

504 539.3  
С64

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА  
им. И.М. ГУБКИНА

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В.А. ЛУКЬЯНОВ, А.Г. МОЛЧАНОВ, В.Г. ПИРОЖКОВ,  
С.В. РОМАНЕНКО, Л.А. СЕРДИЙ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
(Часть - 1)

Учебное пособие по курсу сопротивления материалов  
для студентов специальностей  
130601, 130602, 130603, 150202, 150205, 151001

Научная библиотека РГУ  
нефти и газа им. И.М.Губкина  
б/н

ЧТБ РГУ Нефть и Газ  
  
3046318

Москва 2006

8786  
6453

В.Г.Пирожков, В.А.Лукиянов, А.Г.Молчанов, Л.А.Сердкий, С.В.Романенко.  
Сопrotивление материалов. (Часть -1).

В издании приведены краткие сведения по анализу внутренних силовых факторов в статически определимых системах при различных видах нагружения. Также даны краткие сведения из теории расчета на прочность при растяжении, сжатии, кручении и изгибе. Рассмотрены примеры решения типовых задач с подробными пояснениями. Для самоконтроля дается набор вопросов.

В приложения включены: сокращенный сортамент прокатной стали и требования к оформлению расчетно-проектировочных работ.

Рецензент - д.т.н., профессор Н.М. Захаров

### Содержание

Условные обозначения.....	
1. Анализ внутренних силовых факторов в статически определенных системах.....	4
1.1. Основные положения.....	4
1.2. Методические указания.....	6
1.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	9
1.4. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов.....	10
1.5. Контрольные вопросы.....	33
1.6. Варианты заданий.....	33
2. Расчеты на прочность при растяжении, сжатии и кручении.....	
2.1. Основные положения.....	
2.2. Примеры решения задач.....	
2.3. Контрольные вопросы.....	
2.4. Варианты заданий.....	
3. Расчеты на прочность статически определимой балки при изгибе.....	
3.1. Основные положения.....	
3.2. Пример расчета.....	
3.3. Контрольные вопросы.....	
3.4. Варианты заданий.....	
Литература.....	
Приложение.....	



### 1.1. Основные положения

В сопротивлении материалов определение напряжений, перемещений и деформаций  $\alpha$ , следовательно, и расчет на прочность и жесткость конструкций производится на основе расчета внутренних усилий, возникающих в конструкции при действии на неё внешних нагрузок (в том числе реакций). Поэтому определение внутренних усилий имеет важное значение.

В общем случае, возникающие в поперечном сечении внутренние усилия могут быть разложены на три силы - продольную (нормальную к сечению) и две поперечные (действующие в плоскости сечения), а также три момента: два изгибающих и один крутящий. Определение их производится методом сечений, т.е. составлением уравнений равновесия части конструкции, находящейся по одну сторону от рассматриваемого сечения.

В число нагрузок, определяющих величину и характер внутренних усилий, входят и реакции связей. Поэтому, как правило, расчету внутренних усилий предшествует определение реакций связей. Для статически определимых систем (которые только и рассматриваются в настоящей работе), не имеющих шарниров между отдельными элементами, определение реакций связей (опор) производится на основе составления и решения уравнений равновесия для всей заданной конструкции, а не части ее, как это необходимо при определении внутренних усилий.

Напряжения и деформации, возникающие в конструкции под действием внешних нагрузок, пропорциональны внутренним усилиям. Поэтому по отношению последних вдоль оси бруса можно судить о характере и величине напряжений и деформаций, в частности, установить сечения наиболее опасные, в которых внутренние усилия будут максимальными. Выразить одной формулой изменение внутренних усилий по всей длине бруса трудно и во многих случаях невозможно, поэтому приходится заданную конструкцию разбивать на отдельные участки, для которых можно составить аналитическое

*Расчетно-проектировочная работа № 1*

### АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

выражение зависимости внутренних усилий от координат сечения. Для придания этой зависимости наглядности производится построение эпюр (графиков изменения внутренних усилий по длине бруса). По этим графикам легко установить сечения, где внутренние усилия достигают экстремальных значений.

### 1.2. Методические указания

#### Определение реакций связей

Используя принцип неизменности линейных размеров (принцип отвердения), заменяя связи их реакциями, составляются по правилам теоретической механики уравнения равновесия заданного бруса. Перед составлением уравнений равновесия необходимо произвольно выбрать направления реакций и изобразить их на рисунке. Если в результате вычислений какая-либо реакция получается отрицательной, нужно изменить на рисунке ее направление на обратное и в дальнейшем считать эту реакцию положительной.

Распределенную нагрузку, действующую на брус, можно заменить равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.

При составлении уравнений равновесия необходимо стремиться к тому, чтобы в каждое из них входило только одно неизвестное. В частности, для двухопорной балки этого можно добиться, составляя следующие уравнения равновесия: сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю; сумма моментов всех сил относительно опорных шарниров равна нулю.

Проверку правильности вычисления реакций производят путем составления дополнительных условий равновесия, которые должны обращаться в тождество. Например, для двухопорной балки можно использовать условие равенства нулю суммы сил, спроецированных на ось,

перпендикулярную оси балки, или условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно какой-либо точки, не совпадающей с опорами.

#### Деление на участки

Участком называется часть бруса, в пределах которой аналитический вид выражений для определения внутренних силовых факторов остается неизменным.

Границами участков являются сечения бруса, в которых интенсивность распределенной нагрузки начинает изменяться по новому закону. Границей участка является также каждый излом, если брус имеет ось в виде ломаной, состоящей из прямолинейных участков, а так же те сечения, в которых приложены сосредоточенные нагрузки и места установки опорных устройств.

#### Выбор координатных осей

При построении эпюр аргументом является координата поперечного сечения бруса, а функцией - силовой фактор, закон которого исследуется. Продольная ось бруса обозначается латинской буквой  $z$ . Координаты, соответствующие сечению на  $i$ -м участке, обозначаются  $z_i$ , (например, на первом участке -  $z_1$ , на втором -  $z_2$  и т.д.).

На каждом участке берется какое-либо произвольное сечение на расстоянии  $z_i$  от начала координат, и для этого сечения составляются выражения для определения внутренних силовых факторов. Начало координат можно брать на левом либо, на правом концах бруса, в начале или в конце любого участка.

#### Составление уравнений внутренних силовых факторов

При составлении уравнений для определения внутренних силовых факторов в сечении рекомендуется использовать нижеперечисленные правила, сформулированные на основе метода сечений и общепринятых правил знаков.

Продольная (нормальная) сила  $N(z_i)$  в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на продольную



ось бруса  $z$  всех внешних сил (сосредоточенных и распределенных по длине с интенсивностью  $q(z_i)$ ), действующих на рассматриваемую часть бруса.

$$N(z_i) = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{j=1}^k \int_{l_j} q_j(z_i) dz_i, \quad (1.1)$$

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная сила, а суммирование проводится по всем участкам, расположенным по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Внешняя сила, направленная от рассматриваемого сечения (при мысленном закреплении бруса в этом сечении она его растягивает), выражена для определения  $N(z_i)$  в этом сечении дает положительное слагаемое. В противоположном случае - отрицательное слагаемое.

Крутящий момент  $M_{кр}(z_i)$  в произвольном поперечном сечении бруса (вала) численно равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси бруса всех внешних пар сил (сосредоточенных моментов  $M_i$  и распределенных по длине с интенсивностью  $m_j(z_i)$ ), действующих на рассматриваемую часть бруса:

$$M_{кр}(z_i) = \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{j=1}^k \int_{l_j} m_j(z_i) dz_i, \quad (1.2)$$

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная нагрузка, а суммирование - по всем участкам, расположенным по одну сторону от рассматриваемого сечения. Внешняя пара сил, которая для наблюдателя, смотрящего на проведенное сечение со стороны его внешней нормали, представлена направленной по часовой стрелке, выражена для определения  $M_{кр}(z_i)$  в этом сечении дает положительное слагаемое. В противном случае - отрицательное слагаемое.

Поперечная сила  $Q(z_i)$  в любом поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих

рассматриваемую часть балки и спроецированных на ось, перпендикулярную оси балки:

$$Q(z_i) = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{j=1}^k \int_{l_j} q_j(z_i) dz_i, \quad (1.3)$$

Внешняя сила, стремящаяся повернуть балку относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке, в выражении для определения  $Q(z_i)$  в этом сечении дает положительное слагаемое. В противоположном случае - отрицательное слагаемое.

Изгибающий момент  $M(z_i)$  в произвольном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на рассматриваемую часть балки, относительно одной из главных центральных осей инерции сечения. Если при мысленном закреплении рассматриваемой части балки в проведенном сечении внешняя нагрузка создает относительно этого сечения момент, вызывающий сжатие верхних волокон балки, то в выражении для определения  $M(z_i)$  в этом сечении она дает положительное слагаемое. В противоположном случае - отрицательное слагаемое.

### 1.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов

Графики, показывающие, как изменяются внутренние усилия при переходе от сечения к сечению, называются эпюрами. При построении эпюр руководствуются следующими правилами.

Эпюра вычерчивается под брусом так, чтобы ее ось (база) была направлена оси бруса. Ординаты эпюры откладываются строго в масштабе от оси эпюры по перпендикуляру, причем положительные значения - вверх, отрицательные - вниз. Для рам ординаты эпюры откладываются перпендикулярно к оси рамы, причем положительные значения - с внешней стороны рамы, а отрицательные - с внутренней стороны. На эпюрах должны



быть указаны экстремальные значения внутренних усилий, а также координаты поперечных сечений бруса, соответствующие этим усилиям. Кроме того, на эпюрах проставляются числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке проставляется знак усилия.

При проверке правильности построения эпюры внутренних силовых факторов руководствуются правилами, вытекающими из метода сечений и дифференциальных зависимостей.

**1.4. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов.**

**Пример № 1.** Построить эпюры внутренних силовых факторов для бруса, изображенного на рис. 1.1.

**Решение.** При таком виде нагружения бруса в его поперечных сечениях возникает один внутренний силовой фактор - продольная сила N. Брус имеет два участка. Начало координат для каждого участка выбираем на его левом конце. Обозначив координаты сечения на каждом участке (см. рис. 1.1), составляем уравнения для определения N(z) и вычисляем ее значения в характерных точках.

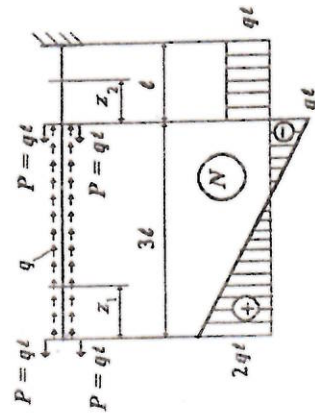


Рис. 1.1.

На этом участке N(z<sub>2</sub>) имеет постоянные значения. По составленным уравнениям и значениям N(z) в характерных точках строим эпюру N(z). Проводим контроль правильности построения эпюры N(z).

**Пример № 2.** Построить эпюры внутренних силовых факторов для бруса, изображенного на рис. 1.2.

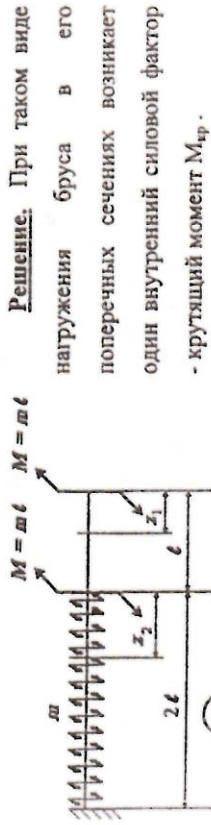


Рис. 1.2

определения M<sub>кр</sub>(z) и вычисляем его значения в характерных точках.

**Первый участок:**

0 ≤ z<sub>1</sub> ≤ ℓ,  
M<sub>кр</sub>(z<sub>1</sub>) = - M = - mℓ.

На этом участке M<sub>кр</sub>(z<sub>1</sub>) имеет постоянные значения.

**Второй участок:**

0 ≤ z<sub>2</sub> ≤ 2ℓ,  
M<sub>кр</sub>(z<sub>2</sub>) = - M - m · z<sub>2</sub>.  
При z<sub>2</sub> = 0 M<sub>кр</sub>(z<sub>2</sub>) = - 2mℓ.  
При z<sub>2</sub> = 2ℓ M<sub>кр</sub>(z<sub>2</sub>) = 0.

По составленным уравнениям и значениям M<sub>кр</sub>(z) в характерных точках строим эпюру M<sub>кр</sub>(z). Проводим контроль правильности проведенного построения эпюры.

**Пример № 3.** Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки, изображенной на рис. 1.3.

**Решение.** Определяем опорные реакции R<sub>a</sub> и R<sub>b</sub>, выбрав их соответственно направленными вверх:



$$\sum M_b = R_a \ell + \frac{q\ell^2}{8} - q\ell \frac{\ell}{2} = 0, \quad R_a = \frac{3}{8} q\ell;$$

$$\sum M_a = -R_b \ell + \frac{q\ell^2}{8} + q\ell \frac{\ell}{2} = 0, \quad R_b = \frac{5}{8} q\ell.$$

Проверка:

$$\sum Y = R_a + R_b - q\ell = \frac{3}{8} q\ell + \frac{5}{8} q\ell - q\ell = 0.$$

Опорные реакции определены верно. Балка имеет два участка нагружения. Начало первого участка выбираем в точке А, второго - в точке В. Обозначив координаты сечения на каждом участке (см. рис. 1.3), составим уравнения для определения  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$ .

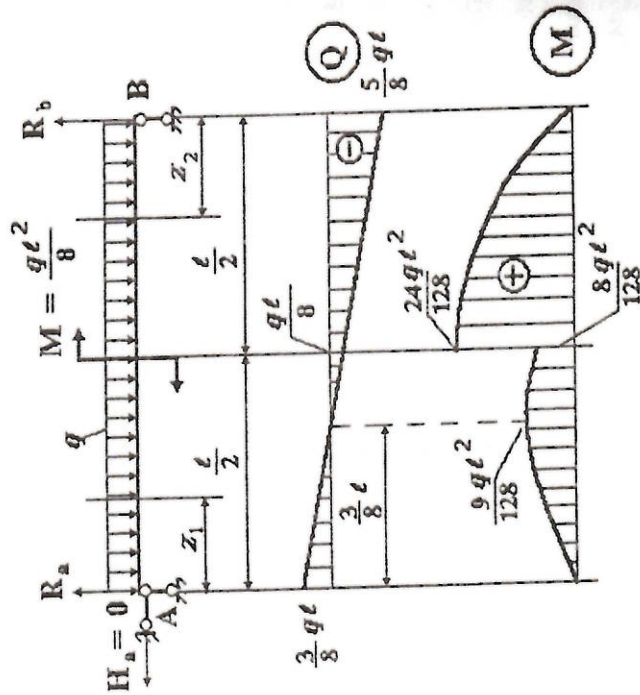


Рис. 1.3.

Вычисляем их значения в характерных точках.

Первый участок:

$$0 \leq z_1 \leq \frac{\ell}{2},$$

$$Q(z_1) = R_a - qz_1 = \frac{3}{8} q\ell - qz_1,$$

$$M(z_1) = R_a z_1 - \frac{qz_1^2}{2} = \frac{3}{8} q\ell z_1 - \frac{qz_1^2}{2}.$$

Определяем значения  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$  в характерных точках.

При  $z_1 = 0$      $Q(z_1) = \frac{3}{8} q\ell$ ,     $M(z_1) = 0.$

При  $z_1 = \frac{\ell}{2}$      $Q(z_1) = \frac{3}{8} q\ell - \frac{q\ell}{2} = -\frac{q\ell}{8},$

$$M(z_1) = \frac{3}{8} q\ell \frac{\ell}{2} - \frac{q \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2} = \frac{9 q \ell^2}{16}.$$

На этом участке поперечная сила меняет знак с положительного на отрицательный, следовательно, на участке существует максимум  $M(z_1)$ .

Определяем максимум функции  $M(z_1)$ .

$$Q(z_1) = \frac{3}{8} q\ell - qz_1 = 0, \quad z_1 = \frac{3}{8} \ell.$$

Тогда     $M_{\max}(z_1) = \frac{3}{8} q\ell \frac{3}{8} \ell - \frac{q \left(\frac{3}{8} \ell\right)^2}{2} = \frac{9}{128} q\ell^2.$

Второй участок:

$$0 \leq z_2 \leq \frac{\ell}{2}.$$

$$Q(z_2) = -R_b + qz_2 = -\frac{5}{8} q\ell + qz_2,$$

$$M(z_2) = R_b z_2 - \frac{qz_2^2}{2} = \frac{5}{8} q\ell z_2 - \frac{qz_2^2}{2}.$$

При  $z_2 = 0$      $Q(z_2) = -\frac{5}{8} q\ell$ ,     $M(z_2) = 0.$

При  $z_2 = \frac{\ell}{2}$      $Q(z_2) = -\frac{5}{8} q\ell + q \frac{\ell}{2} = -\frac{q\ell}{8},$

$$M(z_2) = \frac{5}{8} q\ell \frac{\ell}{2} - \frac{q \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2} = \frac{3}{16} q\ell^2.$$

По составленным уравнениям и значениям  $Q(z)$  и  $M(z)$  в характерных точках строим эпюры  $Q(z)$  и  $M(z)$ . При построении эпюры  $M(z)$ , для удобства выбора масштаба, все ординаты вычисляем в долях от  $\frac{q\ell^2}{128}$ .

Проведем контроль правильности проведенного построения эпюр.

**Пример №4.** Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки, изображенной на рис. 1.4.

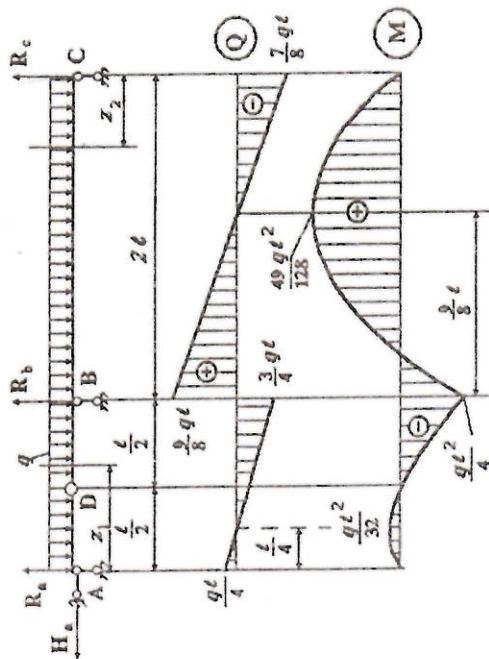


Рис. 1.4.

**Решение.** Определяем опорные реакции. Рассматриваемая балка имеет четыре неизвестных составляющих опорных реакций:  $R_a, H_a, R_b, R_c, H_b = 0$ , так как отсутствуют горизонтальные составляющие внешней нагрузки. Наличие промежуточного шарнира в точке D дает одно дополнительное уравнение статики - условие равенства нулю суммы моментов относительно точки D всех внешних силовых факторов, действующих на балку по одну сторону от шарнира D.

Для определения опорных реакций  $R_a, R_b, R_c$  удобно рассмотреть сумму моментов всех сил относительно шарниров D, B, C. Получим три уравнения:

$$\begin{aligned} \sum M_D^{(лев)} &= R_a \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \frac{l}{4}, \\ \sum M_B &= R_a l - R_c 2l - ql \frac{l}{2} + 2ql \frac{l}{2} = 0, \\ \sum M_C &= R_a 3l + R_b 2l - q3l \frac{3}{2} l = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений найдем опорные реакции:

$$R_a = q \frac{l}{4}; \quad R_b = \frac{15}{8} ql; \quad R_c = \frac{7}{8} ql.$$

Для проверки правильности вычисления значений реакций используем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_a + R_b + R_c - 3ql = q \frac{l}{4} + \frac{15}{8} ql + \frac{7}{8} ql - 3ql = 0.$$

Опорные реакции найдены верно.

Данная балка имеет два участка нагружения. Начало первого участка выбираем в точке A, второго - в точке B. Обозначив координаты произвольно выбранных сечений на каждом участке (см. рис. 1.4), составляем уравнения для определения  $Q(z)$  и  $M(z)$ . Вычисляем их значения в характерных точках.

Первый участок:

$$\begin{aligned} 0 \leq z_1 \leq l, \\ Q(z_1) &= R_a - qz_1 = q \frac{l}{4} - qz_1, \\ M(z_1) &= R_a z_1 - \frac{qz_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Определяем значения  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$  в характерных точках.

$$\begin{aligned} \text{При } z_1 = 0 \quad Q(z_1) &= q \frac{l}{4}, \quad M(z_1) = 0. \\ \text{При } z_1 = l \quad Q(z_1) &= -\frac{3}{4} ql, \quad M(z_1) = \frac{ql^2}{4}. \end{aligned}$$

На этом участке поперечная сила меняет знак с положительного на отрицательный, следовательно, на участке существует максимум  $M(z_1)$ .

Определим максимум функции  $M(z_1)$ .

$$Q(z_1) = q \frac{l}{4} - qz_1 = 0, \quad z_1 = \frac{l}{4}.$$

$$\text{Тогда } M_{\max}(z_1) = \frac{ql^2}{32}.$$

Второй участок:

$$\begin{aligned} 0 \leq z_2 \leq 2l. \\ Q(z_2) &= -R_c + qz_2, \\ M(z_2) &= R_c z_2 - \frac{qz_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Определяем значения  $Q(z_2)$  и  $M(z_2)$  в характерных точках.



При  $z_2 = 0$   $Q(z_2) = -\frac{7}{8}q\ell$ ,  $M(z_2) = 0$ .

При  $z_2 = 2\ell$   $Q(z_2) = \frac{9}{8}q\ell$ ,  $M(z_2) = -\frac{q\ell^2}{4}$ .

На этом участке поперечная сила меняет знак, следовательно, существует экстремум функции  $M(z_2)$ . Приравняв  $Q(z_2)$  нулю, находим координату сечения, где  $M(z_2)$  экстремален.

$Q(z_2) = -\frac{7}{8}q\ell + qz_2$ ,  $z_2 = \frac{7}{8}\ell$ .

Тогда  $M_{\max}(z_2) = \frac{49}{128}q\ell^2$ .

По составленным уравнениям и значениям  $Q(z)$ ,  $M(z)$  в характерных точках строим эпюры  $Q(z)$  и  $M(z)$  (рис. 1.4). При построении эпюр для удобства выбора масштаба ординаты  $Q(z)$  вычисляем в долях  $\frac{q\ell}{8}$ ,  $M(z)$  - в долях  $\frac{q\ell^2}{128}$ .

Проводим контроль правильности проведенного построения эпюр.

**Пример №5.** Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки, изображенной на рис. 1.5.

**Решение.** Для определения опорных реакций удобно воспользоваться уравнениями моментов относительно опор А и В.

Равнодействующая распределенной нагрузки численно равна площади эпюры нагрузки, то есть площади треугольника и приложена в центре его тяжести.

$\sum M_b = -R_a \cdot 2\ell + \frac{1}{2} \cdot 6q \cdot 2\ell \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\ell - q\ell\ell = 0,$

$\sum M_a = R_b \cdot 2\ell - \frac{1}{2} \cdot 6q \cdot 2\ell \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\ell - q\ell\ell = 0.$

Из этих уравнений найдем опорные реакции

$R_a = \frac{7}{2} q\ell$ ;  $R_b = \frac{7}{2} q\ell.$

Для проверки правильности вычисления значений реакций используем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось.

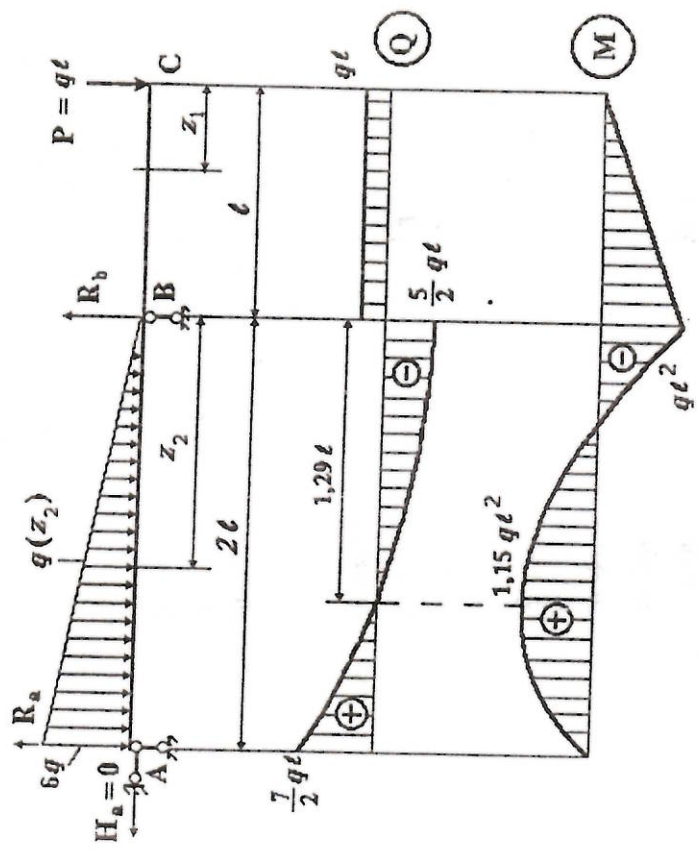


Рис. 1.5.

$\sum Y = R_a + R_b - \frac{1}{2} \cdot 6q \cdot 2\ell - P = 0,$

$\frac{7}{2} q\ell + \frac{7}{2} q\ell - \frac{1}{2} \cdot 6q \cdot 2\ell - q\ell = 7q\ell - 7q\ell = 0.$

Реакции опор найдены правильно. Данная балка имеет два участка обружения. Начало первого участка выбираем в точке С, а второго - в точке В.

Первый участок:

$0 \leq z_1 \leq \ell,$

$Q(z_1) = P = q\ell,$

$M(z_1) = -P \cdot z_1 = -q\ell z_1.$

Определяем значения  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$  в характерных точках.

При  $z_1 = 0$      $Q(z_1) = q\ell$ ,     $M(z_1) = 0$ .  
 При  $z_1 = \ell$      $Q(z_1) = q\ell$ ,     $M(z_1) = -q\ell^2$ .

Второй участок:

$0 \leq z_2 \leq 2\ell$ .

$Q(z_2) = P - R_b + \frac{1}{2} q(z_2) z_2$ .

Значение  $q(z_2)$  найдем, используя подобие треугольников.

$\frac{q(z_2)}{6q} = \frac{z_2}{2\ell}$ ,    откуда     $q(z_2) = \frac{3qz_2}{\ell}$ .

С учетом значения  $q(z_2)$  получаем выражение для поперечной силы:

$Q(z_2) = q\ell - \frac{7}{2} q\ell + \frac{1}{2} \frac{3qz_2}{\ell} z_2 = -\frac{5}{2} q\ell + \frac{1}{2} \frac{3qz_2^2}{\ell}$ ,

для изгибающего момента:

$M(z_2) = -q\ell(\ell + z_2) + R_b z_2 - \frac{1}{2} q(z_2) z_2 \cdot \frac{1}{3} z_2 = -q\ell^2 + \frac{5}{2} q\ell z_2 - \frac{qz_2^3}{2\ell}$ .

На этом участке поперечная сила, график которой представляет из себя кривую второго порядка с вершиной в точке В (там, где  $q(z_2)=0$ ) меняет знак, следовательно, существует экстремум функции  $M(z_2)$ . Приравняем  $Q(z_2)$  к нулю, найдем координату сечения, где  $M(z_2)$  экстремален.

$Q(z_2) = -\frac{5}{2} q\ell + \frac{3qz_2^2}{2\ell} = 0$ ,     $z_2 = \ell \sqrt{\frac{5}{3}} = 1,29\ell$ .

Тогда

$M_{\max} = -q\ell^2 + \frac{5}{2} q\ell \cdot 1,29\ell - q \frac{(1,29\ell)^3}{2\ell} = 1,15 q\ell^2$ .

Определяем значения  $Q(z_2)$  и  $M(z_2)$  на границах участка.

При  $z_2 = 0$ ,     $Q(z_2) = -\frac{5}{2} q\ell$ ,

$M(z_2) = -q\ell^2$ .

При  $z_2 = 2\ell$ ,     $Q(z_2) = -\frac{5}{2} q\ell + 3q \frac{(2\ell)^2}{2\ell} = \frac{7}{2} q\ell$ ,

$M(z_2) = -q\ell^2 + \frac{5}{2} q\ell \cdot 2\ell - q \frac{(2\ell)^3}{2\ell} = 0$ .

Пример №6. Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы, изображенной на рис. 1.6.

Решение. Определим опорные реакции. Для определения горизонтальной составляющей реакции опоры  $H_a$  воспользуемся уравнением проекций сил на горизонтальную ось X.

$\sum X = -H_a + 2q \cdot 4\ell = 0$ .

