4)$$

Рис.2. Прямоугольный треугольник.



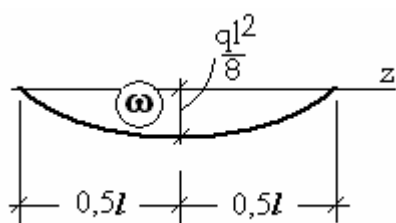
$$\omega = \frac{1}{3}lh, \quad z_c = \frac{1}{4}l. \quad (5)$$

Рис.3. Квадратная парабола. Тип 1.



$$\omega = \frac{2}{3}lh, \quad z_c = \frac{3}{8}l. \quad (6)$$

Рис.4. Квадратная парабола. Тип 2.



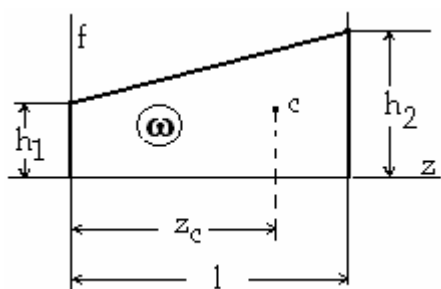
$$\omega = \frac{2}{3} \frac{ql^3}{8}; \left(\omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l = \frac{ql^3}{12} \right); \quad (7)$$

$$z_c = \frac{1}{2}l.$$

Рис.5. Квадратная парабола. Тип 3.

На рис.3 представлена квадратная парабола типа 1, имеющая касательную при $z = l$, совпадающую с осью абсцисс; на рис.4 – квадратная парабола типа 2, имеющая касательную, перпендикулярную к оси ординат

при $z = 0$; на рис.5 – квадратная парабола типа 3, имеющая касательную, параллельную оси абсцисс в точке при $z = 0,5l$.

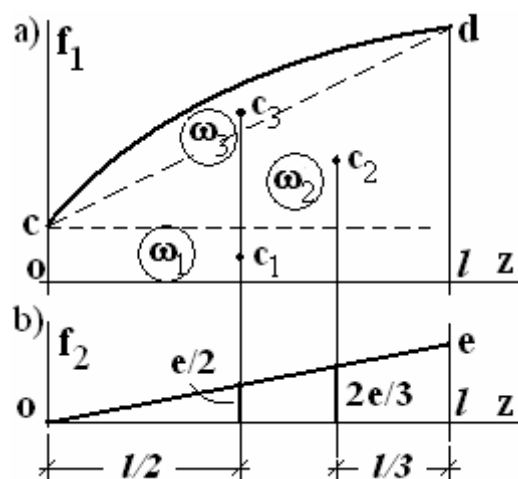


$$\omega = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)l; \quad (8)$$

$$z_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2}.$$

Рис.6. Прямоугольная трапеция.

Вычислим графоаналитическим способом интеграл от произведения двух функций, графики которых представлены на рис.7,а и на рис.7,б, в интервале $[0, l]$.



Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ имеют следующие значения площадей ω_i ($i = 1,2,3$) и ординат $f_2(z_c)$:

$$\omega_1 = c \cdot l; \quad \omega_2 = 0,5(d - c) \cdot l; \quad \omega_3 = ql^3/12;$$

$$f_2(z_1) = e/2; \quad f_2(z_2) = 2e/3; \quad f_2(z_3) = e/2.$$

Рис.7. Вид функций $f_1(z)$, $f_2(z)$.

Перемножив значения площадей ω_i ($i = 1,2,3$) фигур на рис.7,а и ординат $f_2(z_c)$ на рис.7,б и сложив результаты, получим:

$$S = \omega_1 \cdot f_2(z_1) + \omega_2 \cdot f_2(z_2) + \omega_3 \cdot f_2(z_3) = c \cdot l \cdot e/2 + 0,5(d - c) \cdot l \cdot 2e/3 + ql^3/12 \cdot e/2 =$$