Для определения реакций  $R_a$  и  $R_b$  воспользуемся уравнениями моментов от всех сил, приложенных к системе, относительно опор А и В.

$\sum M_b = R_a \cdot 4\ell - 2q \cdot 4\ell \cdot 2\ell = 0$ ,

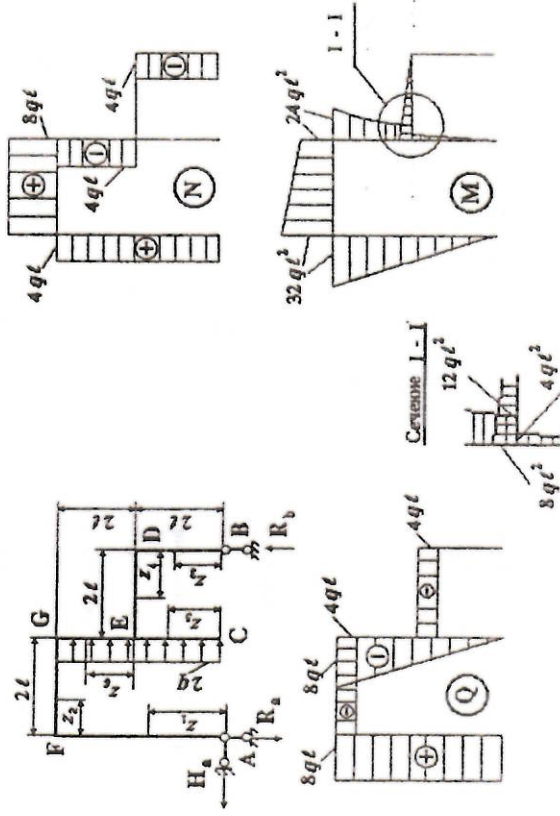


Рис. 1.6.

$\sum M_a = R_b \cdot 4\ell - 2q \cdot 4\ell \cdot 2\ell = 0$ .

Из этих уравнений найдем опорные реакции.

$H_a = 8q\ell$ ,     $R_a = 4q\ell$ ,     $R_b = 4q\ell$ .



Для проверки правильности вычисления значений реакций используем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = -R_3 + R_6 = -4q\ell + 4q\ell = 0.$$

Данная рама имеет шесть участков нагружения.

Первый участок AF:

$$0 \leq z_1 \leq 4\ell.$$

Начало участка выбираем в точке А.

$$N(z_1) = R_3 = 4q\ell,$$

$$Q(z_1) = H_3 = 8q\ell,$$

$$M(z_1) = H_3 z_1 = 8q\ell z_1.$$

При этом знаки внутренних силовых факторов назначаем следующим образом: N – положительна, при растяжении данного участка рамы.

Q – положительна, если внешняя нагрузка стремится повернуть выбранную часть рамы вокруг сечения по часовой стрелке.

M – положительна, если моменты от внешних сил слева от сечения направлены по часовой стрелке, а эпюра изгибающих моментов строится со стороны сжатых волокон рамы.

Определяем значения  $M(z_1)$  в характерных сечениях.

$$\text{При } z_1 = 0 \quad M(z_1) = 0.$$

$$\text{При } z_1 = 4\ell \quad M(z_1) = 32 q\ell^2.$$

Второй участок FG

$$0 \leq z_2 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке F.

$$N(z_2) = H_3 = 8q\ell,$$

$$Q(z_2) = -R_3 = -4q\ell,$$

$$M(z_2) = H_3 z_2 - R_3 z_2 = 32q\ell^2 - 4q\ell z_2.$$

Определяем значение  $M(z_2)$  на границах участка

$$\text{При } z_2 = 0, \quad M(z_2) = 32 q\ell^2.$$

$$\text{При } z_2 = 2\ell, \quad M(z_2) = 24 q\ell^2.$$

Третий участок BD

$$0 \leq z_3 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке B.

$$N(z_3) = -R_6 = -4q\ell,$$

$$Q(z_3) = 0, \quad M(z_3) = 0.$$

Четвертый участок DE

$$0 \leq z_4 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке D.

$$N(z_4) = 0,$$

$$Q(z_4) = -R_6 = -4q\ell,$$

$$M(z_4) = R_6 z_4 - 4q\ell z_4.$$

Определяем значение  $M(z_4)$  на границах участка

$$\text{При } z_4 = 0, \quad M(z_4) = 0.$$

$$\text{При } z_4 = 2\ell, \quad M(z_4) = 8 q\ell^2.$$

Пятый участок CE

$$0 \leq z_5 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке C.

$$N(z_5) = 0,$$

$$Q(z_5) = -2qz_5,$$

$$M(z_5) = 2q \frac{z_5^2}{2} = q z_5^2.$$

Определяем значение  $Q(z_5)$  и  $M(z_5)$  на границах участка

$$\text{При } z_5 = 0, Q(z_5) = 0, \quad M(z_5) = 0.$$

$$\text{При } z_5 = 2\ell, \quad Q(z_5) = -4q\ell, \quad M(z_5) = 4 q\ell^2.$$

Шестой участок EG

$$0 \leq z_6 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке E.

$$N(z_0) = -R_b = -4q\ell,$$

$$Q(z_0) = -2q(2\ell + z_0),$$

$$M(z_0) = R_b 2\ell + 2q \frac{(2\ell + z_0)^2}{2} = 8q\ell^2 + q(2\ell + z_0)^2.$$

Определяем значение  $Q(z_0)$  и  $M(z_0)$  на границах участка

$$\text{При } z_0 = 0, Q(z_0) = -4q\ell, \quad M(z_0) = 12q\ell^2.$$

$$\text{При } z_0 = 2\ell, \quad Q(z_0) = -8q\ell, \quad M(z_0) = 24q\ell^2.$$

**Пример № 7.** Построить эпюры нормальных сил для фермы, изображенной на рис. 1.7.

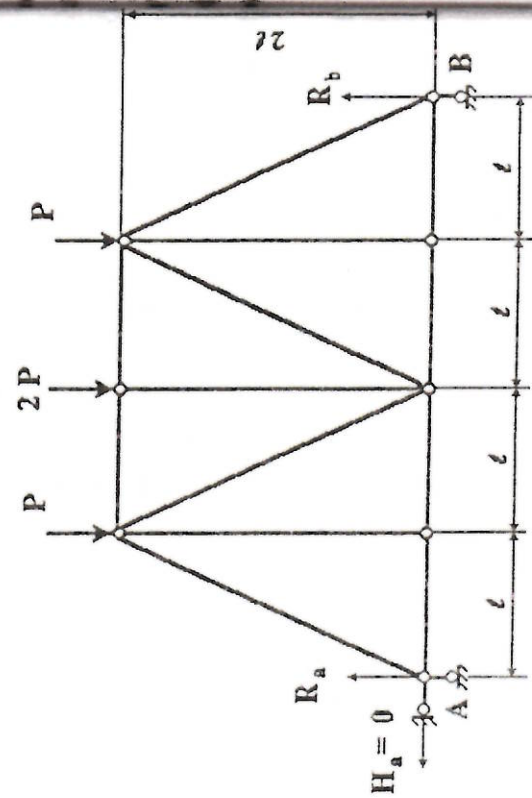


Рис. 1.7.

**Решение.** Для определения реакций  $R_a$  и  $R_b$  воспользуемся уравнениями моментов от всех сил, приложенных к системе, относительно опор A и B.

$$\sum M_b = -R_a 4\ell + P 3\ell + 2P 2\ell + P\ell = 0,$$

$$\sum M_a = R_b 4\ell - P\ell - 2P 2\ell - P 3\ell = 0.$$

Из этих уравнений найдем опорные реакции.

$$R_a = 2P, \quad R_b = 2P.$$

Горизонтальная составляющая опоры A равна нулю (из-за отсутствия горизонтальных внешних нагрузок).

В основу аналитического расчета усилий в стержнях статически определимой фермы положено общая система уравнений равновесия узлов фермы или отдельных ее частей, путем их вырезания. Важно так вырезать узел, или часть, чтобы из уравнений равновесия можно было бы определить искомыми усилия без решения совместной системы уравнений.

Для расчета применяют либо способ моментной точки, либо способ вырезания узлов. Воспользуемся последним способом. Предварительно пронумеруем узлы фермы. Нумерация узлов фермы соответствует последовательности рассмотрения их равновесия при определении усилий в стержнях.

Все узлы фермы обозначим порядковыми номерами: 1, 2, 3, . . . . Порядковые усилия в стержнях обозначим через  $N_{ij}$ , где i, j - номера узлов фермы соединяемых стержнем (рис. 1.7а). Пусть при этом первый индекс i всегда меньше j.

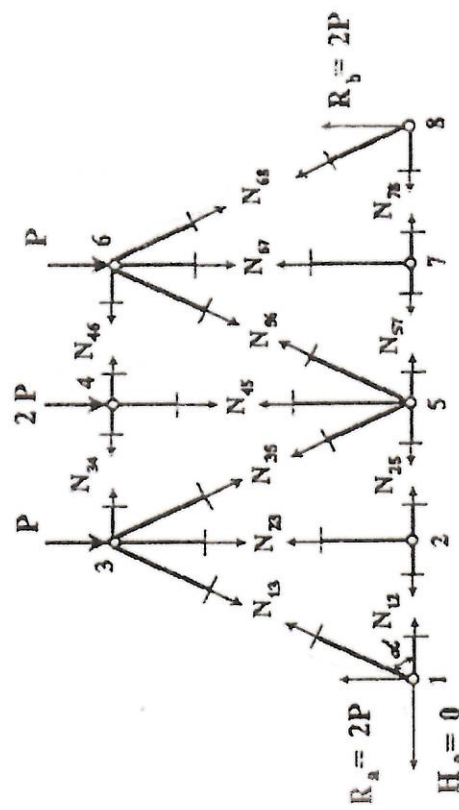


Рис. 1.7а.



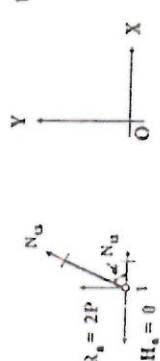
Необходимо так вырезать каждый из узлов фермы, чтобы он содержал не более двух неизвестных, которые легко определить из условий равновесия узла  $\sum X = 0, \sum Y = 0$ . Учтя, что ферма обладает симметрией и внешние нагрузки симметричны относительно стержня  $S_{45}$ , достаточно определить усилия в правой или левой половине фермы.

Учтем что  $N_{13} = N_{68}, N_{23} = N_{67}$  и т. д.

Вырезаем узел 1.

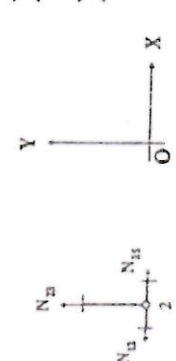
Составим уравнения проекций сил на оси  $OX$  и  $OY$ .

Угол  $\alpha$  определим из геометрии фермы.




$$\begin{aligned} R_x &= 2P \\ N_u &= 0 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2l}{l} = 2, \quad \sin \alpha = 0,894, \quad \cos \alpha = 0,447. \\ \sum X &= N_{12} + N_{13} \cos \alpha = 0, & N_{12} &= -N_{13} \cos \alpha. \\ \sum Y &= 2P + N_{13} \sin \alpha = 0, & N_{13} &= -\frac{2P}{\sin \alpha} = -2,24P, \quad N_{12} = \frac{2P \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2P}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Вырезаем узел 2.



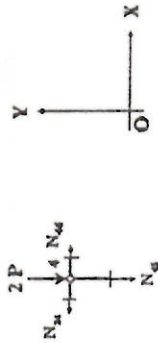
$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{12} + N_{25} = 0, \quad N_{25} = N_{12} = P. \\ \sum Y &= N_{23} = 0. \end{aligned}$$

Вырезаем узел 3.



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{34} \\ N_{34} &= -\frac{3}{2}P, \\ N_{35} &= \frac{3}{2}P \cos \alpha - \frac{2P}{\sin \alpha} = 1,12P. \\ \sum Y &= -N_{35} \sin \alpha - N_{36} \sin \alpha - P = 0, \end{aligned}$$

Вырезаем узел 4.



$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{34} + N_{46} = 0, \\ N_{46} &= N_{34} = \frac{3}{2}P. \\ \sum Y &= -2P - N_{45} = 0, \\ N_{45} &= -2P. \end{aligned}$$

Остальные усилия определяются из условий симметрии:

$$\begin{aligned} N_{56} &= N_{35} = 1,12P, \\ N_{57} &= N_{25} = P, \\ N_{67} &= N_{23} = 0, \\ N_{78} &= N_{12} = P, \\ N_{68} &= N_{13} = -2,24P. \end{aligned}$$

Построим эпюру  $N_{ij}$  в элементах фермы (Рис. 1.76).

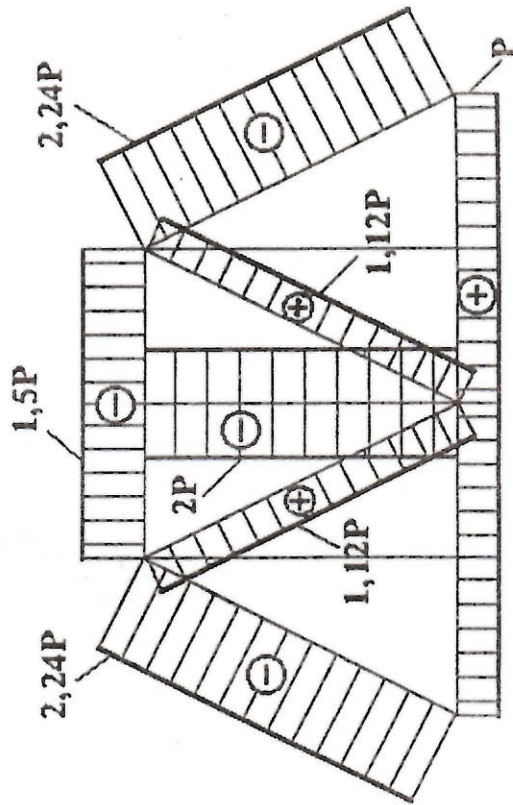


Рис. 1.76.

Пример № 8. Построить эпюры внутренних усилий в трехшарнирной арке, очерченной по дуге окружности и нагруженной вертикальной нагрузкой (рис. 1.8.).

Решение. Для арки, представляющей часть окружности, уравнение параметрической форме запишется как:

$$z = R (\sin \varphi_0 - \sin \varphi),$$

$$y = R (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

где:  $\varphi_0$  - угол наклона касательной к дуге арки в начале координат; R - радиус окружности.

$$R = \frac{L^2}{8H} + \frac{H}{2}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{L}{2R}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - \frac{H}{R}.$$

Уравнение оси арки, очерченной по квадратной параболы, в обозначениях представленных на рис. 1.8, имеет вид:

$$y = 4 \frac{H}{L^2} z(L-z), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} = 4 \frac{H}{L} (L-2z).$$

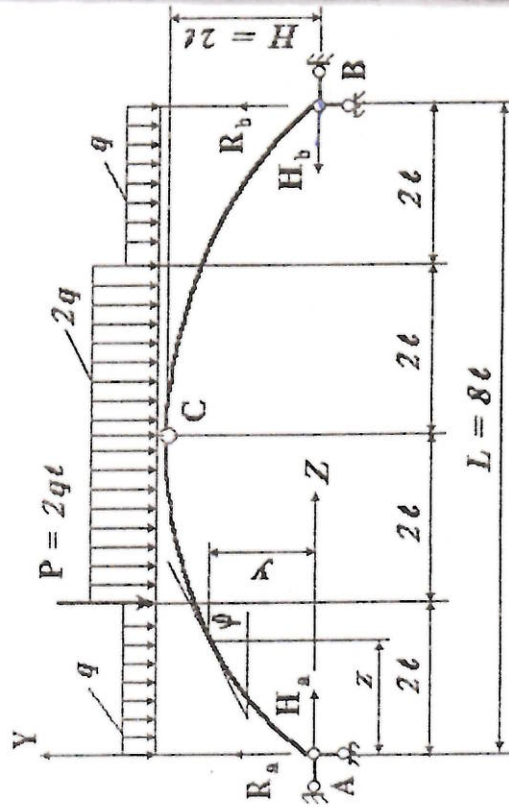


Рис. 1.8.

Для синусоидальной арки:

$$y = HS \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} = \frac{H\pi}{L} \cos \frac{\pi z}{L}.$$

Определяем реакции опор, используя для этого уравнения равновесия.

$$\sum M_b = -R_a 8l + q 2l 7l + P 6l + 2q 4l 4l + q 2l 4l = 0,$$

$$R_a = \frac{60}{8} ql = 7,5 ql.$$

$$\sum M_a = R_b 8l - q 2l 7l - 2q 4l 4l - P 2l - q 2l 4l = 0,$$

$$R_b = \frac{52}{8} ql = 6,5 ql.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_a + R_b - q 2l - P - 2q 4l - q 2l = 0,$$

$$14 ql - 14 ql = 0.$$

Распор  $H_a = H_b$  определим из уравнения моментов относительно шарнира составленного для левой или правой половин арки.

$$\sum M_c^* = 0,$$

$$-R_a 4l + H_a 2l + q 2l 3l + P 2l + 2q 2l 4l = 0,$$

$$H_a = 8ql.$$

При действии внешних нагрузок в сечениях трехшарнирной арки возникают: изгибающий момент  $M_{int}$ , поперечная сила Q и нормальная сила N, которые определяются из уравнений равновесия отсеченной части арки. При этом силы проектируются на нормаль к сечению (сечение перпендикулярно к арке), чтобы определить N и на ось перпендикулярную нормали к сечению, чтобы определить Q.

Нормальная сила положительна, если вызывает растяжение. Поперечная сила Q положительна, если вращает рассматриваемую часть арки вокруг центра по часовой стрелке. Изгибающий момент положителен, если вызывает растяжение верхних волокон сечения арки.



При расчете арки на действие вертикальной нагрузки удобно использовать так называемую эквивалентную балку (рис 1.8а).

Усилия в этом случае могут быть определены по формулам:

$$M_{нар} = M_{ст}^e - H_a y,$$

$$Q = Q^e \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = - [ Q^e \sin \varphi + H_a \cos \varphi ],$$

где,  $\varphi$  - угол между касательной к оси арки и осью OZ; z, y - координаты сечения арки;  $M_{ст}^e$ ,  $Q^e$  - изгибающий момент и поперечная сила в соответствующем сечении эквивалентной балки.

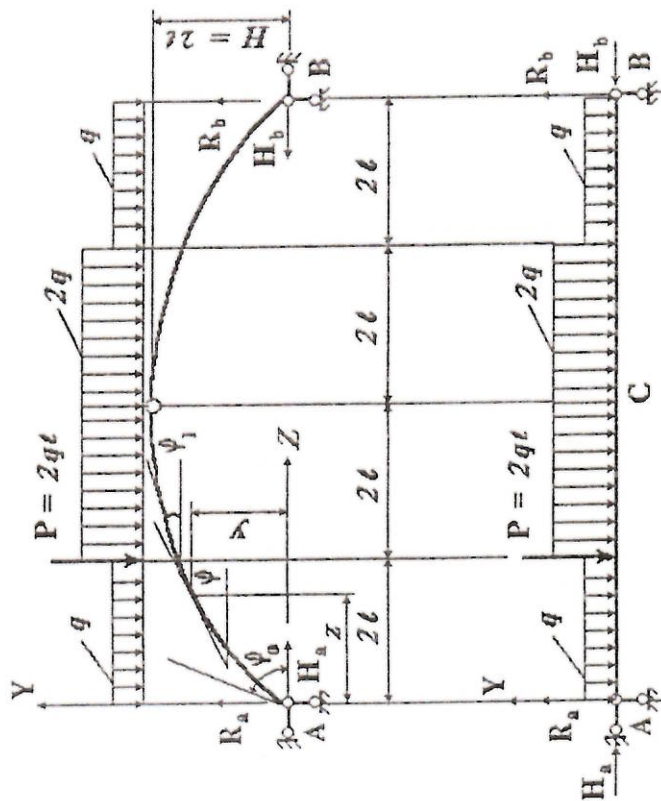


Рис. 1.8а.

Начало координат выбираем в опоре А. Определяем внутренние силовые факторы на участке

$$0 \leq z \leq 2\ell \quad (\varphi_0 \geq \varphi \geq \varphi_1, 0 \leq y \leq Y)$$

$$M_{нар} = R_a z - \frac{qz^2}{2} - H_a y = 7,5 q\ell z - \frac{qz^2}{2} - 8 q\ell y,$$

$$Q = (R_a - qz) \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = - [ (R_a - qz) \sin \varphi + H_a \cos \varphi ].$$

Для построения эпюры определяем  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  ( $\varphi_1$  - угол наклона касательной на конце участка).

$$R = \frac{L^2}{8H} + \frac{H}{2} = 4\ell \zeta = 5\ell, \quad \sin \varphi_0 = \frac{L}{2R} = 0,8,$$

$$\varphi_0 = 53^{\circ}8'; \quad z = R (\sin \varphi_0 - \sin \varphi);$$

при  $z = 2\ell \quad \varphi = \varphi_1$

$$2\ell = 5\ell (0,8 - \sin \varphi_1); \quad \sin \varphi_1 = 0,4; \quad \varphi_1 = 23^{\circ}35'.$$

определяем внутренние силовые факторы на участке  $2\ell \leq z \leq 6\ell$

$$(\varphi_1 \geq \varphi \geq \varphi_2, Y_1 \geq y \leq H, \quad \varphi_2 = -\varphi_1 = -23^{\circ}35').$$

$$M_{нар} = R_a z - 2q\ell (z - \ell) - P(z - 2\ell) - H_a y - 2q \frac{(z - 2\ell)^2}{2},$$

$$Q = [ R_a - q 2\ell - P - 2q(z - 2\ell) ] \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = - [ (R_a - 2qz) \sin \varphi + H_a \cos \varphi ].$$

определяем внутренние силовые факторы на участке  $6\ell \leq z \leq 8\ell$ .

$$(\varphi_2 \geq \varphi \geq \varphi_3, Y_1 \geq y \geq 0, \quad \varphi_2 = -23^{\circ}35', \quad \varphi_3 = -\varphi_0 = -53^{\circ}8').$$

$$M_{нар} = R_a z - 2q\ell (z - \ell) - P(z - 2\ell) - 2q 4\ell (z - 4\ell) - q \frac{(z - 6\ell)^2}{2} - H_a y,$$

$$Q = [ R_a - q 2\ell - P - 8q\ell - q(z - 6\ell) ] \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = - [ (R_a - 6q\ell - qz) \sin \varphi + H_a \cos \varphi ].$$

Эпюры N, Q, M приведены на рис. 1.8б.

**Пример № 9.** Построить эпюры внутренних усилий, действующих в поперечных сечениях пространственного ломаного бруса.

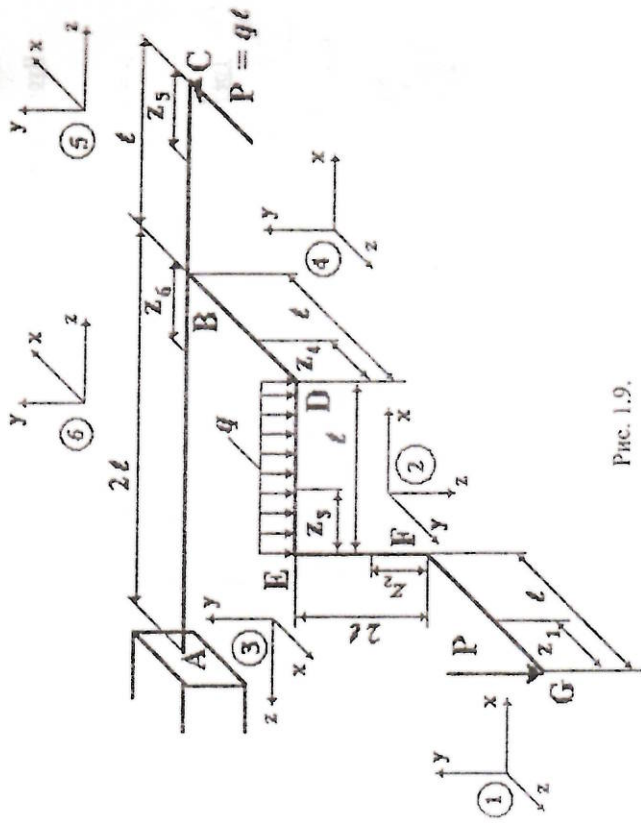


Рис. 1.9.

**Решение.** Составим аналитические выражения для определения внутренних усилий в элементах бруса.

Первый участок GF:

$$0 \leq z_1 \leq l.$$

При определении усилий в элементе GF используем систему координат, изображенную около элемента GF.

В сечении  $z_1$  получим, что:

$$N = 0, Q_y = -P = -ql.$$

Знак  $Q_y$  положительный, если рассматриваемая часть бруса со стороны оси X вращается вокруг сечения от силы P по часовой стрелке.

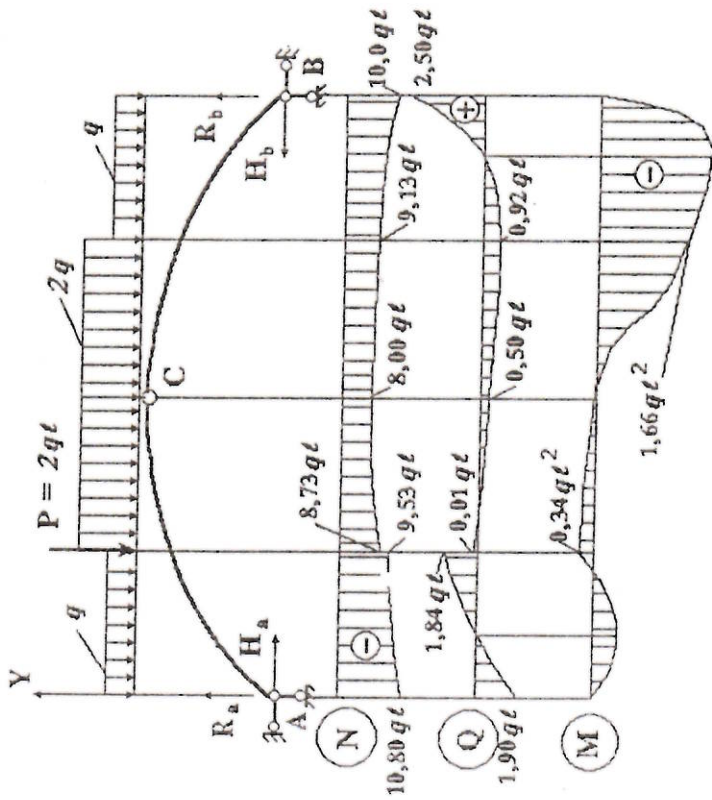


Рис. 1.86.



$$Q_x = 0, M_z = 0, M_x = -Pz_1 = -q\ell z_1, \quad M_y = 0.$$

Знак момента  $M_x$  - положительный при положительной кривизне оси стержня (сжаты верхние волокна)

Второй участок EF:

$$0 \leq z_2 \leq \ell.$$

$N = P$ . Знак  $N$  - положительный при растяжении.

$$Q_x = 0, Q_y = 0, \quad M_z = 0, \quad M_x = -P\ell = -q\ell^2, \quad M_y = 0.$$

Третий участок DE:

$$0 \leq z_3 \leq \ell.$$

$$N = 0, Q_x = 0, \quad Q_y = -P - qz_3 = -q\ell - qz_3,$$

$$M_z = -P\ell = -q\ell^2, \quad M_x = -Pz_3 - \frac{qz_3^2}{2}, \quad M_y = 0.$$

Четвертый участок BD:

$$0 \leq z_4 \leq \ell.$$

$$N = 0, Q_x = 0, \quad Q_y = -P - q\ell = -2q\ell,$$

$$M_z = P\ell + q\ell \frac{\ell}{2} = \frac{3}{2}q\ell^2, \quad M_x = -P(\ell + z_4) - q\ell z_4, \quad M_y = 0.$$

Пятый участок BC:

$$0 \leq z_5 \leq \ell.$$

$$N = 0, \quad Q_x = -P = -q\ell, \quad Q_y = 0,$$

$$M_z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = Pz_5 = q\ell z_5.$$

Шестой участок AB:

$$0 \leq z_6 \leq 2\ell.$$

$$N = 0, Q_x = -P = -q\ell, \quad Q_y = -P - q\ell = -2q\ell,$$

$$M_z = P2\ell + q\ell^2 = 3q\ell^2, \quad M_x = P(\ell + z_6),$$

$$M_y = P(\ell - z_6) + q\ell \left(\frac{\ell}{2} - z_6\right) = \frac{3}{2}q\ell^2 - 2q\ell z_6.$$

Эпюры внутренних силовых факторов приведены на рис. 1.9а.

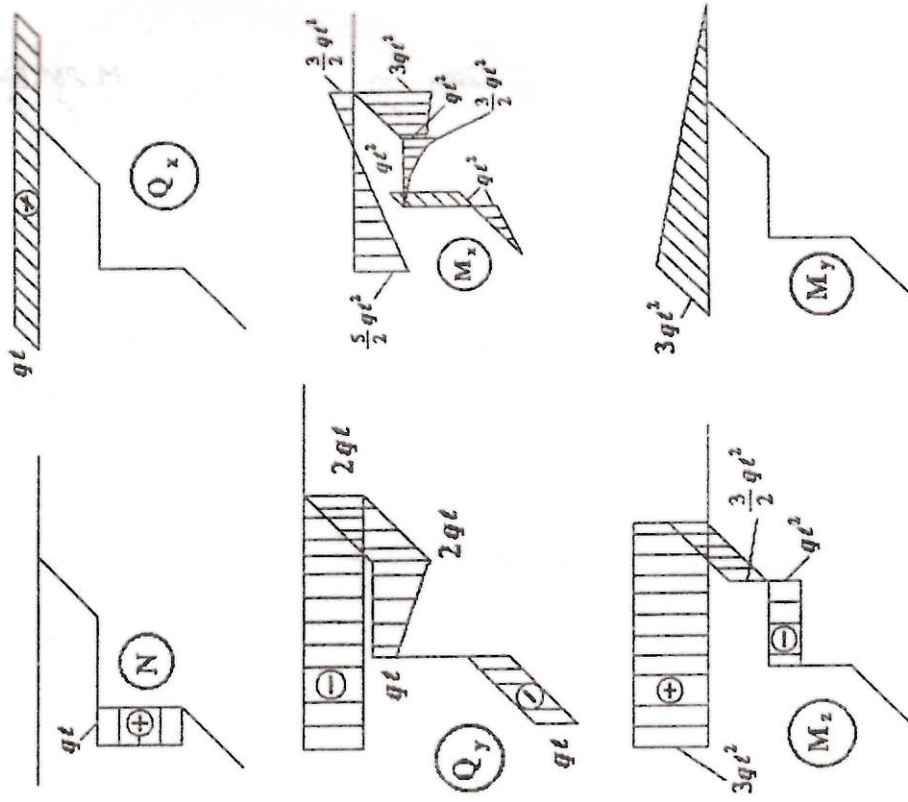
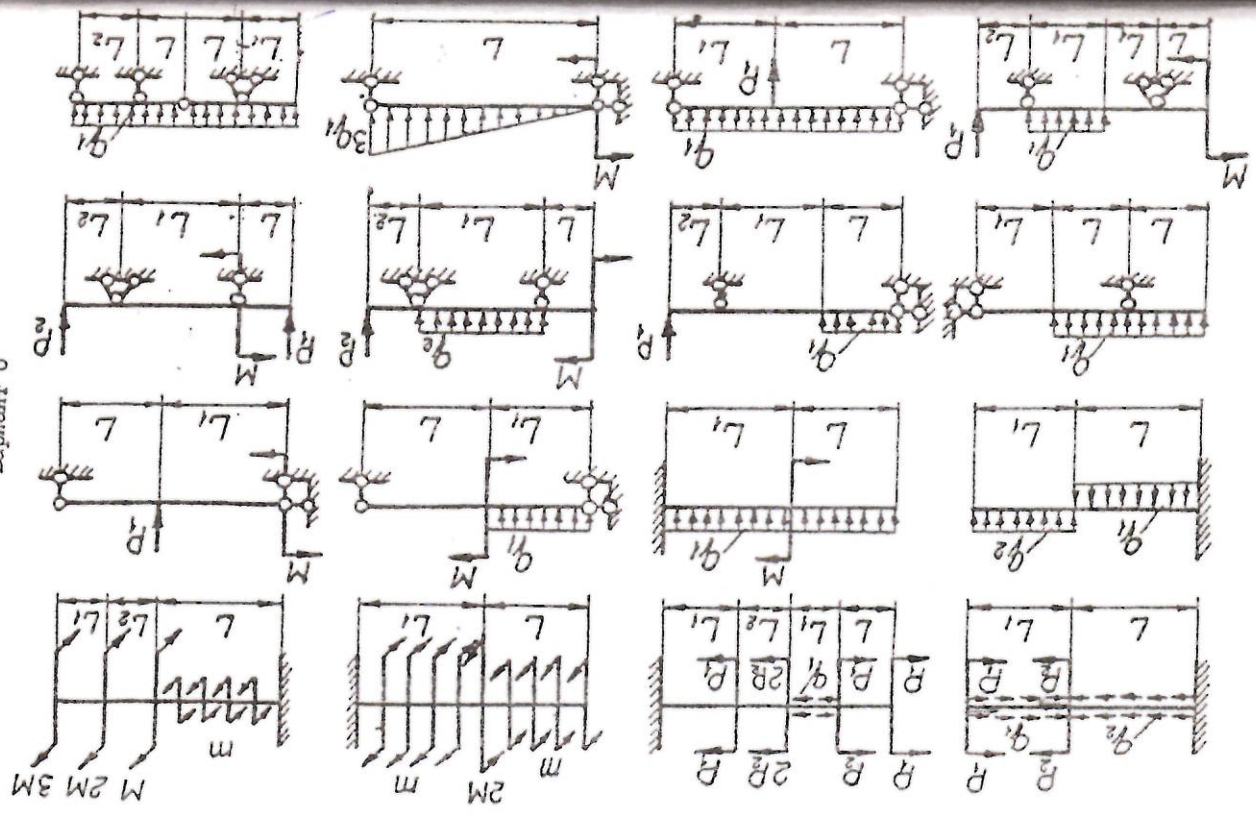
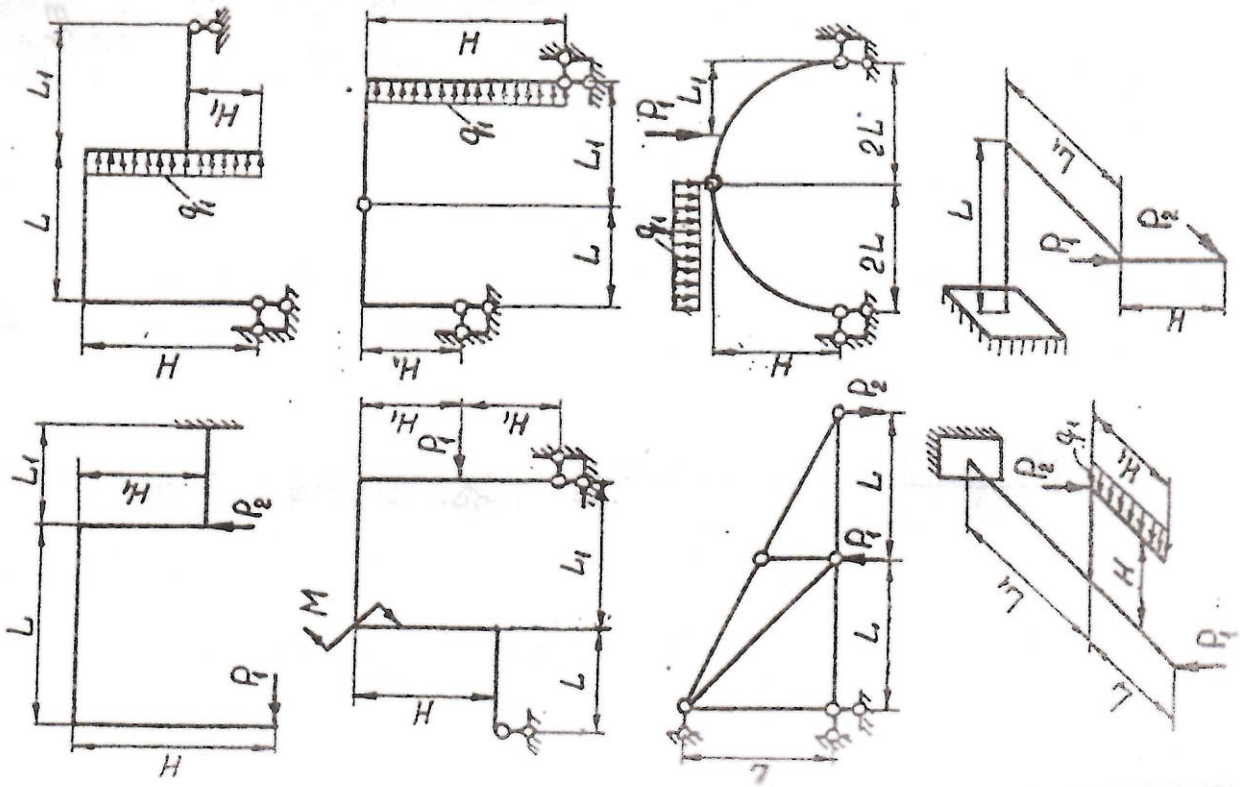
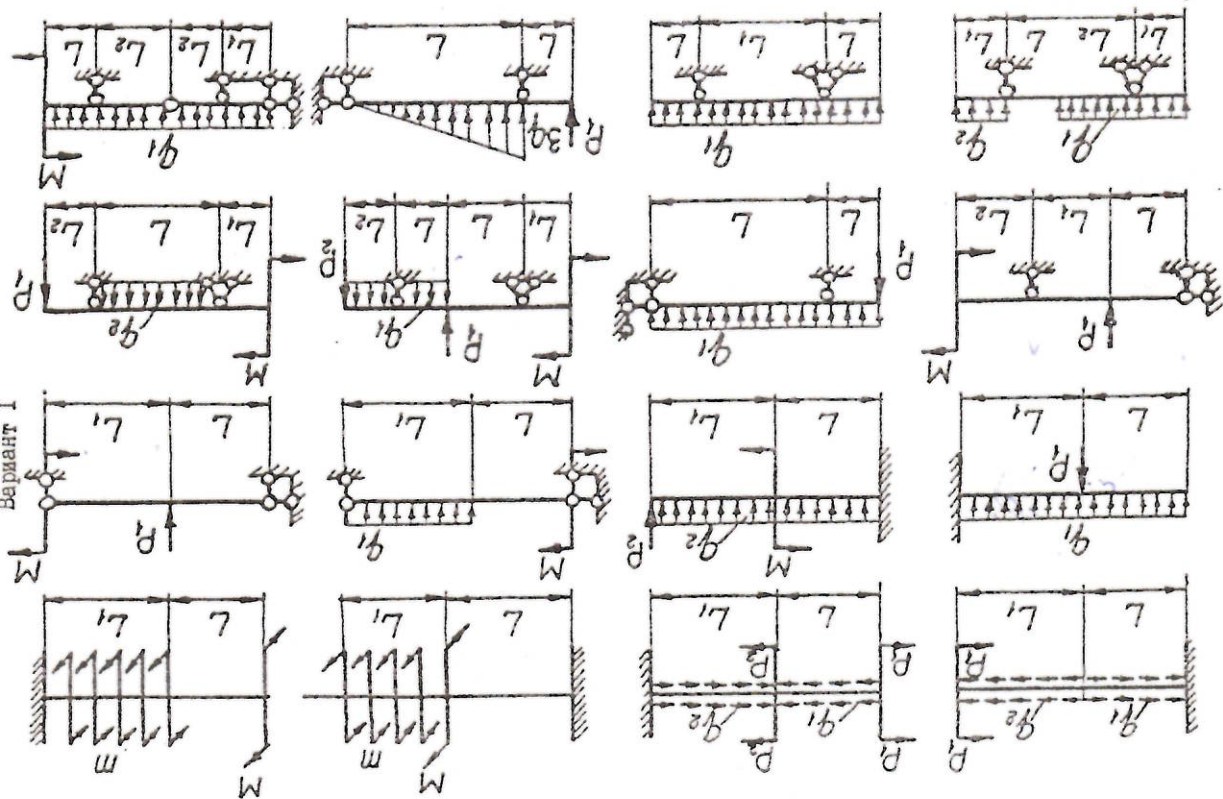
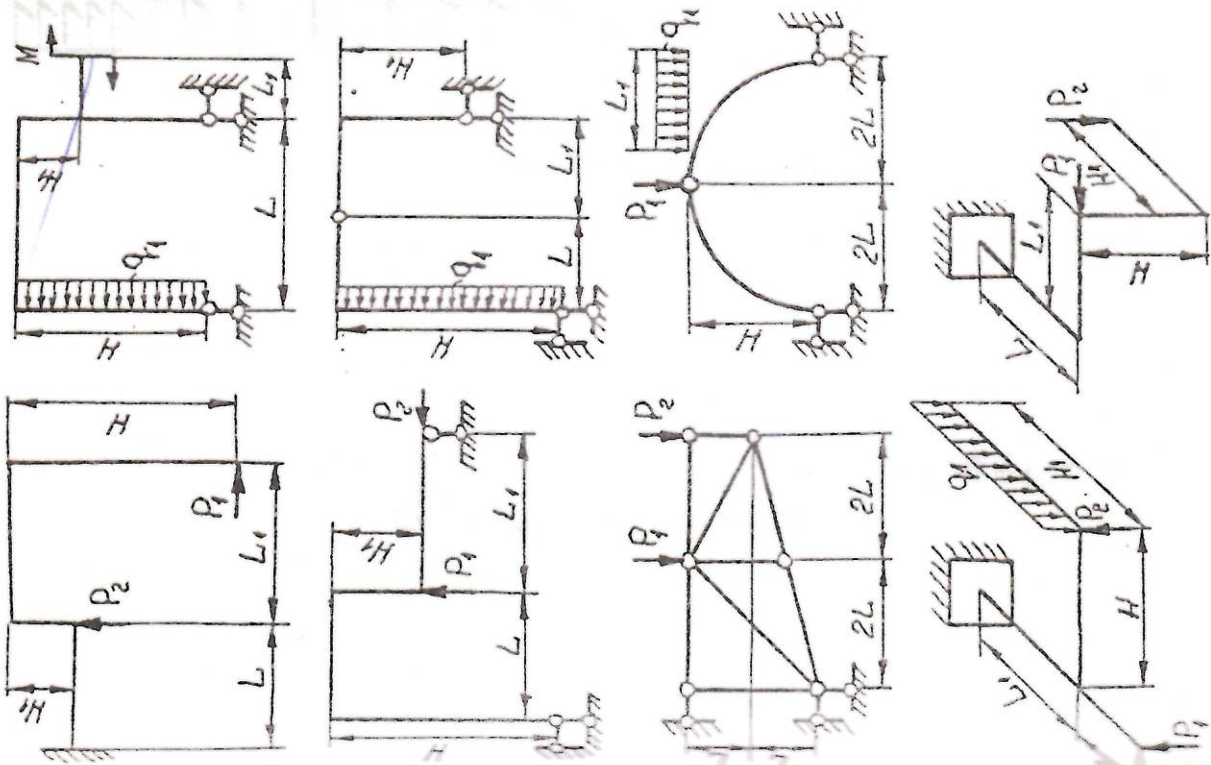


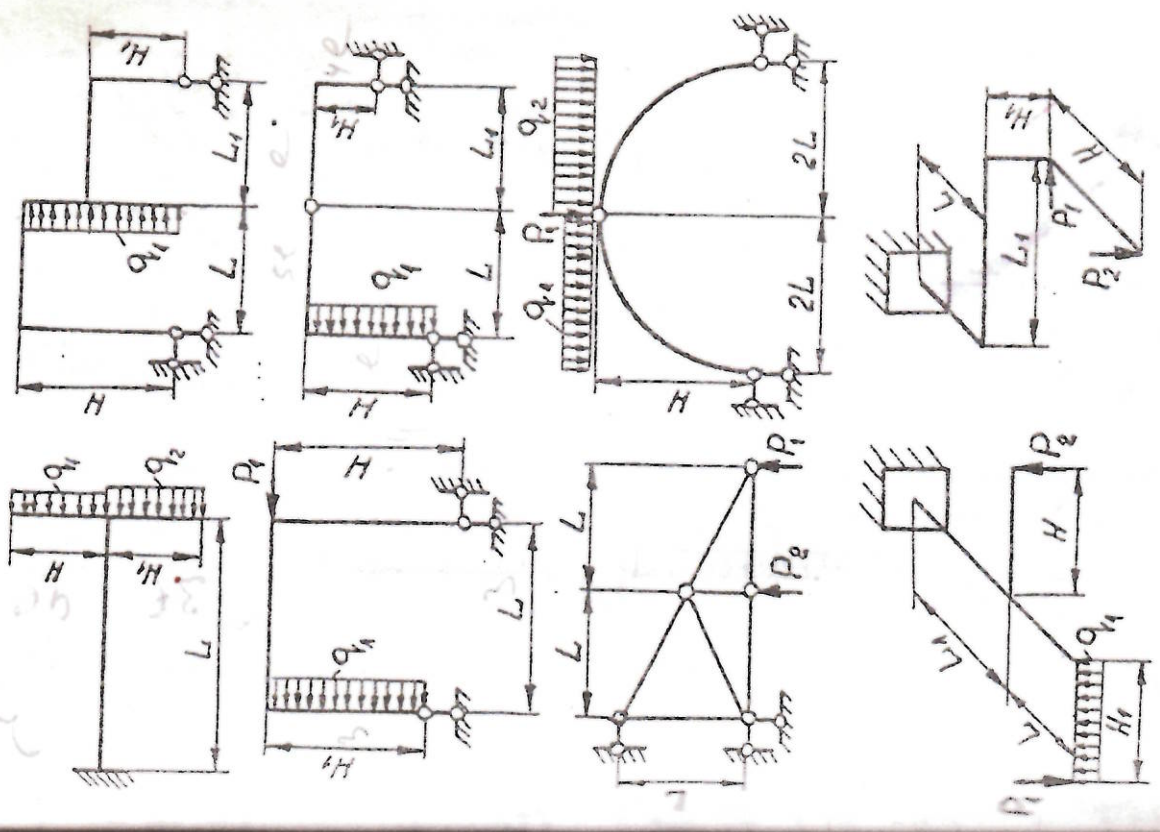
Рис. 1.9а.



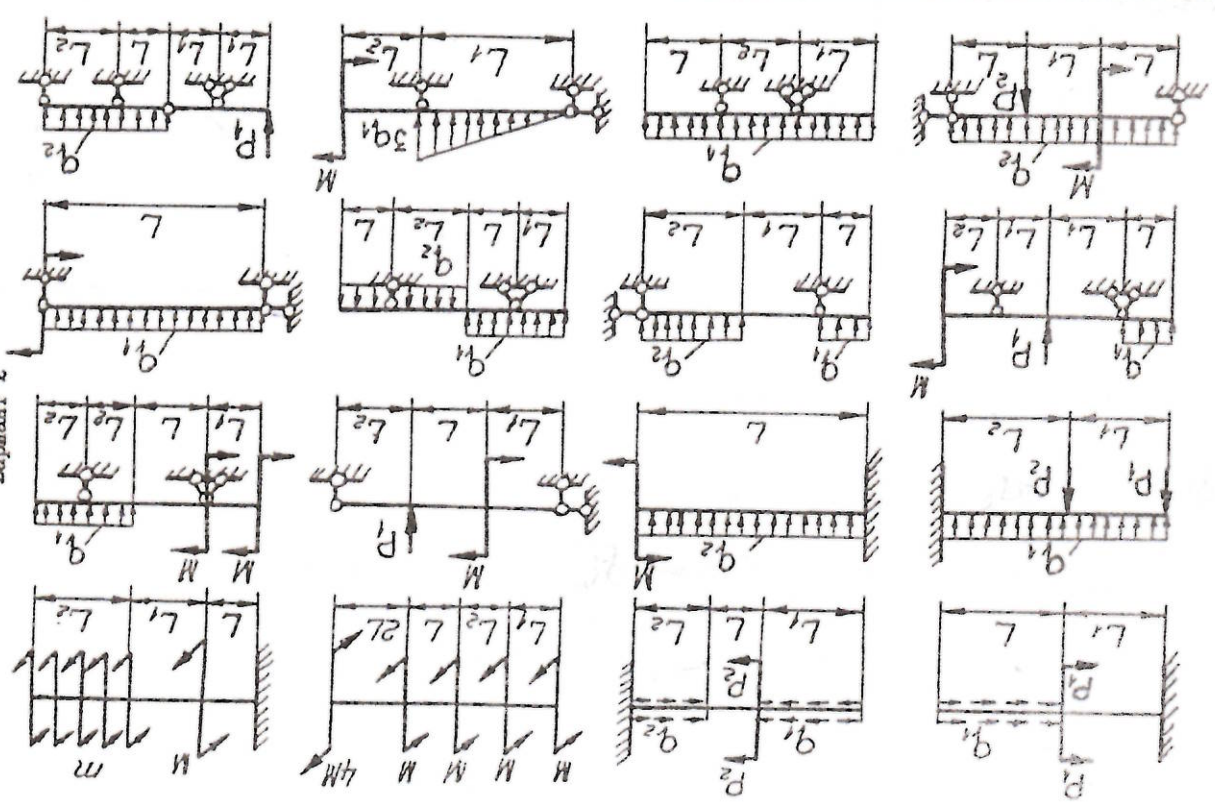




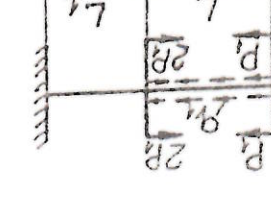
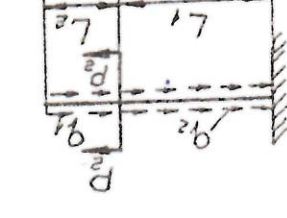
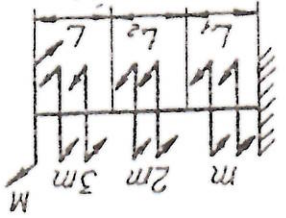
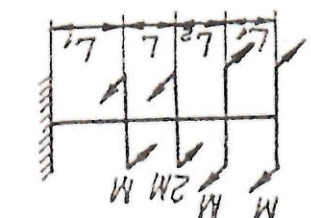
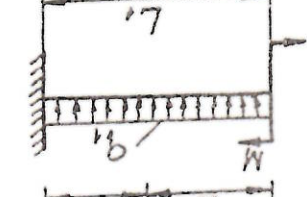
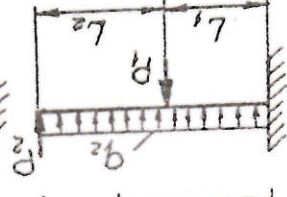
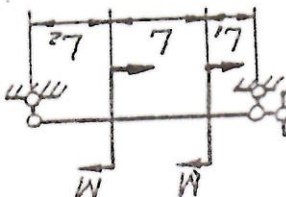
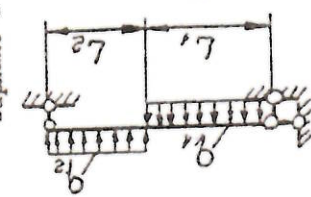
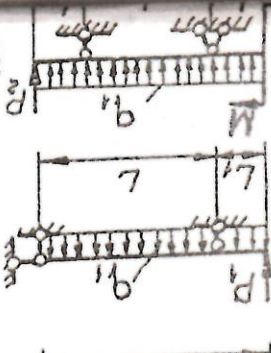
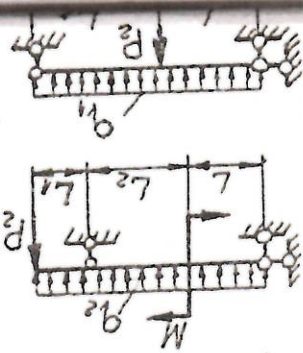
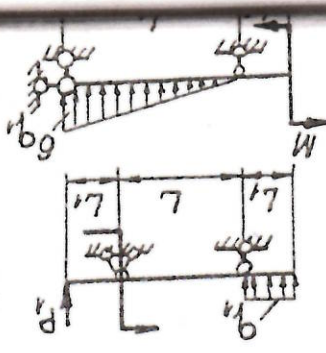
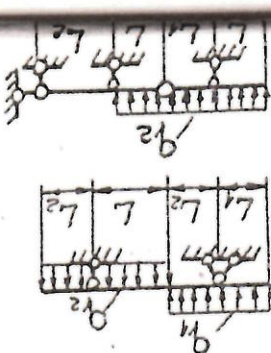
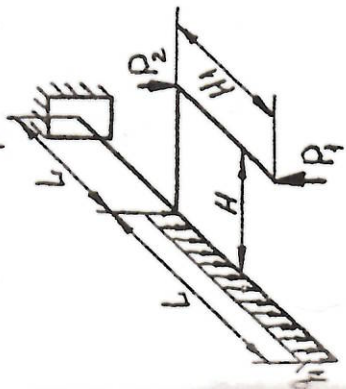
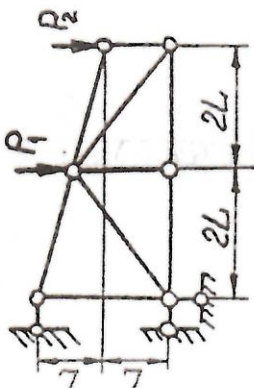
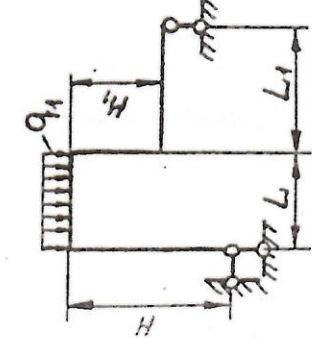
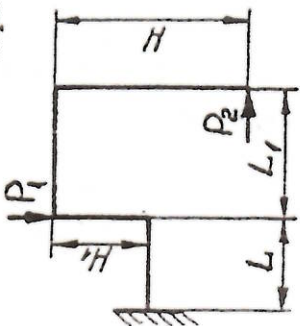
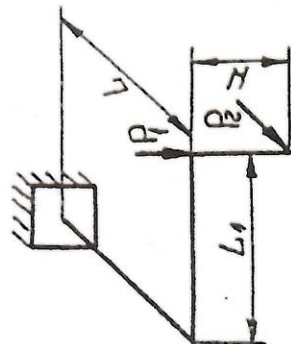
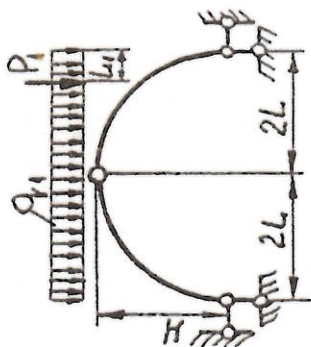
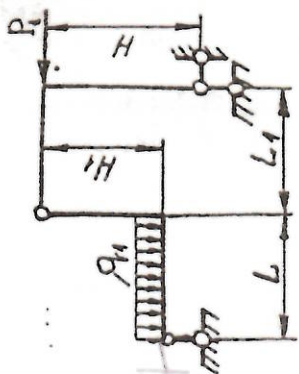
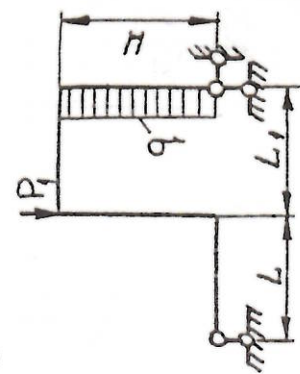
Вариант 2