$$= cel/6 + del/3 + ql^3/24. \quad (9)$$

Пластический момент сопротивления сечения в форме равнобокой трапеции

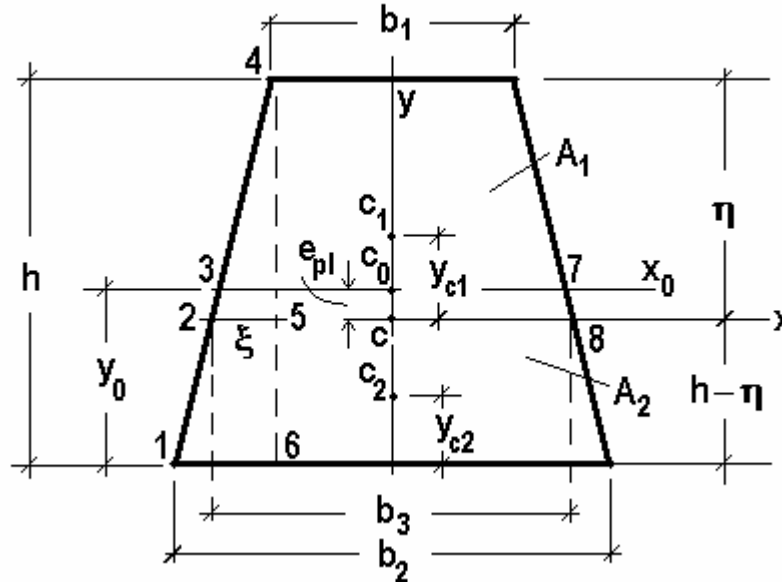


Рис.1. Поперечное сечение балки в форме равнобокой трапеции

Расстояние y_0 от нижнего основания трапеции до ее центра площади c_0 определяется известной формулой:

$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{(b_2 + 2b_1)}{b_1 + b_2}. \quad (1)$$

Полагаем, что оси c_0x_0 c_0y – главные центральные.

Обозначим центр площади трапеции через c_0 ; центр площади сечения в состоянии пластического течения через c ; площади сжатой и растянутой частей сечения в состоянии пластического течения – A_1 и A_2 ; расстояние от оси cx до верхнего основания трапеции – η ; расстояние между осями cx и c_0x – e_{pl} ; длину отрезка 2-5 прямой, совпадающей с направлением оси cx , проходящей через центр площади сечения в состоянии пластического течения, – ξ ; расстояние от оси cx до верхнего основания трапеции – η .

Построим выражение для определения расстояния η .

В состоянии пластического течения площади сжатой и растянутой частей сечения A_1 и A_2 должны быть равны между собой, поскольку продольная сила в сечении равна нулю:

$$N = \int_{(A)} \sigma_y dA = \int_{(A_1)} \sigma_y dA - \int_{(A_2)} \sigma_y dA = \sigma_y(A_1 - A_2) = 0; A_1 = A_2.$$

Длину ξ отрезка 2-5 найдем из подобия треугольников 2-4-5 и 1-4-6:

$$\xi = \frac{b_2 - b_1}{2} \cdot \frac{\eta}{h}. \quad (2)$$

Длина b_3 отрезка 2-8 прямой, делящей сечение в состоянии пластического течения на две равные части A_1 и A_2 , определяется выражением:

$$b_3 = b_1 + 2\xi = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} \cdot \eta = \frac{b_1(h - \eta) + b_2\eta}{h}. \quad (3)$$

Площади сжатой A_1 и растянутой A_2 частей сечения в состоянии пластического течения определяем по известной формуле:

$$A_1 = 0,5(b_1 + \frac{b_1(h - \eta) + b_2\eta}{h})\eta, \quad A_2 = 0,5(\frac{b_1(h - \eta) + b_2\eta}{h} + b_2)(h - \eta).$$

Приравняв A_1 и A_2 , придем к уравнению относительно η :

$$\eta^2 + \frac{2b_1 h}{b_2 - b_1} \eta - \frac{b_1 + b_2}{2(b_2 - b_1)} h^2 = 0, \quad (4)$$

корни которого

$$\eta_{1,2} = (-b_1 \pm \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}}) \cdot \frac{h}{b_2 - b_1}. \quad (5)$$

Отбросив знак “-” перед радикалом в формуле (5), как не отвечающий физической сущности задачи, получим выражение для вычисления η :

$$\eta = \frac{-b_1 + \sqrt{0,5(b_1^2 + b_2^2)}}{b_2 - b_1} \cdot h. \quad (6)$$

Расстояние $h - \eta$ от нижнего основания трапеции до оси cx определяется выражением:

$$h - \eta = \frac{b_2 - \sqrt{0,5(b_1^2 + b_2^2)}}{b_2 - b_1} \cdot h. \quad (7)$$

Построим выражение для определения пластического момента сопротивления W_{pl} .