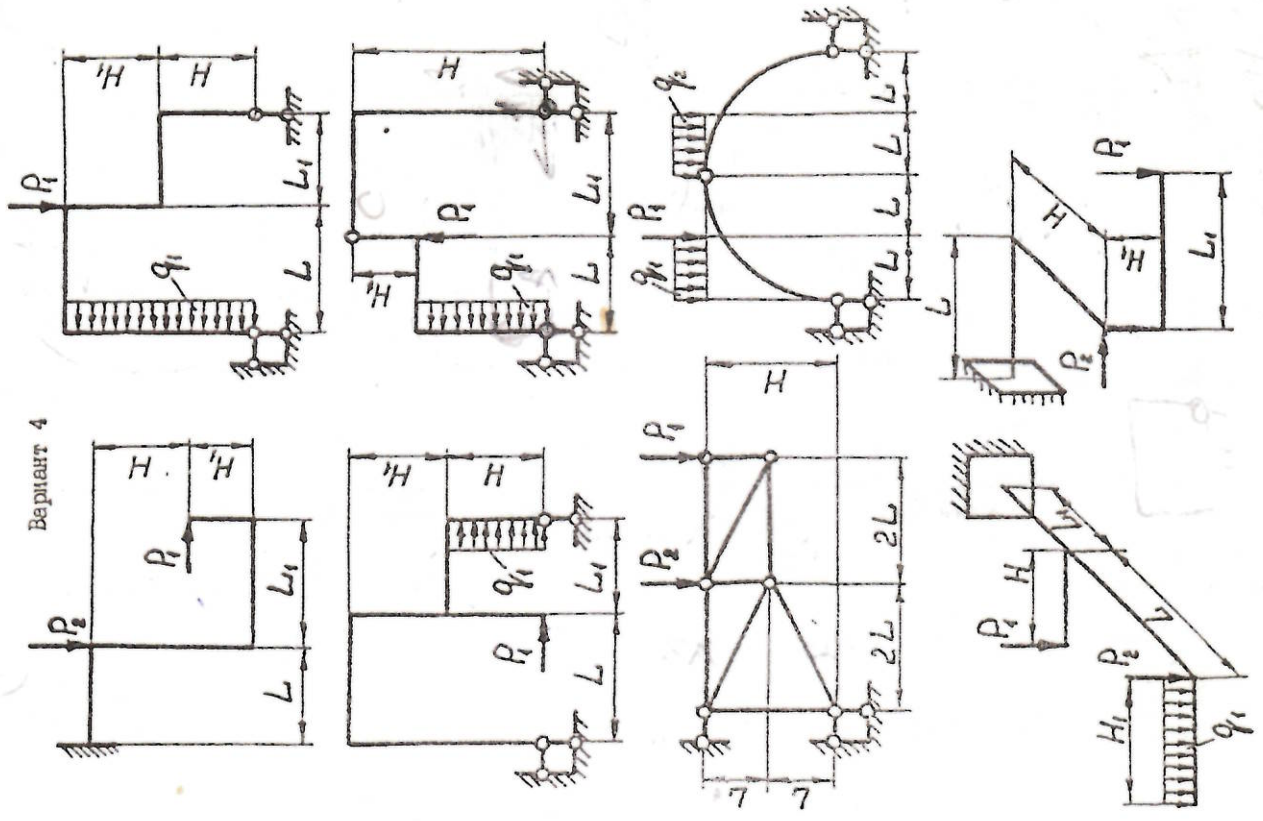
Вариант 2



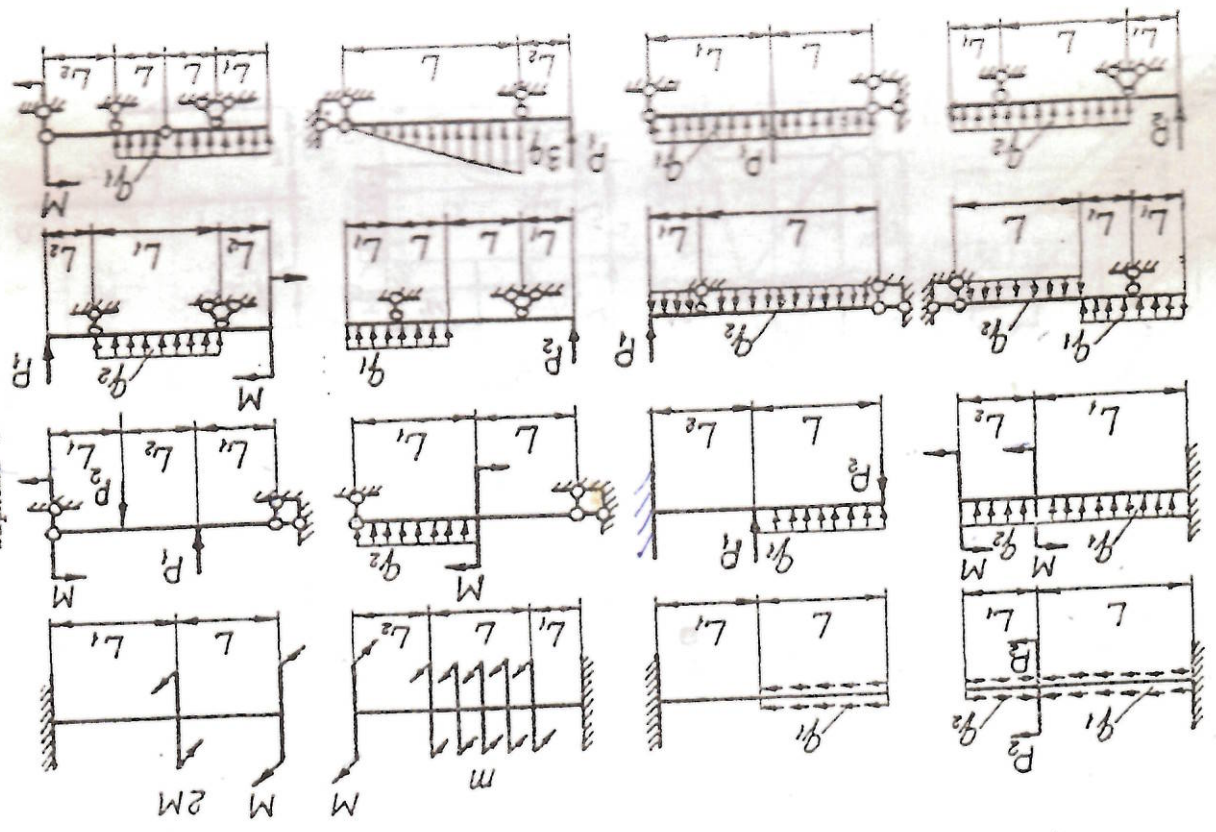




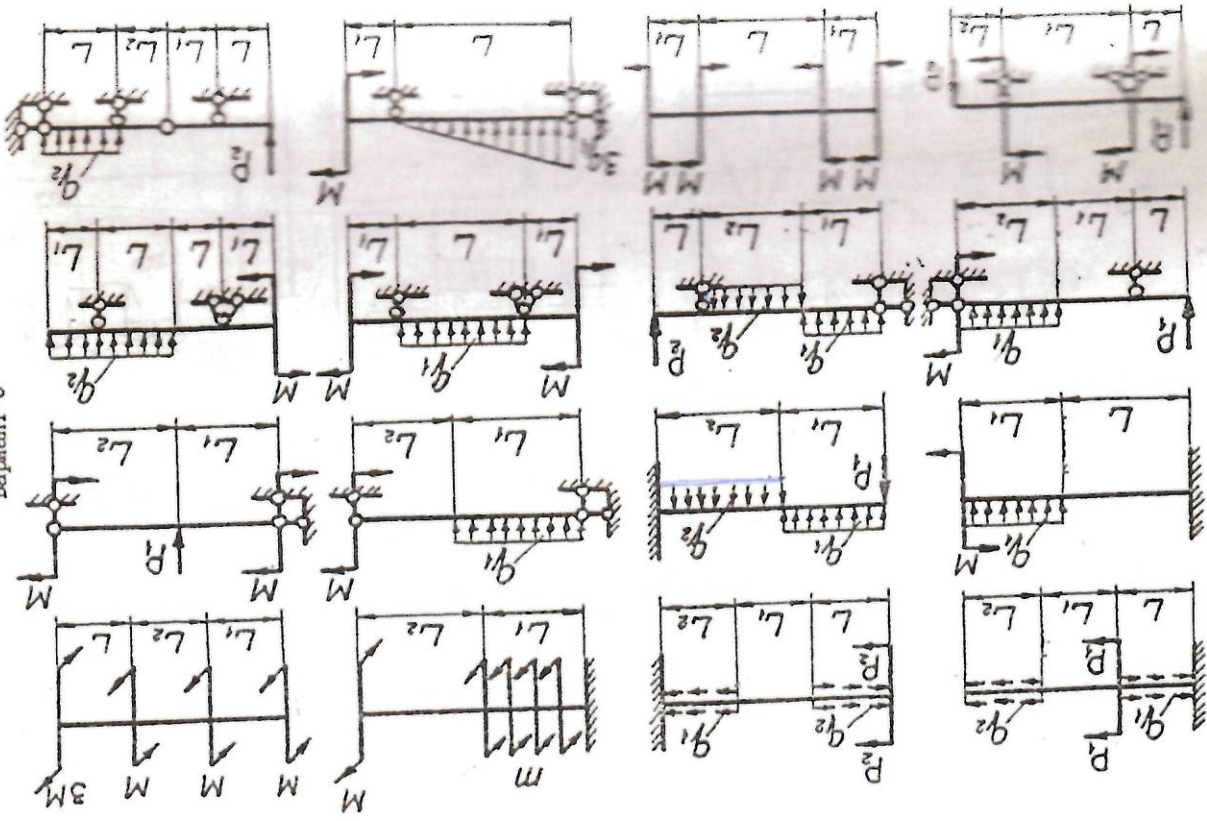
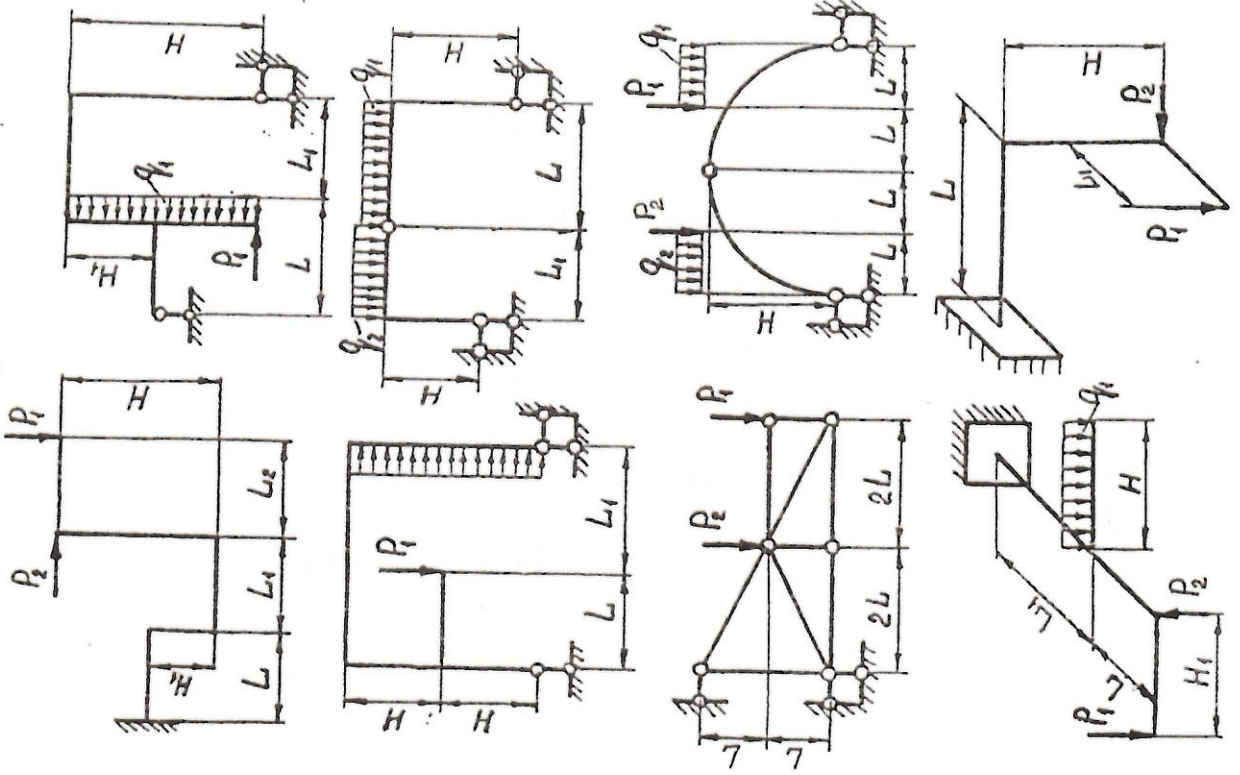
Вариант 4



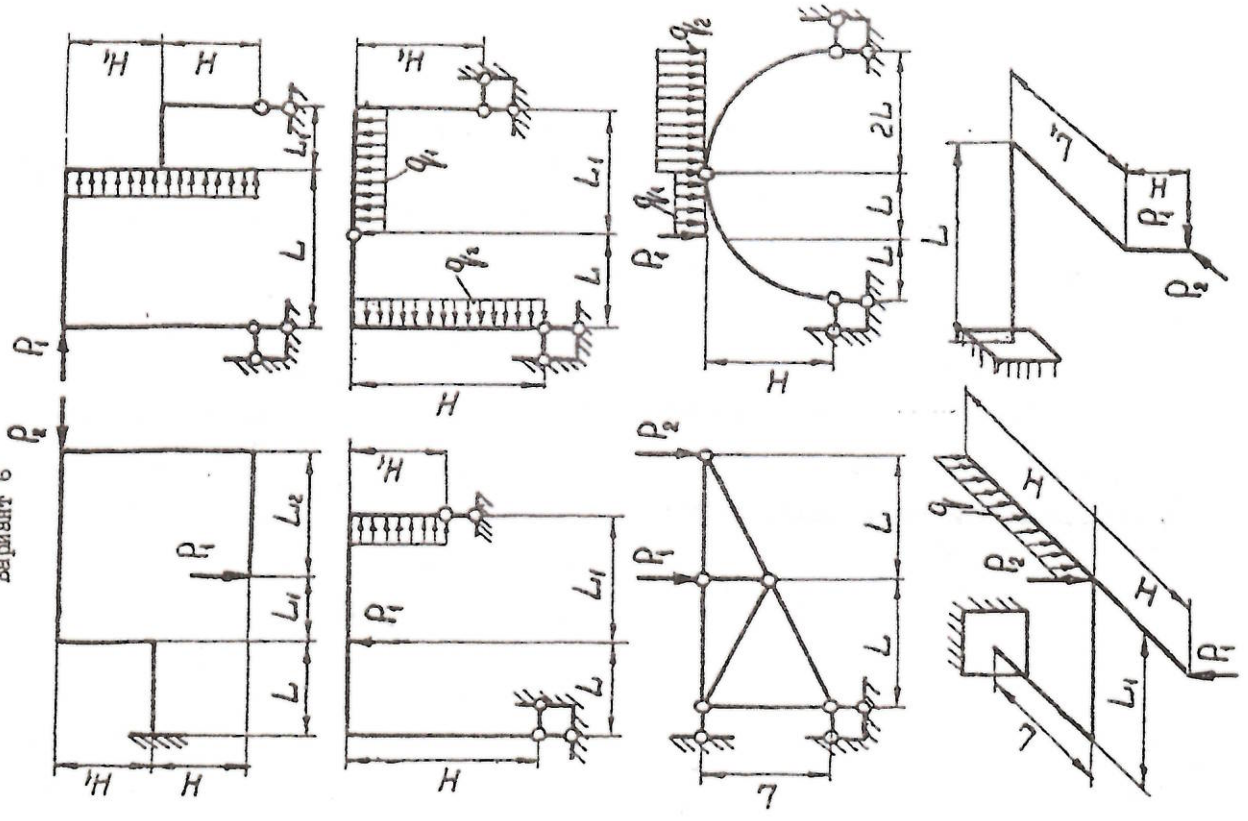
Вариант 4



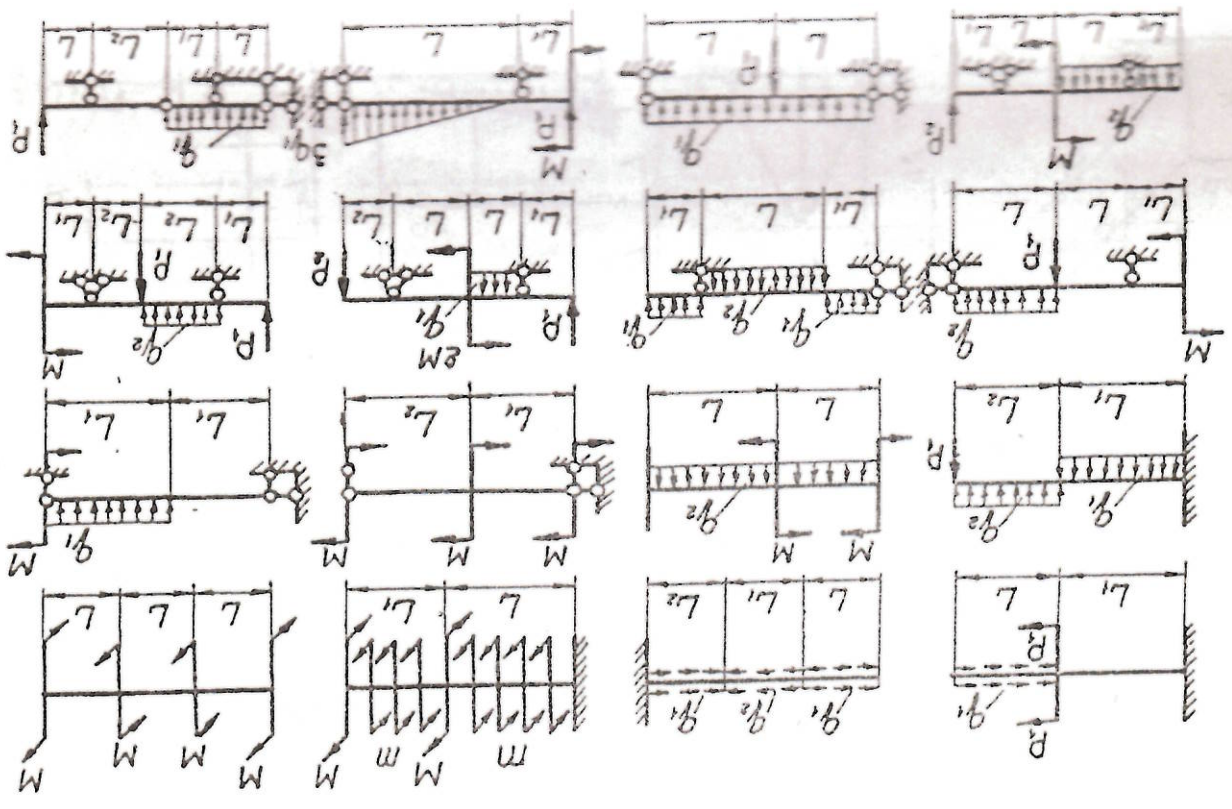




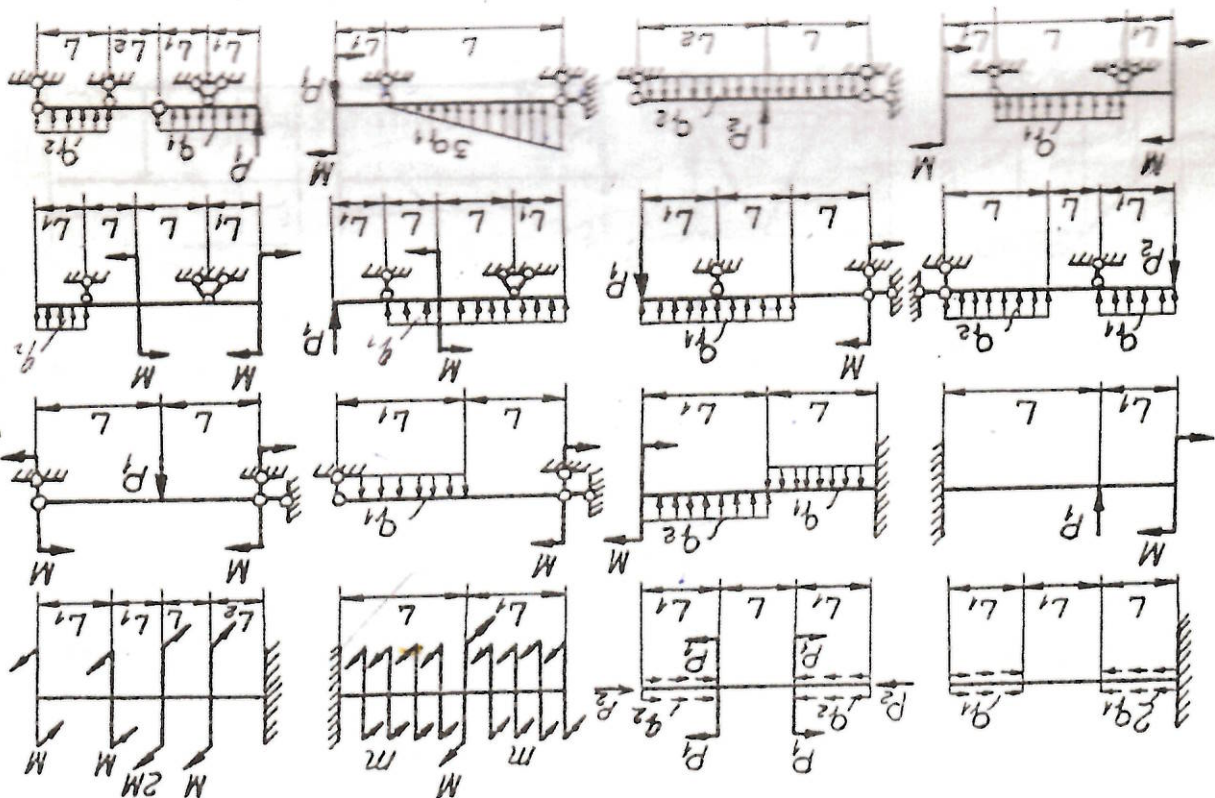
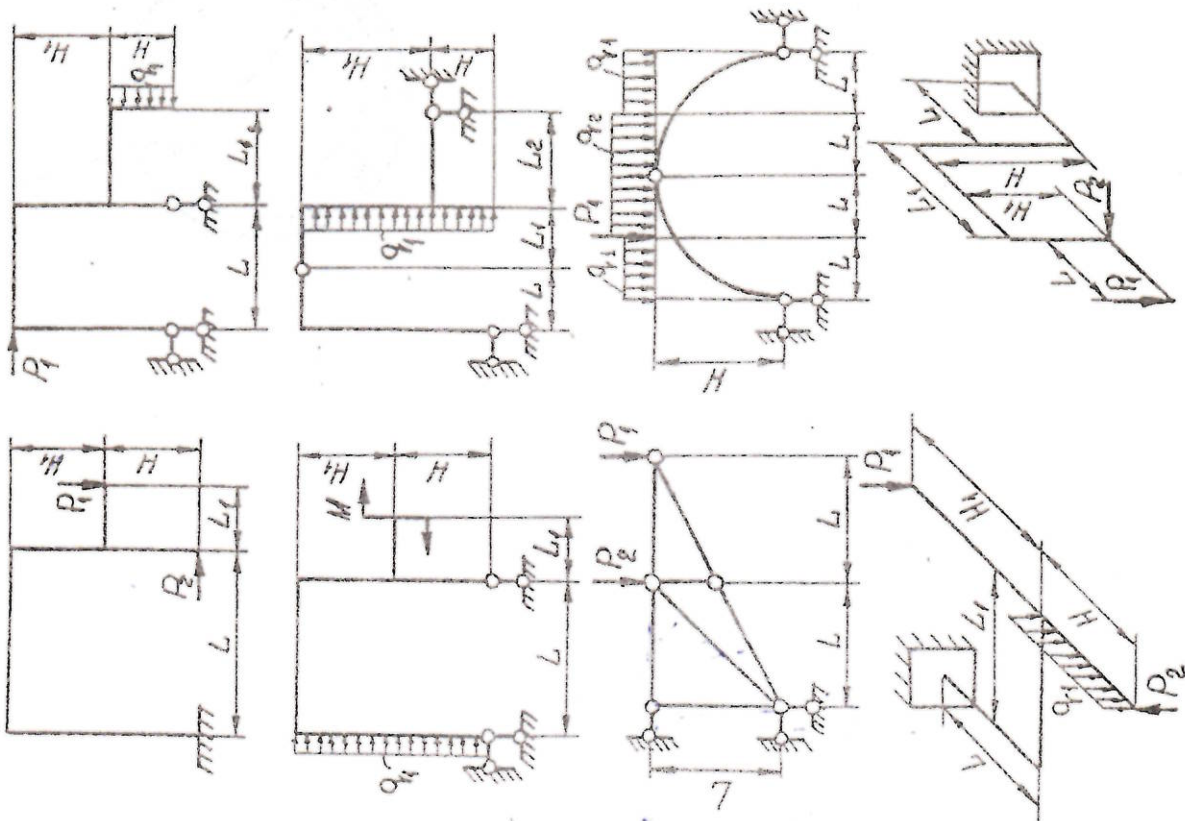
Вариант 6

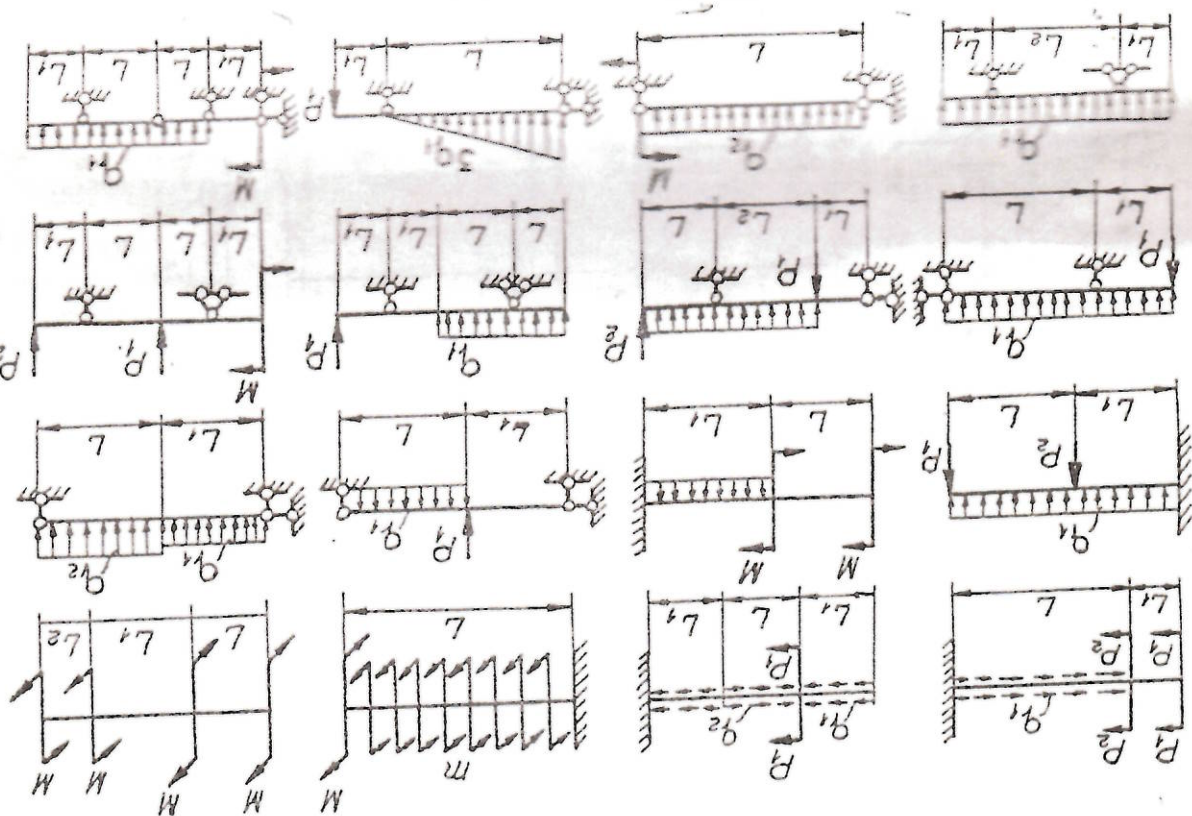
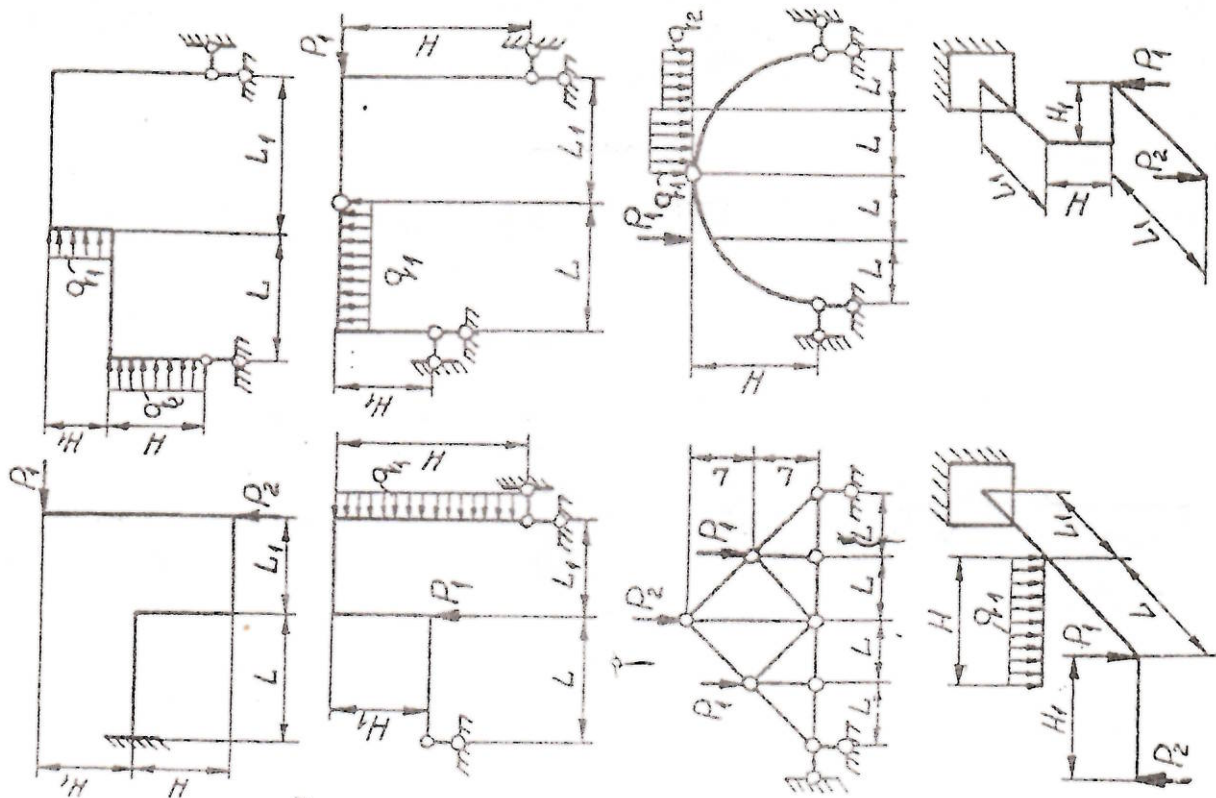


Вариант 6

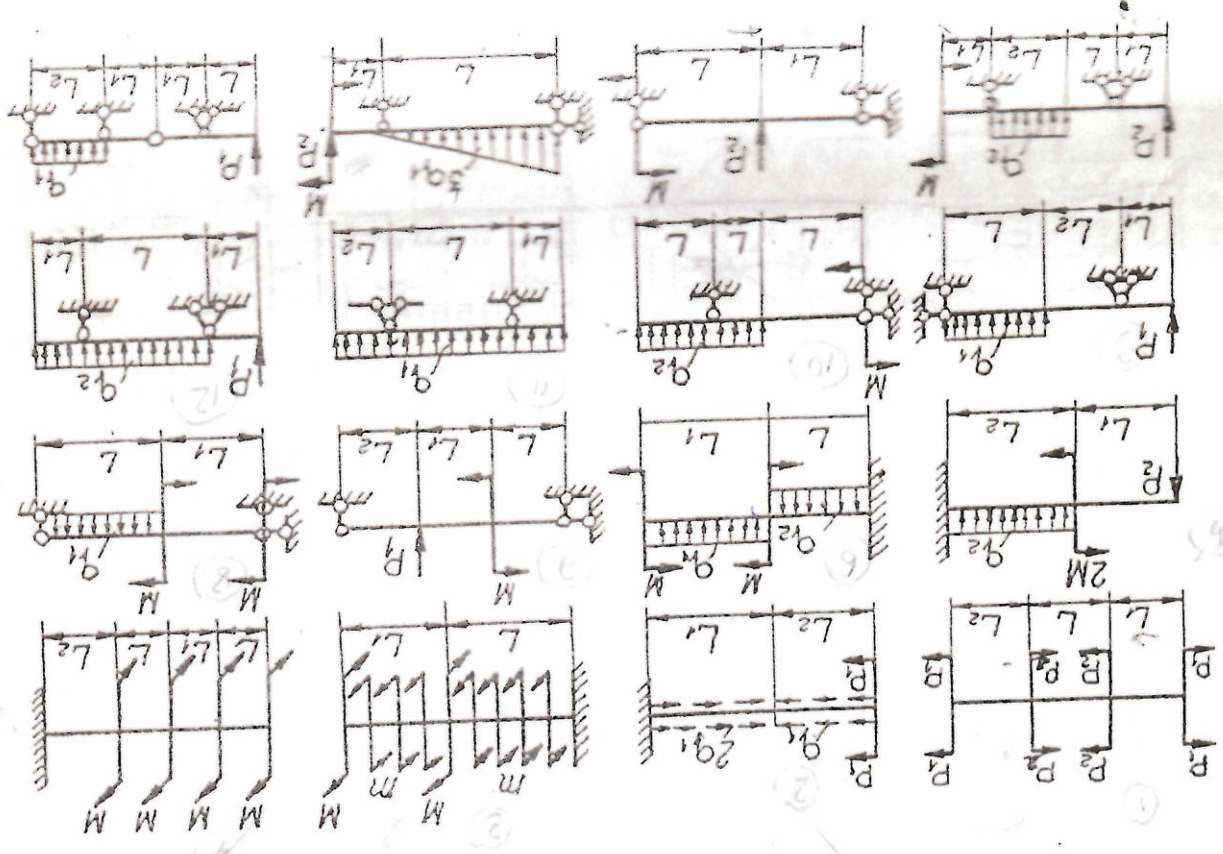
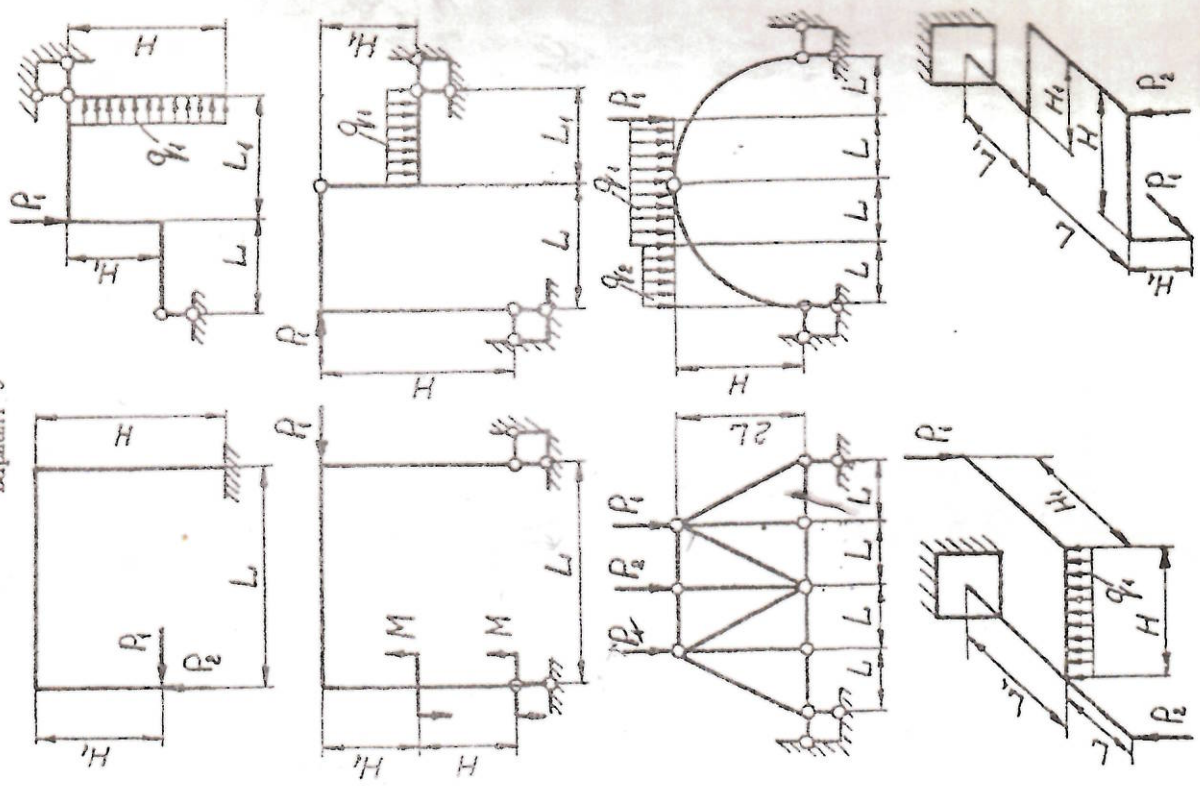












## 1.5. Контрольные вопросы

1. Как классифицируются внешние силы? Их размерности?
2. Какие основные гипотезы применяются в сопротивлении материалов?
3. Когда не применим принцип суперпозиции?
4. Какие внутренние усилия возникают в сечениях тел в общем случае их нагружения?
5. Если в поперечном сечении прямой балки приложена сосредоточенная сила, то что будет в этом сечении на эпорах  $Q$  и  $M$ ?
6. Сколько связей необходимо наложить на тело, чтобы закрепить его в плоскости?
7. Сколько связей наложено на вращающийся вал?
8. Из каких условий определяются реакции опор?
9. Чему равен изгибающий момент  $M$  в заданном сечении балки?
10. Чему равна поперечная сила  $Q$  в заданном сечении балки?
11. Чему равен крутящий момент  $M_k$  в заданном сечении вала?
12. Чему равна продольная сила  $N$  в заданном сечении стержня?
13. Каковы дифференциальные зависимости между  $Q$ ,  $Q$ ,  $M$  при вращении прямой балки?
14. Как изменятся  $M$  по длине балки при отсутствии распределенных нагрузок?
15. Чему равны  $Q$  и  $M$  на конце консоли при отсутствии сосредоточенных сил и моментов в этом сечении балки?
16. Чему равен  $M$  на конце балки, опирающейся на шарнирную опору, при отсутствии сосредоточенного момента?
17. В каких случаях эпюра  $Q$  нелинейна для прямой балки?
18. Какие правила контроля построенных эпюр Вы знаете?

## 1.6. Варианты заданий

Для заданных расчетных схем, представленных ниже, построить эпюры внутренних силовых факторов. Вариант задания, линейные размеры и величины нагрузок выбираются согласно трехзначного шифра, выданного преподавателем. Первая цифра означает номер варианта задания, вторая - номер строки в таблице 1.1, третья - номер строки в таблице 1.2. В таблице 1.1 параметр  $A$  означает вид очертания оси арки (О-дуга окружности, П-парабола, С-синусоида).

**Примечание.** Для арки рекомендуется вычислить величину внутренних силовых факторов в четырех сечениях: в сечениях расположенных бесконечно близко с двух сторон от точки приложения сосредоточенной силы  $P_1$ , а также в сечениях на расстоянии  $1/4L$  и  $3/4L$  от левой опоры (расстояние между опорами на расчетных схемах равно  $4L$ ), а определение величин внутренних силовых факторов, необходимых для построения полных эпюр, проводить на ЭВМ по готовой программе.

Таблица 1.1.

№	L	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	H	H <sub>1</sub>	A
0	ℓ	2ℓ	3ℓ	2ℓ	ℓ	О
1	2ℓ	3ℓ	4ℓ	3ℓ	2ℓ	П
2	3ℓ	4ℓ	2ℓ	3ℓ	ℓ	С
3	3ℓ	ℓ	ℓ	4ℓ	3ℓ	О
4	3ℓ	2ℓ	3ℓ	ℓ	ℓ	П
5	4ℓ	ℓ	2ℓ	6ℓ	ℓ	С
6	4ℓ	3ℓ	ℓ	3ℓ	5ℓ	О
7	5ℓ	ℓ	3ℓ	ℓ	4ℓ	П
8	5ℓ	3ℓ	2ℓ	3ℓ	3ℓ	С
9	5ℓ	4ℓ	3ℓ	6ℓ	ℓ	О



Таблица 1.2.

№	$q_1$	$q_2$	$P_1$	$P_2$	$m$	$M$
0	-q	2q	3ql	ql	2ql	3ql <sup>2</sup>
1	2q	3q	-4ql	2ql	3ql	-4ql <sup>2</sup>
2	q	4q	-5ql	3ql	2ql	ql <sup>2</sup>
3	-2q	2q	-ql	4ql	3ql	3ql <sup>2</sup>
4	3q	3q	2ql	-3ql	4ql	6ql <sup>2</sup>
5	-4q	5q	6ql	6ql	5ql	3ql <sup>2</sup>
6	5q	6q	ql	-ql	6ql	5ql <sup>2</sup>
7	-5q	3q	-4ql	-4ql	5ql	6ql <sup>2</sup>
8	3q	4q	-3ql	5ql	3ql	4ql <sup>2</sup>
9	4q	5q	-2ql	-5ql	6ql	ql <sup>2</sup>

Расчетно-проектировочная работа № 2

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ,  
СЖАТИИ И КРУЧЕНИИ**

## Условные обозначения

- $\sigma$  – нормальное напряжение;  
 $\tau$  – касательное напряжение;  
 $P$  – сосредоточенная сила;  
 $q$  – распределенная линейная нагрузка;  
 $N$  – нормальная сила;  
 $F$  – площадь поперечного сечения;  
 $M_k$  – крутящий момент;  
 $\rho$  – полярный радиус;  
 $J_p$  – полярный момент инерции сечения;  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения;  
 $E$  – модуль Юнга;  
 $G$  – модуль сдвига;  
 $[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение;  
 $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение;  
 $w$  – перемещения вдоль оси  $z$ ;  
 $\Delta l$  – удлинение;  
 $\sigma_{tr}$  – предел текучести при растяжении;  
 $\sigma_{sc}$  – предел текучести при сжатии;  
 $\mu_t$  – коэффициент запаса;  
 $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала;  
 $\varphi$  – угол закручивания.

## 2.1. Основные положения

Основным содержанием работы является расчет на прочность стержня, работающего на растяжение, сжатие и кручение. Для выполнения этого задания студент должен обладать необходимыми навыками в применении метода сечений и построения эпюр внутренних силовых факторов, чему посвящено первое домашнее задание.

Настоящая работа состоит из пяти задач, содержание которых охватывает следующие вопросы курса:

- определение напряжений при растяжении-сжатии;
- определение перемещений с использованием закона Гука;
- раскрытие статической неопределенности системы;
- расчет на прочность по допускаемым напряжениям и по предельным нагрузкам;
- определение напряжений, возникающих в статически неопределенных системах при изменении температуры;
- определение монтажных напряжений, возникающих при сборке статически неопределенных систем, элементы которых изготовлены с некоторой неточностью;
- расчет на прочность вала, работающего на кручение.

При решении задач следует иметь в виду, что в поперечном сечении стержня при его растяжении или сжатии действуют нормальные напряжения, которые равномерно распределены по сечению и могут быть определены как внутреннее усилие в данном сечении, поделенное на площадь поперечного сечения стержня:

$$\sigma = \frac{N}{F}.$$

Удлинение стержня или его участка определяется по закону Гука



$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF}$$

где:  $l$  - длина стержня;

$E$  - модуль Юнга.

Если нормальная сила и жесткость ( $EF$ ) постоянны по длине стержня, то удлинение можно найти так:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

При расчете на прочность по допускаемому напряжению необходимо следить за тем, чтобы в наиболее опасном сечении конструкции расчетные напряжения не превышали допускаемых, которые для пластичных материалов определяются как предел текучести, деленный на коэффициент запаса, а для хрупких - как предел прочности, также деленный на коэффициент запаса (для хрупких материалов он обычно принимается большим, чем для пластичных). При определении безопасных размеров поперечных сечений следует максимальные напряжения приравнять к допускаемому.

Если расчет на прочность ведется по предельным нагрузкам (под предельной понимается такая нагрузка, под действием которой исчерпывается несущая способность конструкции), то необходимо воспользоваться схематизированной диаграммой растяжения.

Четыре задачи из пяти этого домашнего задания относятся к классу статически неопределимых. Статически неопределимыми являются такие системы, для определения реакций связей и внутренних усилий в которых уравнений равновесия оказывается недостаточно. Под степенью статической неопределимости понимается разность между числом неизвестных и числом уравнений статики, которые можно составить для данной системы.

Расчет статически неопределимых систем нужно проводить в следующем порядке:

- составить уравнения равновесия;
- составить уравнения совместности перемещений;

- с помощью закона Гука преобразовать зависимость между перемещениями в зависимость между нормальными силами;
- решить совместно уравнения равновесия и уравнения совместности перемещений.

При решении задач следует принимать некоторые допущения, которые существенно упрощают решение, практически не сказываясь на точности результатов. Так, при составлении уравнений равновесия нужно пользоваться принципом неизменности начальных размеров (принцип отвердевания). При записи уравнений совместности перемещений следует принимать, что в силу малости перемещений углы между элементами системы не изменяются, а точки, расположенные на абсолютно жестком рычаге, перемещаются перпендикулярно его первоначальному положению. При определении перемещений в стержнях, имеющих отклонения от начальных размеров, по закону Гука нужно брать их проектные длины, а не фактические, т.к. они мало отличаются друг от друга. При составлении же условий совместности перемещений для таких систем необходимо учитывать наличие заданной неточности размеров элементов системы в силу того, что перемещения точек системы и отклонения длин от проектных размеров есть величины одного порядка.

При составлении уравнений для статически неопределимых систем следует учитывать знаки либо усилий, либо перемещений.

В поперечных сечениях круглого бруса при кручении возникают касательные напряжения, которые линейно зависят от текущего радиуса:

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{I_p}$$

где:  $M_{кр}$  - крутящий момент;

$\rho$  - текущий полярный радиус;

$I_p$  - полярный момент инерции сечения, который для круглого сплошного вала равен:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Максимальные касательные напряжения определяются по следующей формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}$$

где:  $M_{кр}$  - момент сопротивления при кручении ( для круглого сплошного вала ( $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ )).

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

где:  $[\tau]$  - допускаемое касательное напряжение.

Угол закручивания бруса равен:  $\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p}$ ,

где:  $l$  - длина бруса;

$G$  - модуль сдвига.

Статически неопределимые системы, элементы которых работают на кручение, рассчитываются по той же схеме, что и в случае растяжения и сжатия.

## 2.2. Примеры решения задач

**Задача №1.** Определить необходимую площадь поперечного сечения стального ступенчатого стержня, нагруженного заданными сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой (рис. 2.1а), а так же построить эпюры сил, напряжений и перемещений сечений бруса.

Дано: модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, допускаемое напряжение на растяжение и сжатие  $[\sigma] = 160$  МПа, интенсивность распределенной нагрузки  $q = 10$  кН/м, длина стержня  $l = 2$  м.

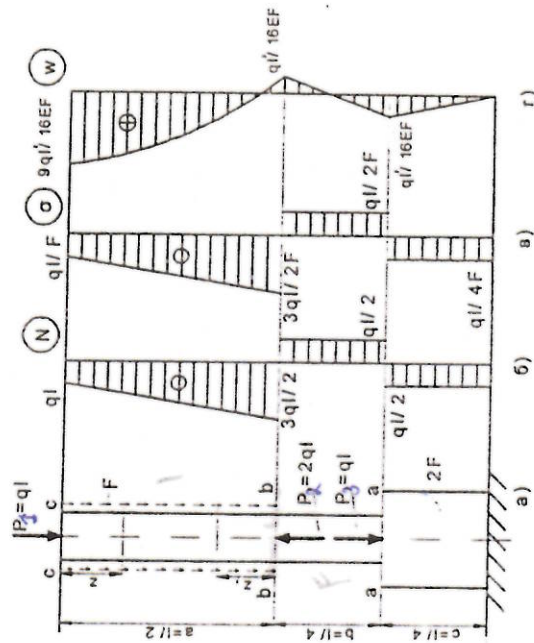


Рис. 2.1.

**Решение.** Определение площади поперечного сечения бруса производится из условий прочности. Для этого необходимо построить эпюры нормальных сил и по ней эпюры нормальных напряжений. По этой эпюре определяется наиболее опасное сечение, т.е. такое, в котором нормальные напряжения достигают максимального значения. Необходимая площадь сечения бруса находится из условия прочности для наиболее опасного сечения.

Используя метод сечений, определяем продольные (нормальные) силы, действующие в поперечных сечениях бруса. Начало отсчета координаты  $z$  берем на верхнем конце бруса.



Примечание: в данном примере удобно отсекать верхнюю часть бруса, отбрасывая нижнюю; в этом случае определение продольных сил может быть выполнено без нахождения реакции основания.

$$\text{Для } 0 \leq z \leq a = \frac{l}{2}$$

$$N = -R - qz = -q(l+z).$$

$$\text{Для } a \leq z \leq a+b$$

$$N = -R - qa + P_1 = \frac{ql}{2}.$$

$$\text{Для } a+b \leq z \leq a+b+c$$

$$N = -R - qa + P_1 - P_2 = -\frac{ql}{2}.$$

По найденным значениям сил строим эпюру N (рис. 2.16).

Нормальные напряжения в поперечных сечениях определим по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F}.$$

$$\text{Для } 0 \leq z \leq a, \quad \sigma = -\frac{q(l+z)}{F}.$$

$$\text{Для } a \leq z \leq a+b, \quad \sigma = \frac{ql}{F}.$$

$$\text{Для } a+b \leq z \leq a+b+c, \quad \sigma = -\frac{ql}{4F}.$$

Эпюра  $\sigma$  приведена на рис. 2.1в.

Подбор площади поперечного сечения бруса производим из условия прочности в наиболее опасном сечении:

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma].$$

Из эпюры нормальных напряжений следует, что наибольшее напряжение возникает в сечении с координатой  $z = a$ ; и это сечение, следовательно, является наиболее опасным и для него  $\sigma_{\max} = \frac{3ql}{2F}$ .

Тогда условие прочности будет:  $\frac{3ql}{2F} = [\sigma]$ .

$$2F[\sigma] = 390$$

$$F = 390$$

Отсюда определяем минимально необходимую площадь поперечного сечения:

$$F = \frac{3ql}{2[\sigma]} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 2}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,87 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,87 \text{ см}^2.$$

Построение эпюры перемещений начнем с нижнего конца стержня, поскольку его перемещение равно нулю. При этом следует иметь в виду, что перемещаться могут сечения, а удлиняться — участки стержня. Перемещение ( $w$ ) какого либо сечения равно удлинению  $\Delta l$  части бруса, заключенной между неподвижным и рассматриваемым сечениями. Перемещение следующего сечения будет равно перемещению предыдущего сечения плюс удлинение участка, расположенного между этими сечениями и т.д.

Перемещение сечения  $a$ - $a$  определим по формуле Гука ( $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$ ), при этом значение нормальной силы берем с эпюры N:

$$w_{a-a} = \frac{Nc}{EF} = \frac{ql \cdot l}{4 \cdot 4 \cdot EF} = \frac{ql^2}{16EF}.$$

Перемещение сечения  $e$ - $e$  находим как алгебраическую сумму перемещений сечения  $a$ - $a$  и удлинения среднего участка стержня:

$$w_{e-e} = w_{a-a} + \frac{ql^2}{8EF} = \frac{ql^2}{8EF}.$$

Для построения эпюры перемещений верхнего участка, на котором действует распределенная нагрузка, выберем начало координат в сечении  $e$ - $e$  и направим ось  $z_1$  вверх. Введем новую переменную  $\psi$ , которая изменится от 0 до  $z_1$ . Тогда перемещение сечения с координатой  $z_1$  будет:

$$w_{z_1} = w_{e-e} + \int_0^{z_1} \frac{N_{\psi} d\psi}{EF}.$$

Функцию нормальной силы для этого участка запишем, используя эпюру нормальных сил (рис. 2.1б):

$$N_{\psi} = -\frac{3ql}{2} + q\psi.$$

Подставляя найденную линейную функцию нормальной силы в выражение для перемещений, получим:

$$w_{x_0} = \frac{ql^2}{16EF} \cdot \frac{3qlx_0}{2EF} + \frac{qz_0^2}{2EF} = \frac{q}{EF} \left( \frac{l^2}{16} \frac{3lx_0}{2} + \frac{z_0^2}{2} \right)$$

График функции перемещений для этого участка строим по трем точкам (рис. 2.1г).

Определяем перемещение сечения  $b-b$ :

$$w_{b-b} = \frac{ql^2}{16EF}$$

Находим координату сечения, в котором перемещение равно нулю:

$$w_{z_0} = 0, \quad z_0^2 - 3lz_0 + \frac{l^2}{8} = 0, \quad z_0 = 0,04l$$

Определяем перемещение сечения  $c-c$ :

$$w_{c-c} = \frac{ql^2}{16EF} - \frac{3ql^2}{4EF} + \frac{ql^2}{8EF} = -\frac{9ql^2}{16EF}$$

По найденным значениям перемещений строим эпюру  $w$ . При этом нужно помнить о том, что нормальная сила пропорциональна первой производной от функции перемещений. Поскольку на этом участке модуль нормальной силы убывает, то угол наклона касательной к эпюре перемещений должен уменьшаться, следовательно, выпуклость кривой на эпюре перемещений будет направлена влево.

На эпюре стрелкой укажем направление перемещений.

Задача №2. Для заданного стального стержня (рис. 2.2а) определить:

1. Допустимую нагрузку  $[P]$  из условия прочности по допускаемому напряжению.
2. Перемещения поперечных сечений стержня по его длине при нагрузке равной  $[P]$ .

3. Температуру нагрева стержня, при которой образуются пластические деформации.

Дано:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $F = 2$  см<sup>2</sup>;  $l = 2$  м; предел текучести  $\sigma_T = 250$  МПа; коэффициент запаса по пределу текучести  $n_T = 1,5$ ; коэффициент линейного расширения стали  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$  1/град.

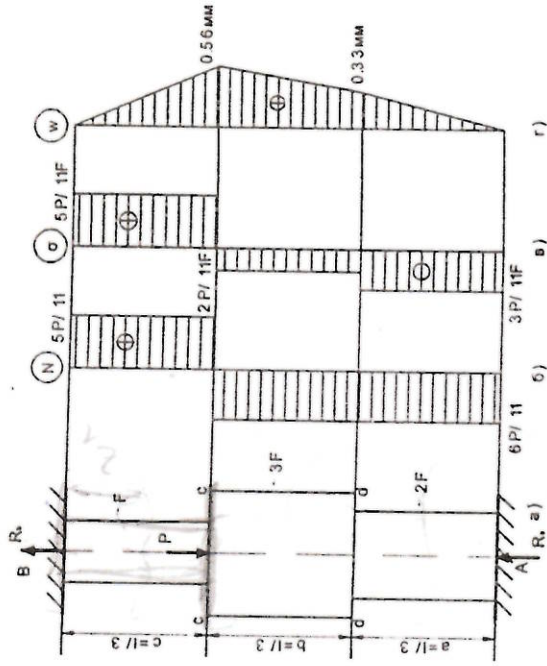


Рис. 2.2.

Решение.

Отбросив опоры, заменим их действие на стержень реакциями  $R_A$  и  $R_B$ , и составим уравнение равновесия:

$$R_A + R_B - P = 0$$

Из этого уравнения следует, что система один раз статически неопределима (две неизвестные реакции и одно уравнение равновесия).

Второе, недостающее уравнение получим, используя ограничения в отношении перемещений сечений стержня. Так как торцы стержня связаны с жесткими неподвижными опорами, то общая длина стержня не должна



изменяться, т.е. удлинение верхней части стержня (выше сечения, где приложена сила) должно быть равно укорочению нижней части его, а перемещения торцевых сечений равны нулю. Следовательно, условие совместности перемещений может быть записано в виде:  $|\Delta L_1| = |\Delta L_2|$  или  $w_A = w_B = 0$ .

Приравняем нулю перемещение сечения А и, используя закон Гука, выразим перемещения через силы, действующие на каждую из указанных частей стержня, и в результате получим уравнение перемещений:

$$\frac{Pc}{EF} - \frac{R_A a}{2EF} - \frac{R_A b}{3EF} - \frac{R_B c}{EF} = 0.$$

Таким образом, уравнения равновесия и совместности перемещений образуют систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $R_A$  и  $R_B$ .

Решая их, найдем:

$$R_A = \frac{6P}{11}, \quad R_B = \frac{5P}{11}.$$

Определив реакции, вычислим продольные силы N и нормальные напряжения  $\sigma$  на каждом участке стержня:

$$\begin{aligned} \text{Для } 0 \leq z \leq c, \quad N = R_B = \frac{5P}{11}, \quad \sigma = \frac{N}{F} = \frac{5P}{11F}. \\ \text{Для } c \leq z \leq b+c, \quad N = R_B - P = -\frac{6P}{11}, \quad \sigma = \frac{N}{F} = -\frac{6P}{11F}. \\ \text{Для } b+c \leq z \leq a+b+c, \quad N = R_B - P = -\frac{6P}{11}, \quad \sigma = \frac{N}{2F} = -\frac{3P}{11F}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений показывают, что часть стержня выше сечения, где приложена сила, будет испытывать растяжение, а ниже — сжатие. По найденным значениям строим эпюры сил и напряжений (рис. 2.26 и 2.27).

Из эпюры напряжений видно, что наибольшие напряжения будут действовать на верхнем участке. Поэтому допускаемую силу [P] определяем из условия прочности на этом участке.

По заданному пределу текучести  $\sigma_T$  и коэффициенту запаса  $n$  находим допускаемое напряжение:  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$ .

Приравняв максимальное напряжение к допускаемому, получим величину допускаемой силы:

$$[P] = \frac{11\sigma_T F}{5n} = \frac{11 \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 1,5} = 73,3 \text{ кН}.$$

Определим перемещения сечений с-с и d-d под действием силы [P]:

$$w_{c-c} = \frac{R_B c}{EF} = \frac{5[P]c}{11EF} = \frac{5 \cdot 73,3 \cdot 10^3 \cdot 2}{33 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,56 \text{ мм}.$$

$$w_{d-d} = \frac{R_A a}{2EF} = \frac{3[P]a}{33EF} = 0,33 \text{ мм}.$$

В качестве проверки определим перемещение сечения с-с как сумму перемещения сечения d-d и укорочения участка длиной b:

$$w_{c-c} = w_{d-d} + \frac{2[P]b}{33EF} = 0,33 + 0,23 = 0,56 \text{ мм}.$$

Проверка подтвердила, что удлинение верхней части стержня равно укорочению нижней.