Расстояние y_{c1} от оси cx до центра площади верхней части трапеции определяем по формуле (1):

$$y_{c1} = \frac{b_3 + 2b_1}{b_1 + b_3} \cdot \frac{\eta}{3}. \quad (8)$$

Расстояние между точками c и c_2 определяем с помощью формул (1) и (6):

$$|c-c_2| = h - \eta - y_{c2} = \frac{h - \eta}{3} \cdot \frac{b_2 + 2b_3}{b_2 + b_3}. \quad (9)$$

Статические моменты S_c и S_t площадей сжатой A_1 и растянутой A_2 частей сечения в состоянии пластического течения относительно оси cx :

$$\begin{aligned} S_c = A_1 \cdot y_{c1} &= 0,5(b_1 + \frac{b_1(h - \eta) + b_2 \eta}{h}) \eta \cdot \frac{b_3 + 2b_1}{b_1 + b_3} \cdot \frac{\eta}{3} = \\ &= \frac{\eta^2}{6h} \cdot \frac{b_3 + 2b_1}{b_1 + b_3} [(2h - \eta)b_1 + b_2 \eta]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$S_t = A_2 \cdot |c-c_2| = \frac{(h - \eta)^2}{6h} \cdot \frac{b_2 + 2b_3}{b_2 + b_3} \cdot [(h - \eta)b_1 + (h + \eta)b_2]. \quad (11)$$

Пластический момент сопротивления:

$$\begin{aligned} W_{pl} = S_c + S_t &= \frac{\eta^2}{6h} \cdot \frac{b_3 + 2b_1}{b_1 + b_3} [(2h - \eta)b_1 + b_2 \eta] + \\ &+ \frac{(h - \eta)^2}{6h} \cdot \frac{b_2 + 2b_3}{b_2 + b_3} \cdot [(h - \eta)b_1 + (h + \eta)b_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Расстояние e_{pl} между осями cx и c_0x_0 :

$$e_{pl} = y_0 - h + \eta = \frac{3\sqrt{0,5(b_1^2 + b_2^2)} \cdot (b_1 + b_2) - (b_1 + b_2)^2 - (b_1^2 + b_2^2)}{3(b_2^2 - b_1^2)} \cdot h. \quad (13)$$

Найдем момент сопротивления сечения W в упругой стадии деформирования.

Осовой момент инерции сечения J_x относительно c_0x_0 в упругой стадии деформирования можно определить по выражению:

$$J_x = \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}{36(b_1 + b_2)} \cdot h^3. \quad (14)$$

Полагая, что расстояние до наиболее удаленных волокон сечения равно η , упругий момент сопротивления W можно определить следующим образом:

$$W = J_x/\eta = \frac{(b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2)(b_2 - b_1)}{36(b_1 + b_2)[-b_1 + \sqrt{0,5(b_1^2 + b_2^2)}]} \cdot h^2. \quad (15)$$

В качестве примера найдем отношение пластического и упругого моментов сопротивления W_{pl}/W для равнобокой трапеции высотой $h = 10$ см с основаниями $b_1 = 5$ и $b_2 = 10$ см.

По формулам (6), (8)÷(12), (14), (15) вычисляем: $\eta = 5,811$; $b_3 = 7,906$ см; $A_1 = A_2 = 37,5$ см²; $y_{c1} = 2,312$ см; $|c-c_2| = 2,013$ см; $S_c = 86,7$ см³; $S_t = 75,5$ см³; $W_{pl} = 162,2$ см³; $W = 103,6$ см³.

Отношение пластического и упругого моментов сопротивления:

$$W_{pl}/W = 1,57.$$

Библиографический список:

1. Беляев Н.М. - Сопротивление материалов.- М.: Наука, 1976. - 608 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. - Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1989. - 624 с.
3. Феодосьев В.И.- Сопротивление материалов.- М.: Наука, 1986 - 512 с.
4. Филоненко-Бородич М.М. и др. – Курс сопротивления материалов. Ч. I. - М.: Физматгиз, 1961. - 656 с.
5. Филоненко-Бородич М.М. - Механические теории прочности. - М.: Изд-во МГУ, 1961. - 92 с.
6. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. - Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1995. - 560 с.
7. Зубчанинов В.Г. - Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1990. - 400 с.

Учебное издание

Миляев Александр Сергеевич

Практикум

Для студентов, обучающихся по направлениям
150400 – Технологические машины и оборудование, 190500 –
Эксплуатация транспортных средств, 250300 – Технология
лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств.

Отпечатано в авторской редакции с готового оригинал-макета

Подписано в печать с оригинал-макета 15.10.09 г.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Уч.-изд.л. 20,375. Печ. л. 20,375. Тираж 200. Заказ № с.104.

Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия
Издательско-полиграфический отдел СПбГЛТА
194021, Санкт-Петербург, Институтский пер.,5.