По найденным значениям перемещений сечений строим эпюру перемещений (рис. 2.2г.), указав на ней стрелкой направление перемещений.

Чтобы ответить на последний вопрос задачи, предварительно, не учитывая действия силы [P], определим температурную реакцию  $R_T$ , которая возникла бы в стержне при его нагреве на  $\Delta t$  градусов. При этом для определения теплового удлинения стержня воспользуемся известной из курса физики формулой  $\Delta l = \alpha \Delta t l$ , где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения материала.

Тогда уравнение перемещений примет следующий вид:

$$\alpha \Delta t (a + b + c) - \frac{R_A a}{2EF} - \frac{R_B b}{3EF} - \frac{R_C c}{EF} = 0,$$

откуда:

$$R_T = \frac{18\alpha \Delta t EF}{11}.$$

Пластические деформации при повышении температуры в первую очередь появятся в том сечении, где действовали наибольшие сжимающие напряжения от силы [P], когда сумма температурных напряжений и сжимающих

напряжений от силы [P] достигнет предела текучести. Следовательно, условие появления пластических деформаций можно записать так:

$$\sigma_T = \frac{3[P]}{11F} + \frac{R_c}{2F} = \frac{3[P]}{11F} + \frac{9\alpha\Delta E}{11}$$

$$\text{откуда } \Delta l = \frac{11(\sigma_T - \frac{3[P]}{11F})}{9\alpha E} = \frac{11 \left( 2,5 \cdot 10^8 - \frac{3 \cdot 73,3 \cdot 10^3}{11 \cdot 2 \cdot 10^4} \right)}{9 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 73^\circ$$

**Задача №3.** Абсолютно жесткая невесомая балка (рис. 2.3а) шарнирно закреплена в точке А и поддерживается тремя одинаковыми упругими стержнями. Балка нагружена силой  $P = 60$  кН. Подобрать площади поперечных сечений стержней (при условии, что они одинаковы) по допускаемому напряжению и по предельной нагрузке. Полученные результаты сравнить. Сchemатизированная диаграмма растяжения материала стержней приведена на рис. 2.3б.

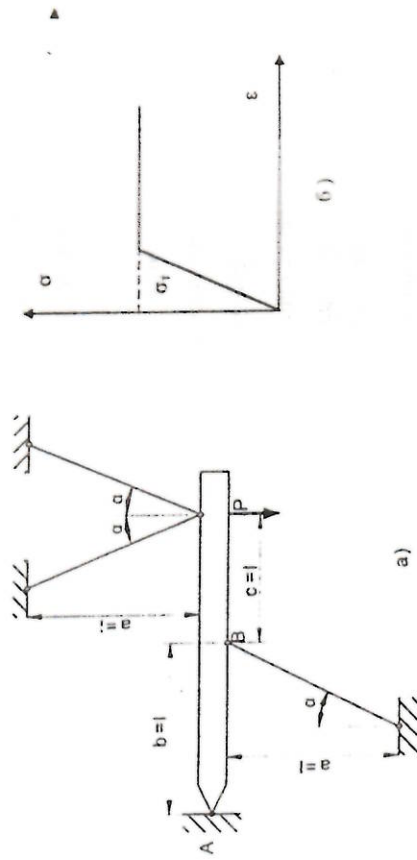


Рис. 2.3.

Дано: предел текучести материала стержней  $\sigma_T = 250$  МПа, коэффициент запаса  $n_T = 1,5$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

**Решение.**

Отбрасываем шарнирную опору и заменяем ее действие на балку вертикальной V и горизонтальной H реакциями. Разрезаем стержни, отбрасываем то, что находится по одну сторону от сечения и заменяем действие отброшенной части конструкции на оставшуюся нормальными силами  $M_1, N_1$  и  $N_2$  (рис. 2.3в). При этом направляем усилия в стержнях от сечений, считая их положительными. Таким образом, балка будет находиться под действием пяти неизвестных сил и заданной силы P.

В данном случае можно составить три уравнения равновесия, т.е. на два меньше количества неизвестных сил, следовательно, система является дважды статически неопределимой.

Из трех уравнений равновесия целесообразно записать только уравнение моментов относительно точки А (рис. 2.3в). В это уравнение не войдут реакции в опоре, определение которых не обязательно по условию задачи. Указанное уравнение моментов будет:

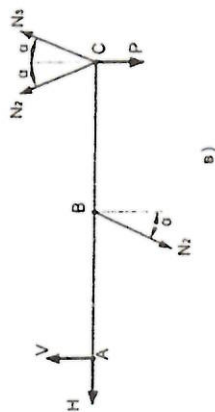
$$\sum M_A = 2N_1 l \cos \alpha + 2N_2 l \cos \alpha - N_1 l \cos \alpha - 2Pl = 0, \quad (2.1)$$

При составлении уравнений совместности перемещений будем считать, что углы между элементами системы не изменяются (т.к. изменение угла величина на порядок меньшая изменения линейных размеров, а в нашем курсе рассматриваются малые перемещения); узлы В и С перемещаются перпендикулярно первоначальному положению балки (рис. 2.3г). При малых перемещениях такие допущения влекут за собой малую погрешность в расчетах, а вместе с тем, они существенно упрощают их.

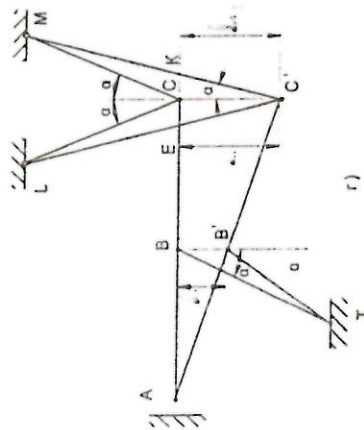
Усилия во всех стержнях будем считать положительными (растягивающими), а деформации стержней, которые, согласно представленной



картине деформированной системы, испытывают сжатие, будем учитывать со знаком минус. Как уже отмечалось ранее, можно было сразу показать действительное направление усилий, возникающих в стержнях, но при этом не нужно учитывать знак деформаций.



б)



г)

Рис. 2.3.

Для определения удлинений стержней  $LC$  и  $CM$  из точки  $C$  опустим перпендикуляры на новое положение этих стержней. Укорочение стержня  $BT$  получим, опустив из точки  $B'$  перпендикуляр на линию  $BT$ . При этом замена дуг окружностей, проведенных из точек  $C$  и  $B'$  с центрами в точках  $M, L$  и  $T$ , перпендикулярами не внесет существенных погрешностей в конечные результаты, вследствие малости перемещений.

Из равенства треугольников  $SEC'$  и  $SKC'$  следует, что:

$$\Delta l_2 = \Delta l_3. \tag{2.2}$$

Используя подобие треугольников  $ACC'$  и  $ABB'$ , можно записать второе уравнение перемещений в виде:

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB}, \quad \text{или} \quad -\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = 2. \tag{2.3}$$

Здесь  $\Delta l_1$  взято со знаком минус, т.к. первый стержень укорачивается.

Используя закон Гука, выразим уравнения (2.2) и (2.3) через усилия  $N_1, N_2$  и  $N_3$ , получим:

$$\frac{N_2 l}{EF \cos \alpha} = \frac{N_3 l}{EF \cos \alpha} \quad \text{или} \quad N_2 = N_3, \tag{2.4}$$

$$\frac{N_2 l}{EF \cos \alpha} = -2 \frac{N_1 l}{EF \cos \alpha} \quad \text{или} \quad N_2 = -2N_1.$$

Подставляя (2.4) в (2.1), найдем:

$$N_1 = -\frac{2P}{9 \cos \alpha}, \tag{2.5}$$

$$N_2 = N_3 = \frac{4P}{9 \cos \alpha}.$$

Как видно из полученных решений, наибольшие усилия возникают во втором и третьем стержнях, следовательно, площадь поперечного сечения стержней должна определяться из условия прочности этих стержней:

$$F = \frac{N_{2,3}}{\sigma} = \frac{4Pn}{9 \cos \alpha} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{9 \cdot 0,866 \cdot 2,5 \cdot 10^8} = 1,85 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,85 \text{ см}^2.$$

Из схематизированной диаграммы растяжения (рис. 2.3б), данной в условиях задачи, следует, что с увеличением нагрузки, действующей на

конструкцию, усилия во втором и третьем стержнях будут увеличиваться до тех пор, пока не достигнут значений:

$$N_2 = N_3 = \sigma_T F.$$

После этого система станет статически определимой. При дальнейшем увеличении нагрузки усилия во втором и третьем стержне будут оставаться постоянными, а усилие в первом стержне будет расти до тех пор, пока, в свою очередь, не станет равным:

$$N_1 = -\sigma_T F.$$

Дальнейшее увеличение нагрузки конструкция уже не сможет воспринять и превращается, таким образом, в механизм. Нагрузка, под действием которой это произойдет, и будет предельной для данной системы.

Следовательно, значение площади сечения при предельной нагрузке может быть найдено из единственного уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 4\sigma_T F l \cos \alpha + \sigma_T F l \cos \alpha - 2Pl = 0,$$

откуда, умножая предельное значение площади сечения на коэффициент запаса, который примем таким же, как при расчете по допускаемым напряжениям, получим:

$$F^* = \frac{2Pl_n}{5\sigma_T \cos \alpha}.$$

Сравниваем результаты прочностного расчета по предельной нагрузке и по допускаемым напряжениям:

$$\frac{F^*}{F} = \frac{2P \cos \alpha \sigma_{Тп.9}}{5P \cos \alpha \sigma_{Тп}} = 0,9.$$

Таким образом, экономия материала в данном случае при расчете по предельной нагрузке составит 10%.

**Задача № 4.** При сборке конструкции, приведенной на рис. 2.4а, обнаружено несоответствие длины стержня  $l$  его проектному размеру. Стержень оказался на 2 мм короче. Сборка была произведена принудительным растяжением этого стержня. Определить монтажные напряжения, возникшие

при такой сборке конструкции, считая площади поперечных сечений стержней одинаковыми.

Дано:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $l = 2$  м,  $\alpha = 30^\circ$ , балка АС — абсолютно жесткая.

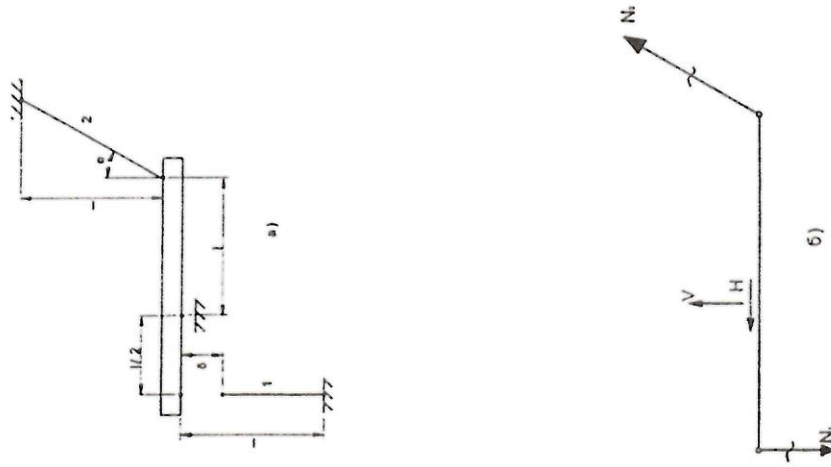


Рис. 2.4.



Решение.

Рассматривая конструкцию в собранном виде, отбросим опору и стержни, заменив их действие на балку реакциями опоры и усилиями, возникающими в стержнях (рис. 2.4б).

Так как число неизвестных усилий, действующих на балку, на единицу больше числа уравнений равновесия, то заданная система один раз статически неопределима.

Из трех уравнений равновесия используем только одно, а именно: уравнение моментов относительно опоры  $B$  (в него не войдут реакции опоры):

$$\sum M_B = N_1 \frac{l}{2} + N_2 l \cos \alpha = 0, \quad (2.6)$$

Так же, как и в предыдущем примере при составлении уравнения перемещений будем считать перемещения малыми, такими, что можно пренебречь изменениями угла между элементами системы, перемещения точек  $A$  и  $C$  считать перпендикулярными начальному положению балки  $AC$  (рис. 2.4в). Тогда из подобия треугольников  $B'CD$  и  $ABE$  получим уравнение перемещений:

$$-\frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = 2(\delta - \Delta l_1), \quad (2.7)$$

Примечание: при изображении деформированного состояния конструкции можно было дать балке  $AC$  любое из возможных перемещений, что не повлияет на конечный результат.

Пренебрегая  $\delta$  по сравнению с  $l$  и используя закон Гука, выразим удлинения стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  через усилия  $N_1$  и  $N_2$ , тогда уравнение перемещений будет:

$$-\frac{N_2 l}{EF \cos^2 \alpha} = 2 \left( \delta - \frac{N_1 l}{EF} \right).$$

Решая совместно (2.6) и (2.7), получим:

$$N_1 = \frac{2\delta EF}{\left( \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + 2 \right) l}, \quad N_2 = -\frac{\delta l F}{\left( \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + 2 \right) l \cos \alpha}.$$

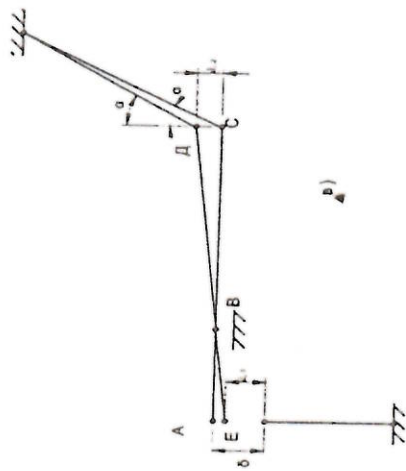


Рис. 2.4.

Монтажные напряжения, возникающие в стержнях, будут равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{2\delta E}{\left( \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + 2 \right) l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{2,77 \cdot 2} = 144 \text{ МПа},$$

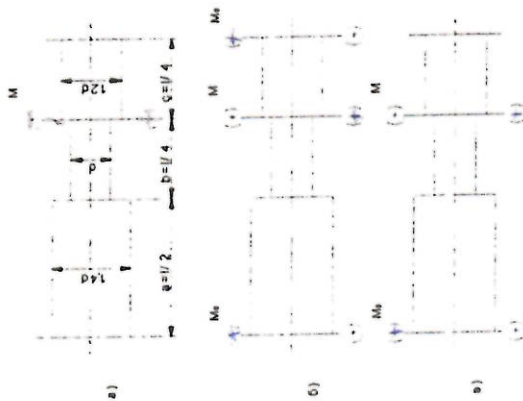
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -\frac{\delta E}{\left( \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + 2 \right) l \cos \alpha} = -83 \text{ МПа}.$$

**Задача №5.** Определить из условия прочности диаметр вала и построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания для вала, показанного на рис. 2.5а.

При расчетах принять  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $M = 10 \text{ кНм}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Решение.

Отбрасываем опоры (рис. 2.5б) и записываем уравнение моментов относительно оси вала:



$$M_A + M_B - M = 0, \quad (2.8)$$

Эта система один раз статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости отбросим левую опору (рис. 2.5в) и приравняем нулю угол поворота левого торцевого сечения:

$$\frac{M_A a}{GI_{P(a)}} + \frac{M_B b}{GI_{P(b)}} + \frac{(M_A - M)c}{GI_{P(c)}} = 0, \quad (2.9)$$

Здесь:  $I_{P(a)} = \frac{\pi(1.4d)^4}{32} = 0.377d^4$  - полярный момент инерции сечения вала на

участке а;

$I_{P(b)} = \frac{\pi d^4}{32} = 0.098d^4$  - полярный момент инерции сечения вала на участке b;

$I_{P(c)} = \frac{\pi(1.2d)^4}{32} = 0.203d^4$  - полярный момент инерции сечения вала на участке с.

Подставляя значения моментов инерции в уравнение перемещений (2.9), получим:

$$\frac{M_A l}{2G0.377d^4} + \frac{M_B l}{4G0.098d^4} + \frac{(M_A - M)c}{4G0.203d^4} = 0, \quad (2.10)$$

Решая уравнение (2.10), находим реактивный момент в левой опоре  $M_A = 0.241M$ .

Из уравнения равновесия (2.8) определим момент в правой опоре  $M_B = 0.759M$ .

Строим эпюру крутящих моментов (рис. 2.5г).

Определяем углы закручивания сечений а-а и в-в и делаем проверку, сравнивая угол поворота сечения в-в, найденный как угол закручивания участков, расположенных слева и справа от этого сечения:

$$\varphi_{a-a} = \frac{M_A a}{GI_{P(a)}} = 0.320 \frac{Ml}{Gd^4};$$

$$\varphi_{a-b} = \varphi_{a-a} + \frac{M_A b}{GI_{P(b)}} = 0.935 \frac{Ml}{Gd^4};$$

$$\varphi_{b-b} = \frac{M_B c}{GI_{P(c)}} = 0.935 \frac{Ml}{Gd^4}.$$

Строим эпюру углов закручивания (рис. 2.5д).

Убедившись в том, что моменты найдены верно, определяем максимальные касательные напряжения для каждого участка вала:

$$\tau_{\max(a)} = \frac{M_A}{W_{P(a)}} = 0.448 \frac{M}{d^3};$$

$$\tau_{\max(b)} = \frac{M_B}{W_{P(b)}} = 1.229 \frac{M}{d^3};$$



$$\tau_{\max(\sigma)} = \frac{M_{\sigma}}{W_{\rho(\sigma)}} = 2,245 \frac{M}{d^3}.$$

Наибольшее напряжение, действующее в сечении третьего участка, приравниваем к допускаемому напряжению и из этого условия определяем диаметр  $d$ .

$$2,245 \frac{M}{d^3} = [\tau]$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{2,245M}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2,245 \cdot 10^4}{60 \cdot 10^6}} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7,2 \text{ см}.$$

### 2.3. Контрольные вопросы

1. Чему равны нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при растяжении-сжатии?
2. Возникают ли при растяжении-сжатии в поперечных сечениях бруса касательные напряжения?
3. Оказывают ли продольные волокна растягиваемого бруса давление друг на друга?
4. По каким площадкам нормальные и касательные напряжения достигают экстремальных значений?
5. Какие напряжения называются предельными?
6. Какой закон устанавливает зависимость между напряжениями и деформациями?
7. Как определить удлинение стержня под действием сил, распределенных по его длине?
8. Какие основные признаки отличают статически определимые и статически неопределимые системы?
9. Нужно ли задавать жесткость при определении усилий в статически неопределимых системах?
10. Возникают ли в статически определимых системах при равномерном нагреве температурные напряжения?
11. Какие факторы влияют на выбор коэффициента запаса прочности?
12. Какова зависимость между продольными и поперечными деформациями при растяжении-сжатии?
13. Каково практическое значение принципа Сен-Венана в задачах на растяжение – сжатие?
14. Какова последовательность расчета статически неопределимых систем?
15. Как проверить правильность расчета статически неопределимой системы?

16. Почему статически неопределимые системы, рассчитанные по предельным нагрузкам, более экономичны, чем системы, рассчитанные по допустимым напряжениям?
17. Какая нагрузка называется предельной?
18. Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при кручении?
19. Какие напряжения действуют в продольных сечениях при кручении?
20. Где располагаются наиболее опасные точки в сечении при кручении круглого вала?
21. Какое напряженное состояние носит название чистого сдвига?
22. Как располагаются главные площадки при чистом сдвиге?
23. Чему равны главные напряжения при чистом сдвиге?
24. Как записывается условие прочности при кручении?
25. Как разрушаются при кручении валы из пластичного и хрупкого материала?

#### 2.4. Варианты заданий

##### Задача № 1

Из условия прочности определить необходимую площадь поперечного сечения стального ступенчатого стержня (рис. 2.1), нагруженного сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой, и построить эпюры сил, напряжений и перемещений сечений бруса.

При расчетах принять:  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа,  $q = 10$  кН/м,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $l = 2$  м.

Все остальные размеры и величины принять в соответствии с таблицами 2.1 и 2.2.

##### Задача № 2

Для заданного стального стержня (рис. 2.2) определить:

1. Допустимую силу  $[P]$  из условия прочности по допускаемым напряжениям.
  2. Усилие, напряжения и перемещения поперечных сечений стержня по его длине при нагрузке, равной  $[P]$ .
  3. Температуру нагрева, при которой образуются пластические деформации.
- При расчете принять:  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа,  $\sigma_T = 250$  МПа,  $\alpha_T = 1,5$ ,  $l = 2$  м,  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} / \text{град}$ .
- Все остальные размеры и величины нагрузок принять по таблицам 2.3 и 2.4.

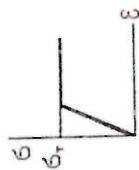
##### Задача № 3

Для заданной стержневой системы (рис. 2.3) требуется подобрать площади поперечных сечений стержней на основании расчета по допускаемым напряжениям и по предельной нагрузке. Полученные результаты сравнить.

Примечание: брус следует считать абсолютно жестким, а площади поперечных сечений стержней в конструкции – одинаковыми.



Схематизированная диаграмма растяжения приведена на прилагаемом эскизе.



При расчете принять:  $\sigma_t = \sigma_c = 250 \text{ МПа}$ ,  $n_t = 1,5$ .

Остальные размеры и нагрузки принять по таблицам 2.5 и 2.6.

**Задача № 4**

Определить монтажные напряжения, возникающие при сборке конструкции (рис. 2.4).

Примечание: брус следует считать абсолютно жестким, а площади поперечных сечений всех стержней – одинаковыми.

При расчете принять:

$E = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $l = 2 \text{ м}$ .

Остальные размеры принять в соответствии с таблицами 2.7 и 2.8.

**Задача № 5**

1. Определить из условий прочности диаметр стального ступенчатого вала (рис. 2.5);

2. Построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания.

При расчетах принять:  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ ,  $l = 2 \text{ м}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Остальные данные взять из таблиц 2.9 и 2.10.

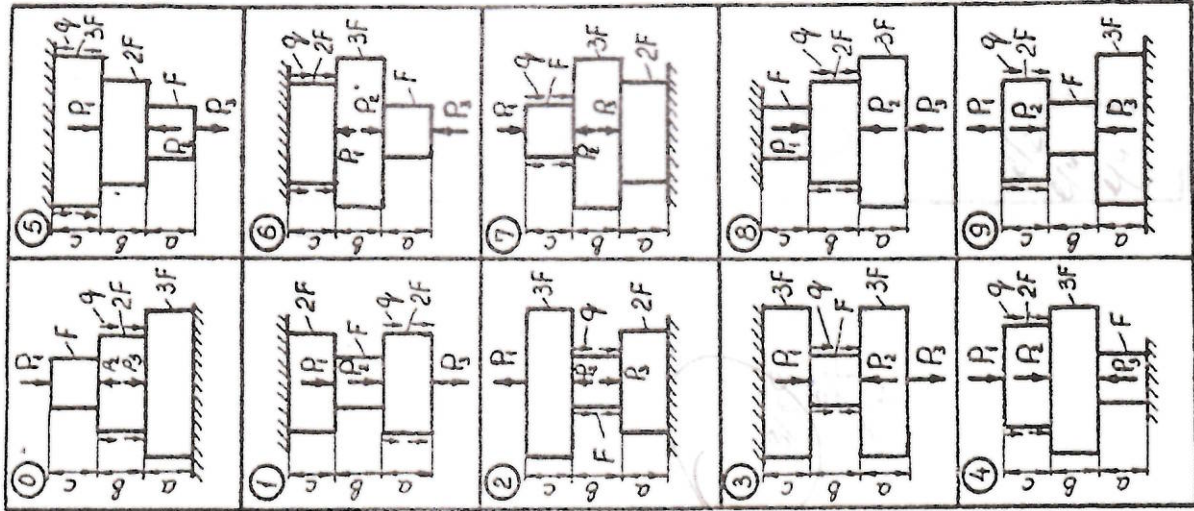


Таблица 2.1.

Таблица 2.2.

№ п.п.	P	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>
0	ql	2ql	3ql	3ql
1	2ql	ql	ql	ql
2	ql	2ql	ql	ql
3	2ql	ql	3ql	3ql
4	ql/2	ql	2ql	2ql
5	ql	ql/2	ql	ql
6	ql	ql	3ql	3ql
7	2ql	3ql	ql	ql
8	ql	ql/2	3/2 ql	3/2 ql
9	2ql	ql/2	3ql	3ql

155, 132

№ п.п.	a	b	c
0	l/4	l/4	l/2
1	2l/3	l/6	l/6
2	l/6	2l/3	l/6
3	l/5	3l/5	l/5
4	l/2	l/4	l/4
5	l/4	l/2	l/4
6	l/5	l/5	3l/5
7	3l/5	l/5	l/5
8	l/3	l/3	l/3
9	l/6	l/6	2l/3

Рис. 2.1.

Таблица 2.5.

№ п.п.	a	b	c
0	1	21	1
1	21	31	1
2	1	21	1/2
3	1/2	1	1/2
4	21	1	1/2
5	1/5	21	1
6	1/4	1	1/2
7	1/4	1	1/4
8	1	31	1
9	1	31	1/2

Таблица 2.6.

№ п.п.	P(кН)
0	80
1	75
2	70
3	65
4	30
5	35
6	40
7	45
8	60
9	50

Таблица 2.3.

№ п.п.	a	b	c
0	1/3	1/3	1/3
1	1/2	1/4	1/4
2	1/4	1/2	1/4
3	1/4	1/4	1/2
4	2/5	1/5	2/5
5	1/5	1/5	3/5
6	3/5	1/5	1/5
7	1/6	1/6	2/3
8	1/3	1/3	1/3
9	2/3	1/6	1/6

Таблица 2.4.

№ п.п.	F(см <sup>2</sup> )
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10

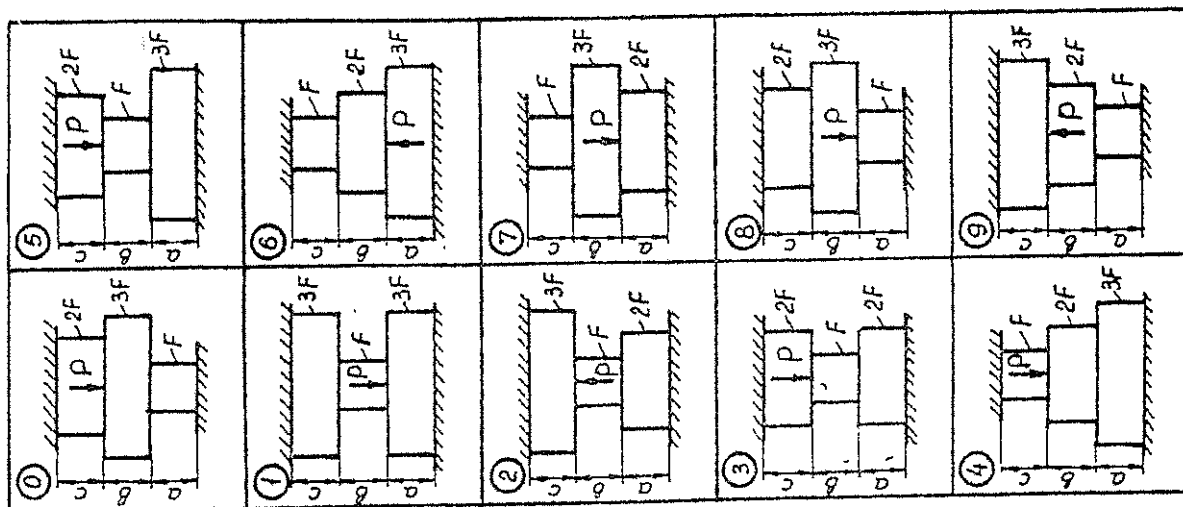


Рис. 2.2.

Рис. 2.3.



Таблица 2.7.

№ п.п.	a	b	c
0	1/2	1	1
1	1	2/1	1/2
2	1	1	1
3	1/2	2/1	1
4	1/2	1	3/2/1
5	1	3/1	1
6	1	2/1	1
7	1/4	1	1/2
8	1/2	1	1/4
9	1/4	1	3/4/1

Таблица 2.8.

№ п.п.	$\alpha$ (sw)
0	0,5
1	0,6
2	0,7
3	0,8
4	0,9
5	1,0
6	0,9
7	0,8
8	0,7
9	0,6

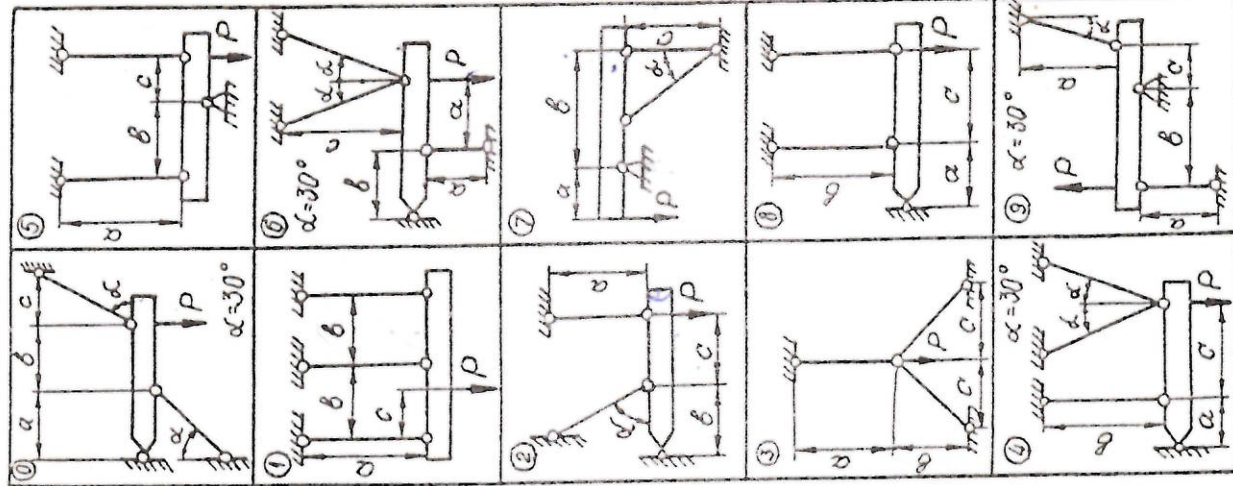


Рис. 2.4.



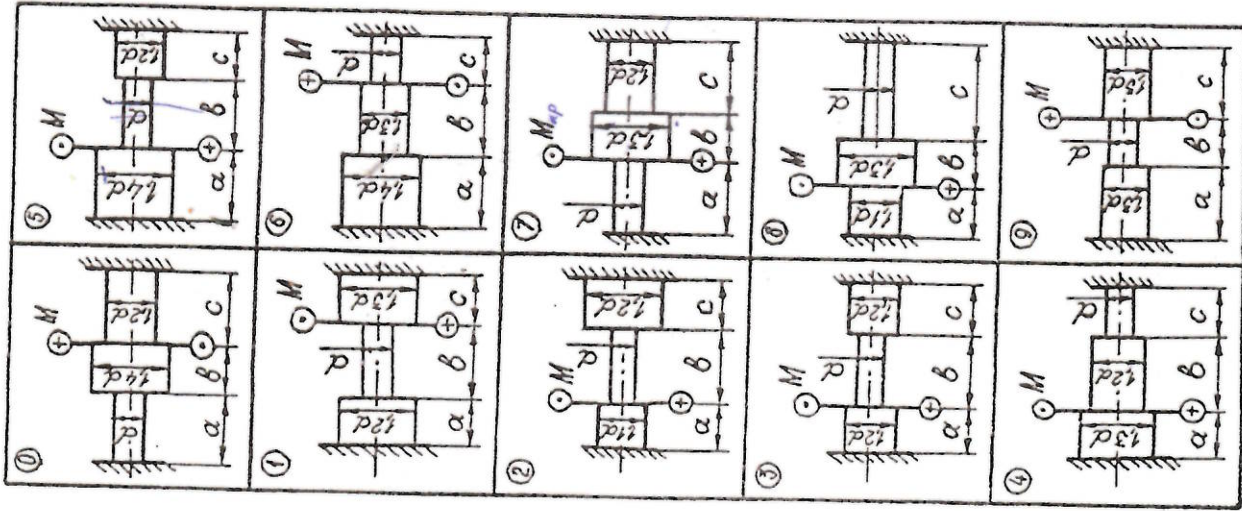
Таблица 2.9.

№ п.п.	a	b	c
0	2/1/3	1/6	1/6
1	1/4	1/4	1/2
2	1/6	2/1/3	1/6
3	1/6	2/1/3	1/6
4	1/2	1/4	1/4
5	1/4	1/2	1/4
6	1/5	1/5	3/1/5
7	3/1/5	1/5	1/5
8	1/3	1/3	1/3
9	1/6	1/6	2/1/3

Таблица 2.10.

№ п.п.	$M_{np}$ (кНм)
0	10
1	9
2	8
3	7
4	6
5	11
6	12
7	13
8	14
9	15

Рис. 2.5.



3006 66

## Условные обозначения

- $X, Y, Z$  – координатные оси, ( $Z$  – ось стержня);  
 $X_c, Y_c$  – главные центральные оси поперечного сечения;  
 $F$  – площадь поперечного сечения;  
 $h$  – высота поперечного сечения;  
 $b$  – ширина поперечного сечения;  
 $W_x$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения;  
 $J_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения;  
 $U_{max}$  – расстояние от центра тяжести поперечного сечения до его наиболее удаленной точки по оси ординат;  
 $S_x$  – статический момент поперечного сечения относительно оси  $X$ ;  
 $S_x^*$  – статический момент отсекаемой части сечения относительно главной центральной оси  $X_c$ ;  
 $M$  – момент;  
 $M_x$  – изгибающий момент;  
 $P$  – сосредоточенная сила;  
 $Q_y$  – поперечная сила;  
 $q$  – распределенная линейная нагрузка;  
 $\sigma_T$  – предел текучести;  
 $n_1$  – коэффициент запаса;  
 $[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение;  
 $\sigma_x; \sigma_y; \sigma_x$  – нормальные напряжения;  
 $\tau_{xy}; \tau_{yx}; \tau_{xz}$  – касательные напряжения;  
 $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$  – главные напряжения;  
 $\sigma_{экв}$  – эквивалентное напряжение;  
 $\alpha$  – коэффициент экономичности поперечного сечения.

## Расчетно-проектировочная работа № 3

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ  
БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ



### 3.1. Основные положения

Основным содержанием работы является подбор высоты заданного поперечного сечения статически определимой балки из условия прочности при изгибе.

Целью данной работы является выработка навыков проведения прочностных расчетов при изгибе балок стандартных и нестандартных профилей и оценка их напряженного состояния.

Задание выполняется в три этапа:

- подбор двутаврового поперечного сечения балки по сортаменту;
- подбор поперечного сечения балки нестандартного заданного профиля;
- сравнение двух вариантов сечений по их экономичности.

Порядок выполнения работы:

1. Строятся эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
2. Определяется положение опасного сечения по величине максимального изгибающего момента.
3. Определяется расчетная величина момента сопротивления из условия прочности при изгибе.
4. Подбирается соответствующий двутавр по сортаменту ГОСТ 8239-89.
5. Проверяется выполнения условия прочности для выбранного двутавра, т.е. величина максимальных нормальных напряжений, возникающих в выбранном двутавре сравнивается с допускаемым напряжением.
6. Производится расчет истинного момента сопротивления сечения, обусловленного его геометрией.
7. Определяется высота заданного сечения из условия равенства расчетного и истинного моментов сопротивления сечения.

8. Производится расчет нормальных и касательных напряжений для заданного сечения и строятся соответствующие эпюры их изменения по его высоте.
9. Производится расчет главных напряжений и определяется вид напряженного состояния в характерных точках по высоте заданного сечения.
10. Производится оценка максимальных напряжений с применением гипотезы прочности наибольших касательных напряжений (Треска – Сен-Венана).
11. Сравниваются два варианта сечений по коэффициенту экономичности. Прежде чем приступить к выполнению домашнего задания, необходимо проработать следующие темы по учебнику В.И. Феодосьева «Сопротивление материалов», 2000г.

Глава III. «Геометрические характеристики поперечных сечений стержня».

§ 4.2. «Напряжения при чистом изгибе».

§ 4.3. «Напряжения при поперечном изгибе».

§ 7.3. «Главные оси и главные напряжения».

§ 8.3. «Гипотезы (критерии) появления пластической деформации».

Кроме того, рекомендуется тщательно разобрать приводимый в настоящем пособии пример расчета.

### 3.2. Пример расчета

Для балки, расчетная схема которой представлена на рис. 3.1а, требуется:

1. Подобрать из условия прочности сечение балки по сортаменту ГОСТ 8239-89 (дан в Приложении).
2. Сделать проверочный расчет подобранного сечения.
3. Определить из условия прочности высоту сечения заданной формы.

4. Определить главные напряжения в характерных точках заданного сечения: наиболее удаленных от нейтральной оси, в местах сочленения стенок и полок сечения, на нейтральной оси.
5. Сделать проверочный расчет заданного сечения с использованием гипотезы наибольших касательных напряжений.
6. Определить коэффициент экономичности двутаврового и заданного поперечных сечений и сравнить их.

**Дано:**  
 заданное сечение – неравнополочный двутавр (рис. 3.2);  
 материал – Ст 3;  
 предел текучести  $\sigma_t = 240$  МПа;  
 коэффициент запаса  $n_t = 1,5$ .

**Решение:**  
 I этап.

Определяем опорные реакции и строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Составляем основные уравнения равновесия, суммируя моменты всех сил относительно опор A и B (при этом следует руководствоваться рекомендациями к выполнению домашнего задания на тему «Анализ внутренних силовых факторов в статически определимых системах»).

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= R_B \cdot 7 + 20 \cdot 2 - 5 - 10 \cdot 7 \cdot 6,5 = 0; & \Rightarrow R_B &= 60 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B &= -R_A \cdot 7 + 20 \cdot 9 - 5 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0; & \Rightarrow R_A &= 30 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки правильности полученных результатов составим сумму проекций всех поперечных сил на ось Y, которая тождественно должна быть равна нулю.

$$\Sigma F_x(Y) = 60 + 30 - 20 - 70 = 0.$$

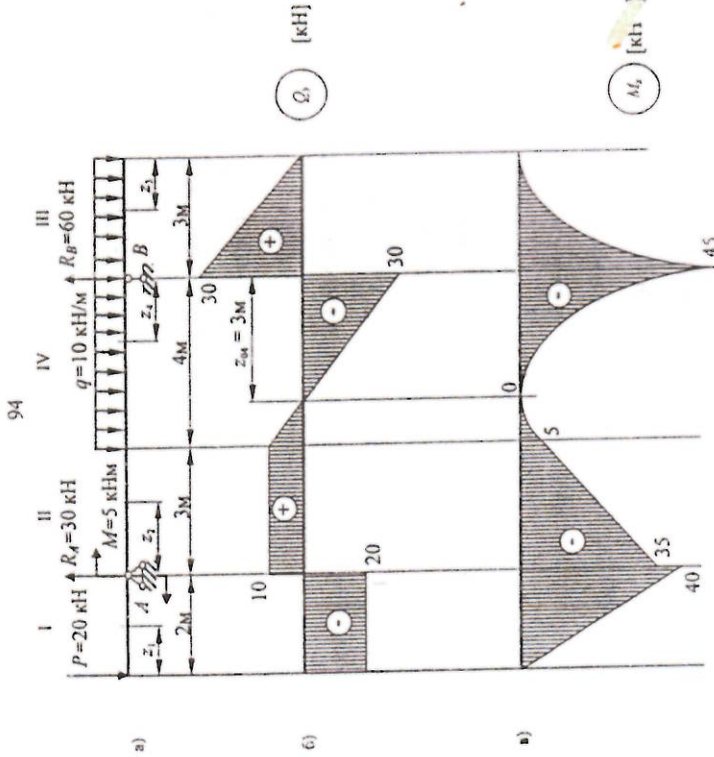


Рис. 3.1.

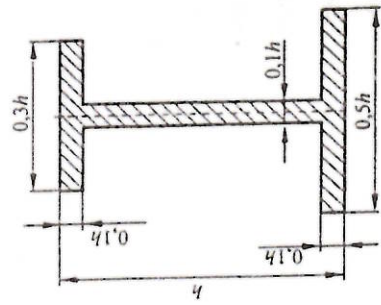


Рис. 3.2.



Для нахождения значений поперечных сил и изгибающих моментов применяем метод сечений, предварительно разбив балку на отдельные участки:

1. участок:

$$\begin{aligned} (0 \leq z_1 \leq 2\text{ м}) \\ Q_y(z_1) &= -20 \text{ кН (const)}; \\ M_x(z_1) &= -20 \cdot z_1; \\ M_x(0) &= 0; \\ M_x(2\text{ м}) &= -20 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

2. участок:

$$\begin{aligned} (0 \leq z_2 \leq 3\text{ м}) \\ Q_y(z_2) &= -20 + 30 = 10 \text{ кН (const)}; \\ M_x(z_2) &= -20 \cdot (2 + z_2) + 30 \cdot z_2 + 5; \\ M_x(0) &= -35 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_x(3\text{ м}) &= -5 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

3. участок:

$$\begin{aligned} (0 \leq z_3 \leq 3\text{ м}) \\ Q_y(z_3) &= 10 \cdot z_3; \\ Q_y(0) &= 0; \\ Q_y(3\text{ м}) &= 30 \text{ кН}; \\ M_x(z_3) &= -10 \cdot \frac{z_3^2}{2}; \\ M_x(0) &= 0; \\ M_x(3\text{ м}) &= -45 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

4. участок:

$$\begin{aligned} (0 \leq z_4 \leq 4\text{ м}) \\ Q_y(z_4) &= 10 \cdot 3 - 60 + 10 \cdot z_4; \\ Q_y(0) &= -30 \text{ кН}; \\ Q_y(4\text{ м}) &= 10 \text{ кН}; \\ M_x(z_4) &= -10 \cdot \frac{(3+z_4)^2}{2} + 60 \cdot z_4; \\ M_x(0) &= -45 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_x(4\text{ м}) &= -5 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Экстремальное значение  $M_x$  на 4-ом участке находится в сечении, где  $Q_y = 0$ , т.е.:

$$Q_y(z_4) = -30 + 10 \cdot z_{4\text{эк}} = 0; \quad \Rightarrow z_{4\text{эк}} = 3 \text{ м}.$$

При этом:

$$M_x(z_{4\text{эк}} = 3\text{ м}) = -10 \cdot \frac{(3+3)^2}{2} + 60 \cdot 3 = 0.$$

По полученным результатам строим эпюры поперечных сил  $Q_y$  (рис. 3.1б) и изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 3.1в).

Определяем положение опасного сечения.

В опоре В (рис. 3.1в) изгибающий момент максимален по абсолютной величине  $|M_x|_{\text{max}} = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , следовательно это сечение является наиболее опасным.

Запишем условие прочности при изгибе: величина максимального напряжения  $\sigma_{\text{max}}$  не должна превышать допускаемого напряжения  $[\sigma]$ , т.е.:

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma], \quad (3.1)$$

где:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{|M_x|_{\text{max}}}{W_x}, \quad (3.2)$$

$|M_x|_{\text{max}}$  - абсолютное значение изгибающего момента в опасном сечении, (кН·м);

$W_x$  - осевой момент сопротивления сечения, (м<sup>3</sup>).

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{п.т}}{n_{п.т}} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа.}$$

Из условия прочности (3.2) находим минимальный расчетный момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{|M_{x \max}|}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 281,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

По расчетному значению  $W_x$  подбираем по сортаменту ГОСТ 8239-89 равнополочный двутавр № 24, который имеет следующие геометрические характеристики:

$$W_x = 289 \text{ см}^3;$$

$$F = 34,8 \text{ см}^2;$$

$$h = 24 \text{ см.}$$

Проверяем выполнение условия прочности для выбранного двутаврового профиля: для этого определяем максимальное напряжение и сравниваем его с допускаемым напряжением.

$$\sigma_{z \max} = \frac{|M_{z \max}|}{W_x} = \frac{45 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-3}} = 155,71 \text{ МПа.}$$

Величина максимального напряжения не превышает величины допускаемого, т.е.  $155,71 \text{ МПа} \leq 160 \text{ МПа}$ , следовательно, условие прочности выполняется.

Если в результате расчета на прочность максимальное напряжение превосходит допускаемое более чем на 5%, то условие прочности не выполняется, и балка будет работать с перенапряжением, что не допустимо. Следовательно, необходимо выбрать двутавр следующего большего типоразмера.

## II этап.

Производим подбор поперечного сечения балки нестандартной заданной формы (в данном примере – это неравнополочный двутавр, рис. 3.2), т.е. определяем его высоту.

Для этого необходимо определить истинный момент сопротивления сечения, обусловленный его геометрией, приравнять его к расчетному моменту сопротивления сечения и из этого равенства выразить высоту сечения.

Как известно из теоретического курса (см. учебник В.И. Феодосьева «Сопротивление материалов», § 4.2), момент сопротивления сечения любой формы определяется по формуле:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}, \quad (3.3)$$

где:  $J_x$  - момент инерции поперечного сечения, (м<sup>4</sup>);

$y_{\max}$  - расстояние от центра тяжести сечения до его наиболее удаленной точки по оси ординат, (м).

Сначала найдем центр тяжести сечения  $Y_c$  по формуле:

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (3.4)$$

где:  $i = 1 + n$  - число сечений простых форм, входящих в состав всего сечения сложной формы;

$S_{xi}$  - статический момент  $i$ -того сечения относительно оси  $X^*$ , (м<sup>3</sup>).

Из теоретического курса (см. учебник В.И. Феодосьева «Сопротивление материалов», § 3.1) известно, что статический момент определяется по формуле:

$$S_x = \int y dF, \quad (3.5)$$

\* ось  $X^*$  - базовая вспомогательная ось абсцисс, положение которой выбирается произвольно по высоте сечения. В данном задании условиями разрешается ее по нижней образующей сечения.



В данном задании сложное сечение удобно разбить на три простых сечения в виде отдельных прямоугольников – верхняя горизонтальная полка, вертикальная стенка и нижняя горизонтальная стенка, для каждого из которых статический момент может быть найден по формуле:

$$S_i = F_i \cdot y_i, \quad (3.6)$$

где:  $F_i$  - площадь  $i$ -того сечения простой формы, ( $\text{м}^2$ );

$y_i$  - расстояние от центра тяжести площади  $F_i$  до оси  $X_c$ .

Итак,

$$y_c = \frac{0,3h \cdot 0,1h \cdot 0,95h + 0,1h \cdot 0,8h \cdot 0,5h + 0,5h \cdot 0,1h \cdot 0,05h}{0,3h \cdot 0,1h + 0,1h \cdot 0,8h + 0,5h \cdot 0,1h} = 0,444h.$$

Через найденный центр тяжести проводится главная центральная ось  $X_c$ .

Положение второй главной центральной оси  $Y_c$  совпадает с осью ординат  $Y$ , относительно которой сечение симметрично.

Момент инерции сечения определяется, согласно теоретическому курсу,

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad (3.7)$$

по формуле:

В данном задании воспользуемся формулой для нахождения момента инерции прямоугольного сечения:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad (3.8)$$

где:  $b$  – ширина сечения, ( $\text{м}$ );

$h$  – высота сечения, ( $\text{м}$ ).

Момент инерции сечения сложной формы можно определить, используя теорему о моменте инерции сложной фигуры: момент инерции сложной фигуры относительно какой либо оси равен сумме моментов инерции ее составляющих простых фигур относительно этой же оси, выражаемую

$$J_x = \sum_{i=1}^n J_{x_i}, \quad (3.9)$$

формулой:

а также с использованием теоремы Штейнера, выражаемой формулой:

$$J_{x_i} = J_{x_{c_i}} + a_i^2 F_i, \quad (3.10)$$

где:  $J_{x_{c_i}}$  - момент инерции простого сечения относительно оси  $X_{c_i}$ , проходящей через его центр тяжести, ( $\text{м}^4$ );

$a_i$  - расстояние от центра тяжести простого  $i$ -того сечения до центра тяжести всего сложного сечения, ( $\text{м}$ );

$F_i$  - площадь простого  $i$ -того сечения, ( $\text{м}^2$ ).

Найдем моменты инерции относительно оси  $X_c$  всех трех простых форм сечений, на которые разбит неравнополочный двутавр:

- верхняя горизонтальная полка:

$$J_{x_{c_1}} = \frac{0,3h \cdot (0,1h)^3}{12} + (0,506h)^2 \cdot 0,3h \cdot 0,1h = 77,0608 \cdot 10^{-4} h^4;$$

- вертикальная стенка:

$$J_{x_{c_2}} = \frac{0,1h \cdot (0,8h)^3}{12} + (0,056h)^2 \cdot 0,1h \cdot 0,8h = 45,1788 \cdot 10^{-4} h^4;$$

- нижняя горизонтальная полка:

$$J_{x_{c_3}} = \frac{0,5h \cdot (0,1h)^3}{12} + (0,394h)^2 \cdot 0,5h \cdot 0,1h = 78,0347 \cdot 10^{-4} h^4;$$

Момент инерции неравнополочного двутавра относительно главной центральной оси  $X_c$ , согласно (3.9), будет равен:

$$J_{x_c} = J_{x_{c_1}} + J_{x_{c_2}} + J_{x_{c_3}} = 200,2743 \cdot 10^{-4} h^4.$$

Истинный момент сопротивления неравнополочного двутавра, согласно (3.3), будет равен:

$$W_x^{\text{ист}} = \frac{200,2743 \cdot 10^{-4} h^4}{0,556h} = 360,2056 \cdot 10^{-4} h^3.$$

Приравняем истинный и расчетный моменты сопротивления заданного сечения и из этого равенства определим его высоту:

$$h = \sqrt[3]{\frac{281,25 \cdot 10^{-6}}{360,2056 \cdot 10^{-4}}} = 0,198 \text{ м}.$$

Округляем полученное значение высоты заданного сечения до  $h = 0,2 \text{ м}$ .

Определяем нормальные напряжения в характерных\*\* точках (рис. 3.3а) заданного сечения по формуле Навье:

$$\sigma_x = \pm \frac{|M_{x \max}|}{J_x} \cdot y, \quad (3.11)$$

где:  $y$  – расстояние от рассматриваемой характерной точки до центра тяжести сложного сечения, (м). Знак  $\pm$  принадлежит координате  $y$ .

Точка 1.

$$\sigma_1 = \frac{|M_{x \max}|}{J_x} \cdot y_{1-c} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,556h}{200,2743 \cdot 10^{-4} h^4} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,556}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^3} = 156,16 \text{ МПа.}$$

Точка 2.

$$\sigma_2 = \frac{|M_{x \max}|}{J_x} \cdot y_{2-c} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,456h}{200,2743 \cdot 10^{-4} h^4} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,456}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^3} = 128,07 \text{ МПа.}$$

Точка 3.

$$\sigma_3 = \frac{|M_{x \max}|}{J_x} \cdot y_{3-c} = 0.$$

Точка 4.

$$\sigma_4 = \frac{|M_{x \max}|}{J_x} \cdot y_{4-c} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,344h}{200,2743 \cdot 10^{-4} h^4} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,344}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^3} = -96,62 \text{ МПа.}$$

Точка 5.

$$\sigma_5 = \frac{|M_{x \max}|}{J_x} \cdot y_{5-c} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,444h}{200,2743 \cdot 10^{-4} h^4} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 0,444}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^3} = -124,70 \text{ МПа.}$$

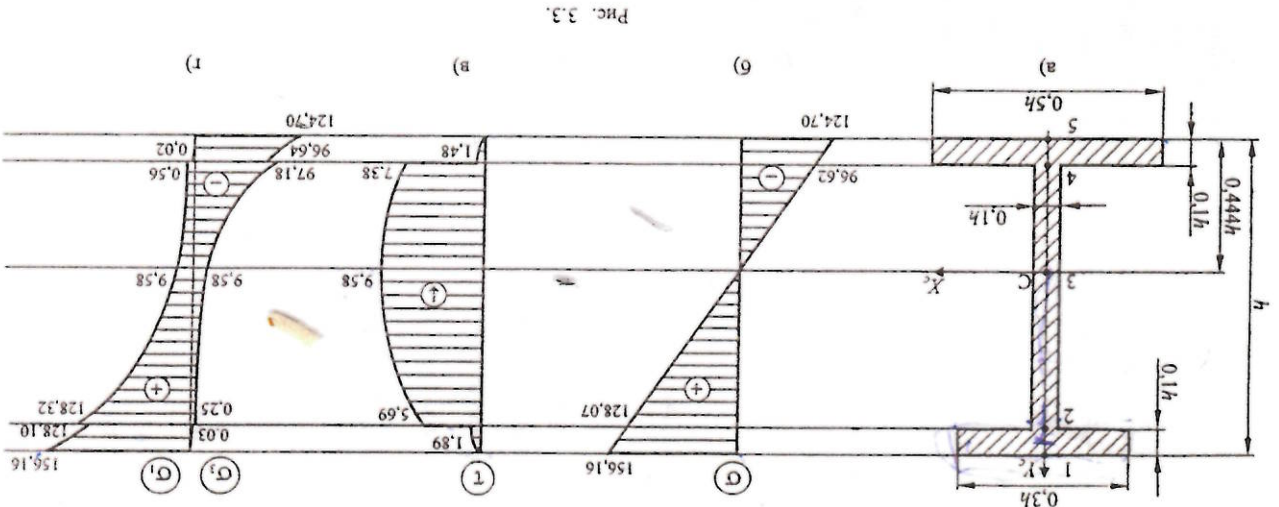


Рис. 3.3.

\*\* Характерными будем считать точки на оси ординат, расположенные по верхней и нижней образующей сечения, а также в центре тяжести сложного сечения. В данном примере таких точек пять.



На данном этапе расчета уже видно, что условие прочности выполняется, т.к. напряжения в наиболее удаленной от центра тяжести точке не превышают допустимых, т.е.  $156,16 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$ .

По результатам расчета строится эпюра нормальных напряжений по высоте заданного сечения (рис. 3.36).

Определяем касательные напряжения в характерных точках сложного сечения по формуле Журавского:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_x^*}{J_x \cdot b}, \quad (3.12)$$

где:  $Q_y$  - значение поперечной силы в опасном сечении, (Н);

$S_x^*$  - статический момент относительно главной центральной оси  $X_c$  части сечения, расположенной выше (ниже) характерной точки, ( $\text{м}^3$ );

В рассматриваемом примере для точек 1 - 3 подсчитывают статические моменты части сечения, находящейся выше них, для точек 4 и 5 - ниже их.

$$S_x^* = F^* \cdot y, \quad (3.13)$$

где:  $F^*$  - площадь части сечения выше (ниже) характерной точки, ( $\text{м}^2$ );

$y$  - расстояние от центра тяжести площади  $F^*$  до центра тяжести сложного сечения, (м);

$J_x$  - момент инерции сложного сечения относительно оси  $X_c$ , ( $\text{м}^4$ );

$b$  - ширина сечения в месте расположения характерной точки, (м).

Точка 1.

$\tau_{xy} = 0$ . (статический момент части сечения выше точки 1 равен нулю, т.к. выше этой точки площадь отсутствует).

В точках 2 и 4 (при переходе от полок к стенке) поперечное сечение меняет свою ширину, поэтому касательные напряжения определяются для обоих значений ширины сечения  $b$  в каждой из этих точек.

Точка 2.

(при ширине верхней горизонтальной полки  $b = 0,3h$ ).

$$\tau_{xy} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,3h \cdot 0,1h \cdot 0,506h}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 \cdot 0,3h} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 0,506}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^2} = 1,89 \text{ МПа}$$

Точка 2.

(при толщине вертикальной стенки  $b = 0,1h$ ).

$$\tau_{xy} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,3h \cdot 0,1h \cdot 0,506h}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 \cdot 0,1h} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 0,506}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^2} = 5,69 \text{ МПа}$$

Точка 3.

$$\tau_{xy} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot (0,3h \cdot 0,1h \cdot 0,506h + 0,1h \cdot 0,456h \cdot 0,228h)}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 \cdot 0,1h} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,22558}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^2} = 9,58 \text{ МПа}$$

Точка 4.

(при толщине вертикальной стенки  $b = 0,1h$ ).

$$\tau_{xy} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,5h \cdot 0,1h \cdot 0,394h}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 \cdot 0,1h} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 0,394}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^2} = 7,38 \text{ МПа}$$

Точка 4 (при ширине нижней горизонтальной полки  $b = 0,5h$ ).

$$\tau_{xy} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,5h \cdot 0,1h \cdot 0,394h}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot h^4 \cdot 0,5h} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 0,394}{200,2743 \cdot 10^{-4} \cdot (0,2)^2} = 1,48 \text{ МПа}$$

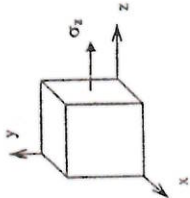
Точка 5.

$\tau_{xy} = 0$ . (статический момент части сечения ниже точки 5 равен нулю, т.к. ниже этой точки площадь отсутствует).

По результатам расчета строится эпюра касательных напряжений по высоте заданного сечения (рис. 3.3в).

Определяем главные напряжения и вид напряженного состояния в характерных точках по высоте заданного сечения: для этого в окрестности каждой рассматриваемой точки вырезаем элементарный объем ( $dV = dx \times dy \times dz$ ) и по его граням обозначаем действующие компоненты нормальных и касательных напряжений. Индексы главным напряжениям присваиваем в порядке убывания их величин, т.е.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Точка 1.



$$\begin{aligned} \sigma_z &= 156,16 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau_{xy} &= 0; \\ \tau_{yz} &= 0; \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.4.

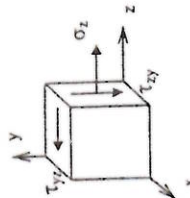
Все площадки элементарного объема являются главными, т.к. на них нет касательных напряжений, следовательно, напряжения, действующие на них, являются главными.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 156,16 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Одноосное напряженное состояние, чистый изгиб.

Точка 2.

(при ширине верхней горизонтальной полки  $b = 0,3h$ ).



$$\begin{aligned} \sigma_z &= 128,07 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau_{xy} &= 1,89 \text{ МПа}; \\ \tau_{yz} &= 0; \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.5.

На площадке ZOY касательные напряжения отсутствуют, следовательно, она является главной, и напряжение  $\sigma_x$  тоже главное. Два других главных напряжения находим по формуле:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{128,07}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{128,07}{2}\right)^2 + (1,89)^2} = \begin{matrix} 128,10 \text{ МПа} \\ -0,03 \text{ МПа} \end{matrix}$$

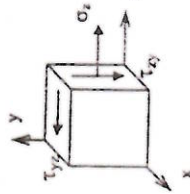
Итак, главные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 128,10 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -0,03 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Двухосное напряженное состояние, поперечный изгиб.

Точка 2.

(при толщине вертикальной полки  $b = 0,1h$ ).



$$\begin{aligned} \sigma_z &= 128,07 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau_{xy} &= 5,69 \text{ МПа}; \\ \tau_{yz} &= 0; \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.6.

Расчет главных напряжений аналогичен предыдущему, меняется только компонента касательных напряжений  $\tau_{xy} = 5,69$  МПа.

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{128,07}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{128,07}{2}\right)^2 + (5,69)^2} = \begin{matrix} 128,32 \text{ МПа} \\ -0,25 \text{ МПа} \end{matrix}$$

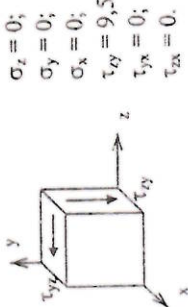
Итак, главные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 128,32 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -0,25 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Двухосное напряженное состояние, поперечный изгиб.



Точка 3.



$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0; \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau_{zy} &= 9,58 \text{ МПа}; \\ \tau_{yx} &= 0; \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.7.

На площадке ZOY касательные напряжения отсутствуют, следовательно, она является главной, и напряжение  $\sigma_x$  тоже главное. Два других главных напряжения находим по известной ранее формуле (3.14), которая, с учетом равенства нулю нормальных напряжений, преобразуется следующим образом:

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \tau_{zy}, \quad (3.15)$$

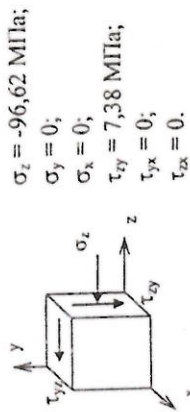
$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= 9,58 \text{ МПа} \\ \sigma_{\min} &= -9,58 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Итак, главные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 9,58 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -9,58 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Двухосное напряженное состояние, чистый сдвиг.

Точка 4.

(при толщине вертикальной стенки  $b = 0,1h$ ).

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -96,62 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau_{zy} &= 7,38 \text{ МПа}; \\ \tau_{yx} &= 0; \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.8.

На площадке ZOY касательные напряжения отсутствуют, следовательно, она является главной, и напряжение  $\sigma_x$  тоже главное. Два других главных напряжения находим по формуле:

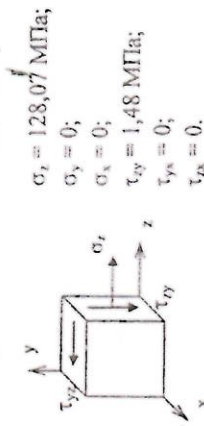
$$\sigma_{\max/\min} = \frac{-96,62}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-96,62}{2}\right)^2 + (7,38)^2} = \begin{matrix} 0,56 \text{ МПа} \\ -97,18 \text{ МПа} \end{matrix}$$

Итак, главные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0,56 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -97,18 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Двухосное напряженное состояние, поперечный изгиб.

Точка 4.

(при ширине нижней горизонтальной полки  $b = 0,5h$ ).

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 128,07 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau_{zy} &= 1,48 \text{ МПа}; \\ \tau_{yx} &= 0; \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.9.

Расчет главных напряжений аналогичен предыдущему, меняется только компонента касательных напряжений  $\tau_{zy} = 1,48$  МПа.

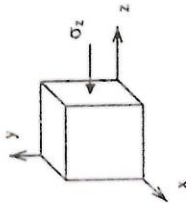
$$\sigma_{\max/\min} = \frac{-96,62}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-96,62}{2}\right)^2 + (1,48)^2} = \begin{matrix} 0,02 \text{ МПа} \\ -96,64 \text{ МПа} \end{matrix}$$

Итак, главные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0,02 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -96,64 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Двухосное напряженное состояние, поперечный изгиб.

Точка 5.



$$\begin{aligned}\sigma_z &= -124,70 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= 0; \\ \sigma_x &= 0; \\ \tau_{xy} &= 0; \\ \tau_{yx} &= 0; \\ \tau_{zx} &= 0.\end{aligned}$$

Рис. 3.10.

Все площадки элементарного объема являются главными, т.к. на них нет касательных напряжений, следовательно, напряжения, действующие на них, являются главными.

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = -124,70 \text{ МПа}.$$

Одноосное напряженное состояние, чистый изгиб.

По полученным значениям главных напряжений строим эпюры  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  на одной оси (рис. 3.3г).

Определяем величины максимальных напряжений в характерных точках поперечного сечения и сравниваем их с допускаемым напряжением.

Оценивая величины максимальных напряжений в точках 1 и 5, нет необходимости подчитывать в них эквивалентные напряжения, т.к. в этих точках наблюдается одноосное напряженное состояние. Достаточно сравнить абсолютные значения наибольших главных напряжений в них с допускаемым напряжением.

Точка 1.

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 156,16 \text{ МПа}.$$

156,16 МПа < 160 МПа, как уже отмечалось выше.

Точка 5.

$$\sigma_{\max} = |\sigma_3| = 124,70 \text{ МПа}.$$

$$124,70 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Определяем эквивалентные напряжения в точках двухосного напряженного состояния по гипотезе наибольших касательных напряжений (теории Треска-Сен-Венана):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (3.16)$$

и сравниваем их с допускаемыми напряжениями.

Точка 2

(при ширине верхней горизонтальной полки  $b = 0,3h$ ).

$$\sigma_{\text{экв}} = 128,10 - (-0,03) = 128,13 \text{ МПа}.$$

$$128,13 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Точка 3

(при толщине вертикальной стенки  $b = 0,1h$ ).

$$\sigma_{\text{экв}} = 128,32 - (-0,25) = 128,57 \text{ МПа}.$$

$$128,57 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Точка 4

$$\sigma_{\text{экв}} = 9,58 - (-9,58) = 19,16 \text{ МПа}.$$

$$19,16 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Точка 4

(при толщине вертикальной стенки  $b = 0,1h$ ).

$$\sigma_{\text{экв}} = 0,56 - (-97,18) = 97,74 \text{ МПа}.$$

$$97,74 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Точка 4

(при ширине верхней горизонтальной полки  $b = 0,5h$ ).

$$\sigma_{\text{экв}} = 0,02 - (-96,64) = 96,66 \text{ МПа}.$$

$$96,66 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Для всех характерных точек заданного поперечного сечения условие прочности выполняется.



## III этап.

Производим оценку экономичности стандартного двутавра и заданного сечения по величине коэффициента экономичности по формуле:

$$\alpha = \frac{W_x}{F \cdot h}, \quad (3.17)$$

где:  $W_x$  – осевой момент сопротивления сечения, (см<sup>3</sup>);

$F$  – площадь поперечного сечения, (см<sup>2</sup>);

$h$  – высота поперечного сечения, (см).

Предпочтительным будет являться сечение с более высоким значением коэффициента экономичности.

Для двутавра № 24:

$$\alpha = \frac{289}{34,8 \cdot 24} = 0,346.$$

Для заданного сечения – неравнополочного двутавра:

$$\alpha = \frac{360,2056 \cdot 10^{-4} \cdot h^3}{(0,3h - 0,1h + 0,1h - 0,8h + 0,5h - 0,1h) \cdot h} = 0,225.$$

Согласно расчетам получаем, что предпочтительнее выбрать поперечное сечение балки в форме стандартного двутавра ГОСТ 8239-89.

## 3.3. Контрольные вопросы

1. Почему касательные напряжения в наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения не могут быть отличными от нуля?
2. Какие принимаются гипотезы при выводе формул для нормальных и касательных напряжений при изгибе?
3. При каком условии балка с поперечным сечением, не имеющим ни одной оси симметрии, находится в условиях чистого изгиба?
4. Назовите геометрические характеристики сечения при следующих сочетаниях показателей степеней в выражении:

$$\int_F x^k y^n dF,$$

$$k = 0, n = 0; k = 0, n = 1; k = 0, n = 2; k = 1, n = 1.$$

5. Какая геометрическая характеристика поперечного сечения балки определяется из условия прочности?
6. Сколько компонентов необходимо задать, чтобы определить тензор напряжений?
7. Какие площадки являются главными при всестороннем растяжении или сжатии?
8. В каком случае изгиба и в каких точках балки имеет место чистый сдвиг?
9. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях балки при чистом и поперечном изгибах?
10. Какие напряжения в продольных сечениях балки возникают при поперечном изгибе?
11. Какие оси инерции называются главными?
12. По каким площадкам касательные напряжения достигают экстремальных значений и чему они равны?
13. Как определить нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке в случае плоского напряженного состояния?

14. В каком случае любая из центральных осей является главной?
15. Как определить положение главных площадок при плоском напряженном состоянии?
16. Какие напряжения возникают в продольных сечениях балки при чистом изгибе?
17. Как записывается условие прочности балки при чистом изгибе?
18. Какие параметры в формуле Журавского являются постоянными независимо от рассматриваемой точки, а какие изменяются?
19. Перечислите гипотезы прочности, применяемые в сопротивлении материалов.
20. Что такое эквивалентное напряжение?
21. В каком случае напряженного состояния нет необходимости считать эквивалентное напряжение?
22. Чем определяется экономичность сечения балки?

### 3.4. Варианты заданий

Варианты расчетных схем балок приведены на рис. 3.11; формы поперечных сечений приведены на рис. 3.12.

Геометрические размеры балок приведены в табл. 3.1; Значения нагрузок, пределов текучести и коэффициентов запаса приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.1.

№ п.п.	$l$ , м	$a$ , м	$b$ , м	$q$ , М	$d$ , м	№ сечения
1	4	1,0	0,5	0	2,0	0
2	5	1,0	1,0	0,5	4,0	1
3	6	0,5	1,5	1,5	4,5	2
4	7	1,5	0,5	2,0	4,5	3
5	8	2,0	1,5	3,5	4,0	4
6	9	1,0	2,0	4,5	3,0	5
7	10	2,0	1,0	6,0	3,0	6
8	11	1,5	2,5	7,0	2,0	7
9	12	3,0	3,0	10,0	1,5	8
0	14	3,0	1,5	12,0	0	9

Таблица 3.2.

№ п.п.	$P_1$ , кН	$P_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$M_1$ , кН·м	$M_2$ , кН·м	$\sigma_{T1}$ , МПа	$n_1$
1	0	100	0	20	20	0	200,0	1,15
2	100	0	20	0	0	20	210,0	1,20
3	0	20	0	40	40	0	220,0	1,25
4	80	0	40	0	0	40	230,0	1,30
5	0	60	0	50	50	0	240,0	1,35
6	60	0	50	0	0	50	250,0	1,40
7	0	60	0	30	60	0	260,0	1,45
8	40	0	30	0	0	60	270,0	1,50
9	0	40	60	0	80	0	280,0	1,55
0	20	0	0	60	0	80	300,0	1,60



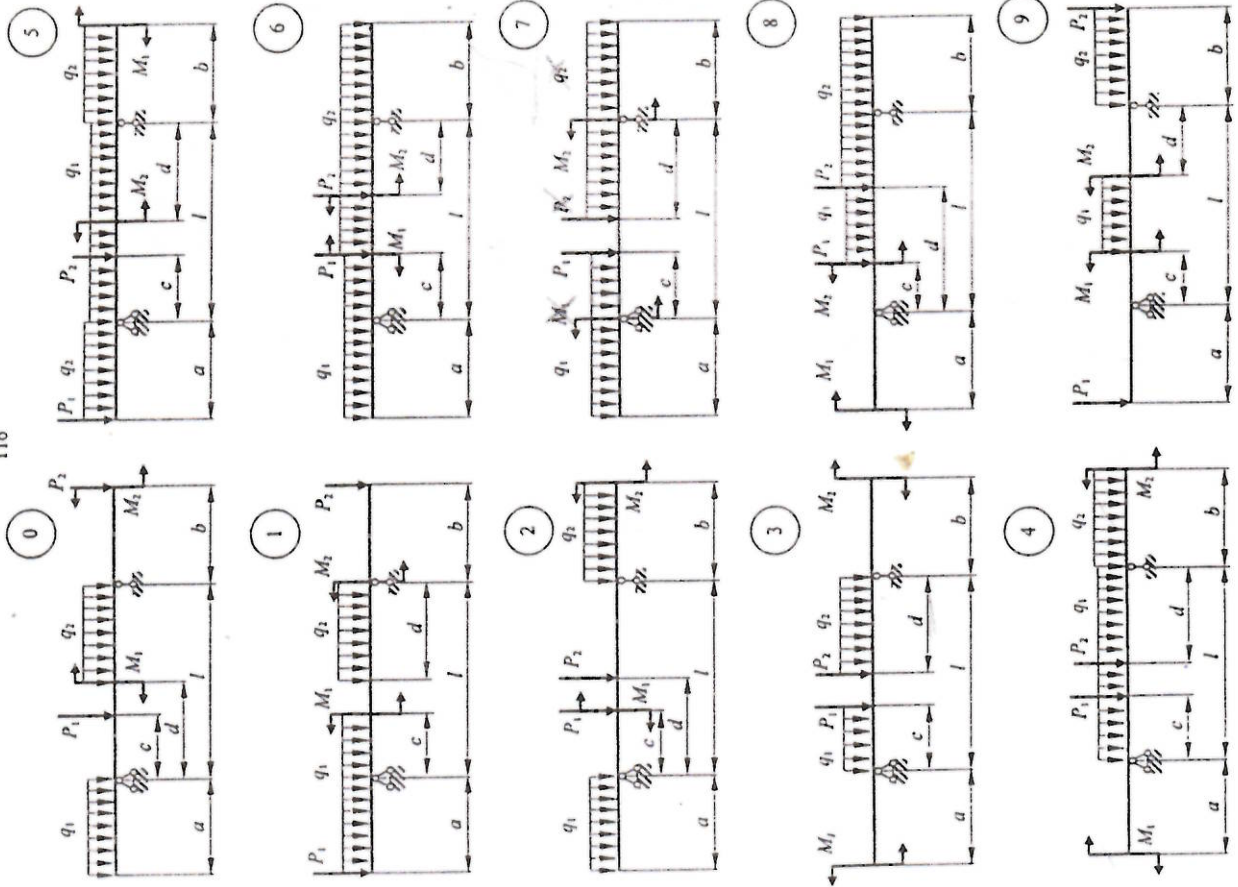


Рис. 3.11.

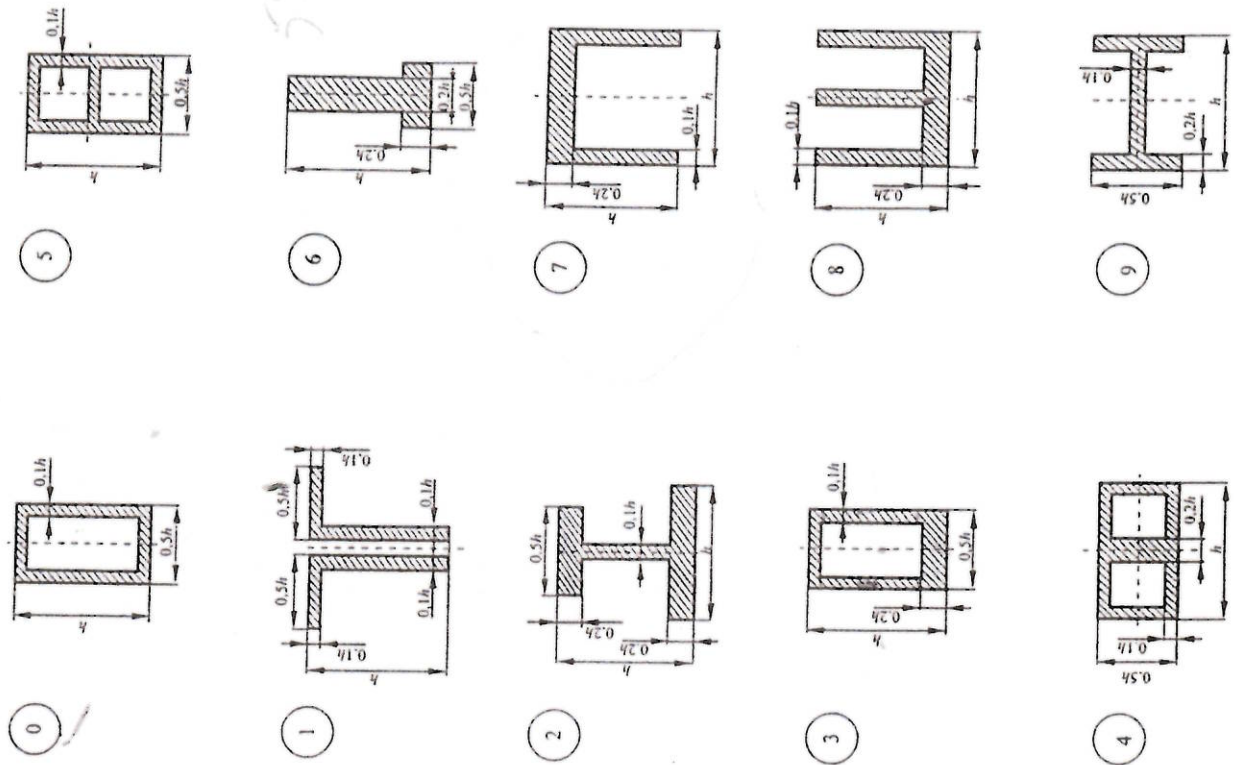


Рис. 3.12.

5525  
340

7325

1325

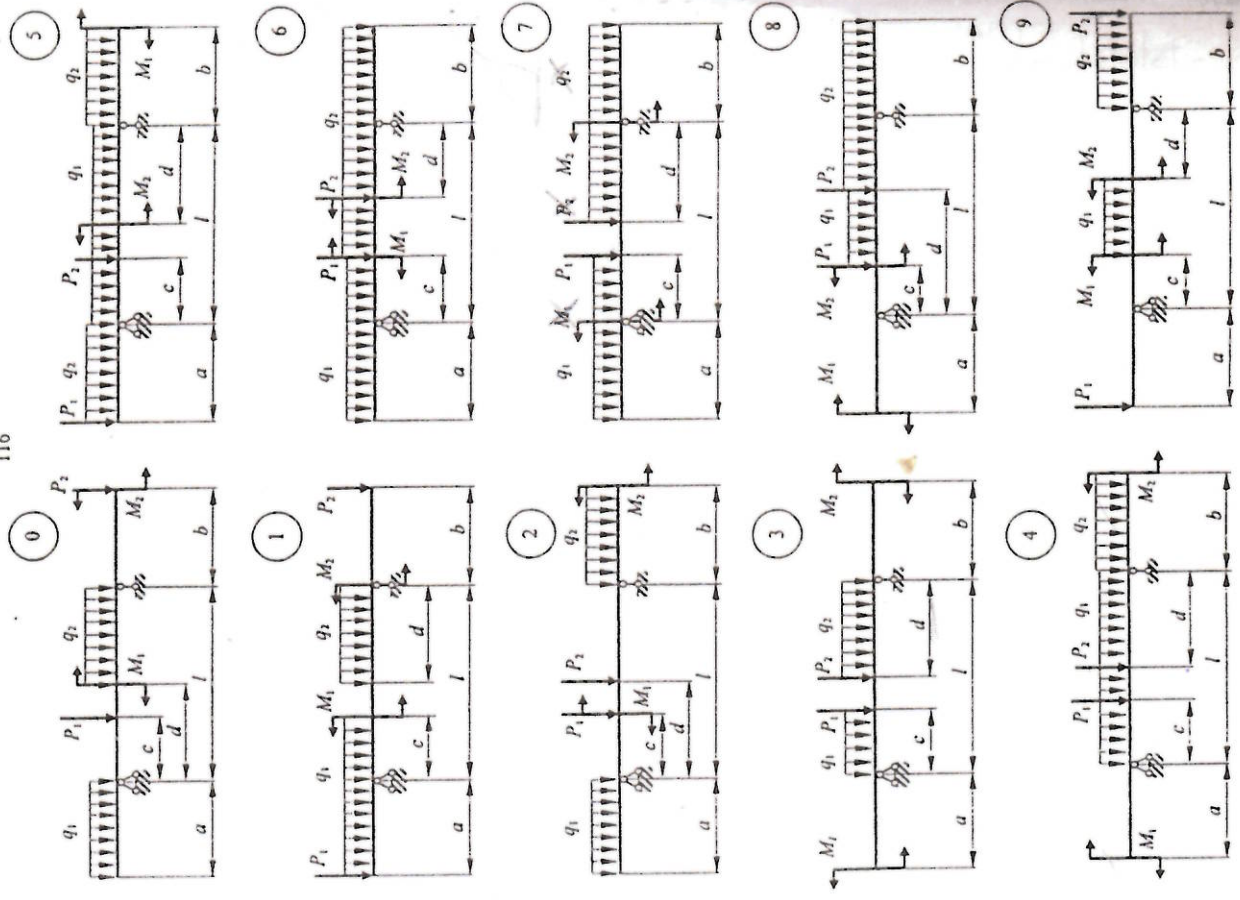


Рис. 3.11.

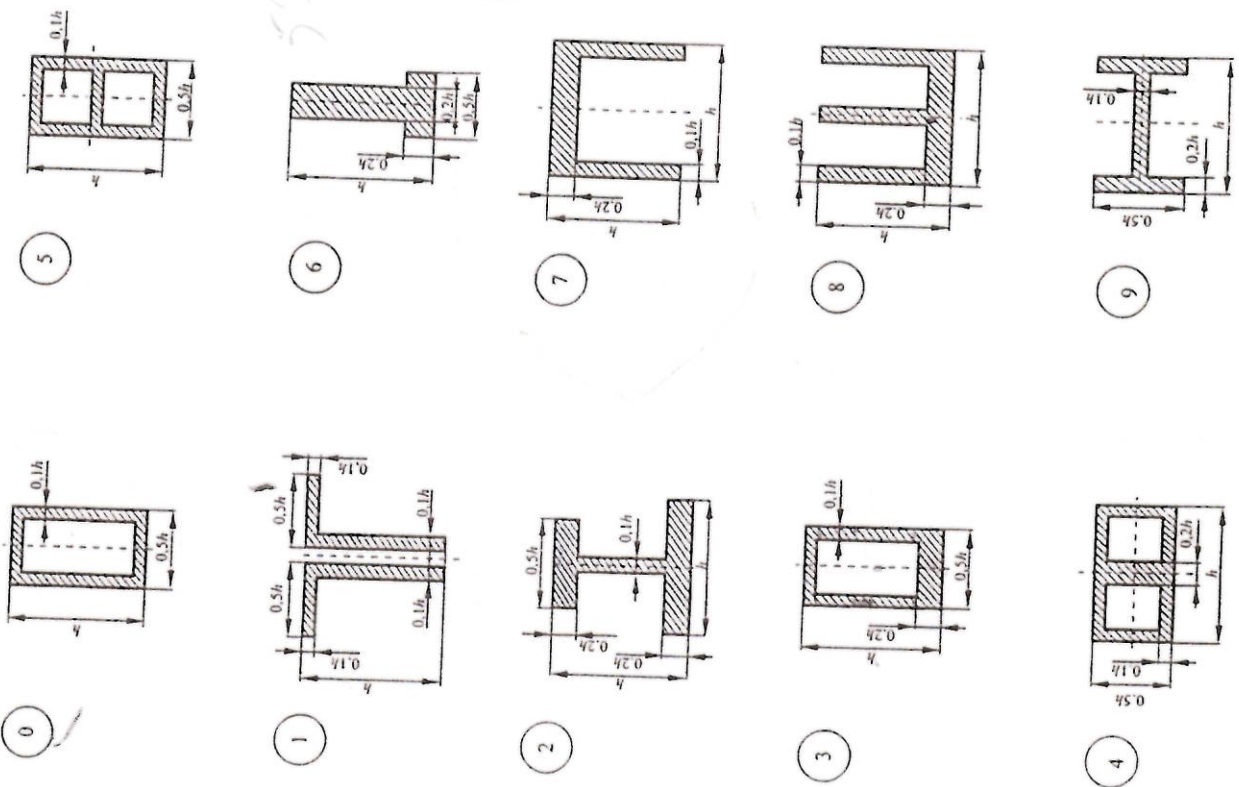


Рис. 3.12.

552,5  
30

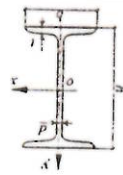
732,5

122,5



## ЛИТЕРАТУРА

1. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. Миролюбов И.Н., Енгальчев С.А., Сергиевский Н.Д. и др. - М.: Высшая школа, 1985, 399с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов. Под редакцией Каурина В.К. - М.: Наука, 1972, 432с.
3. Типовые задачи по курсу "Сопротивление материалов". Антонович В.П. и др. - М.: МИНГ им. И.М. Губкина, 1990, 90с.
4. Феодосьев В.И. «Сопротивление материалов». М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
5. Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев «Справочник по сопротивлению материалов». - Киев: Наукова Думка; 1988. - 736 с.
6. Пирожков В.Г., Лукьянов В.А., Антонович В.П. «Анализ внутренних силовых факторов в статически определимых системах». Учебное пособие. - М.: ГАНГ, 1996. - 58 с.
7. Л.А. Сердий «Расчеты на прочность при растяжении, сжатии и кручении». Учебное пособие. - М.: ГАНГ, 1994. - 40с.
8. С.В. Романенко «Прочностной расчет балки при изгибе». Учебное пособие. - М.: РГУ нефти и газа, 2005. - 33с.
9. Сборник заданий по курсу «Сопротивление материалов». Под ред. Макарова Г.И. - М.: ГАНГ, 1996. - 76 с.
10. Методические указания к расчетно-проектировочным работам по курсу сопротивления материалов, Часть I. Под ред. Боченова Е.Е. - М.: МИНГ, 1985. - 62 с.



Обозначения:  $h$  - высота двутавра,  $b$  - ширина полки,  $d$  - толщина стенки,  $t$  - средняя толщина стенки,  $F$  - площадь поперечного сечения,  $l$  - осевой момент инерции,  $W$  - момент сопротивления;  $F$  - статический момент полусечения.

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)  
СОКРАЩЕННЫЕ СОРТАМЕНТЫ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Приложение 1.

Номер двутавра	Размер, мм			$F$ , см <sup>2</sup>	$l$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$F_x$ , см <sup>3</sup>	$F_y$ , см <sup>3</sup>	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$							
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	350	58,4	39,7	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	39,7	17,9	12,2
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	109,0	27,9	13,8
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	143	46,8	15,5
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	184	74,2	17,7
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	252	91,3	18,4
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	289	112	21,0
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	371	12,3	24,0
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	472	13,5	27,3
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	597	14,7	31,5
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	743	16,2	36,5
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	953	17,9	42,2
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	1231	19,9	48,6
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	1589	21,9	57,0
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	2035	23,6	66,5
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	2560	21,9	78,5
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	3231	18,1	92,6

Общие указания по выполнению и оформлению  
расчетно-проектировочных работ

Расчетно-проектировочные работы (РПР) оформляются в соответствии с требованиями ЕСКД на листах писчей бумаги форматом А4, записи делаются с одной стороны листа. Чертежи, рисунки, эпюры необходимо выполнять в масштабе, желательно на миллиметровой бумаге этого же формата. Расчетно-проектировочная работа (РПР) должна иметь титульный лист, который является первым листом задания и должен быть сделан по установленной форме (пример оформления титульного листа представлен в приложении № 3).

Студент обязательно должен расписаться на титульном листе, поставить дату сдачи задания. Пояснительная записка должна быть сшита, а не склеена скрепками.

В РПР необходимо записать условие каждой задачи, на расчетных схемах указать необходимые размеры и значения внешних сил, соответствующие Вашему варианту. Все расчеты должны сопровождаться краткими пояснениями. Формулы обязательно приводятся в буквенном виде, затем подставляются числовые значения каждой входящей в нее величины и, минуя промежуточные вычисления, записывается ответ с указанием размерности.

Если для одной и той же расчетной схемы строится несколько эпюр, то эти эпюры размещаются одна под другой. Все расчеты выполняются в международной системе единиц - СИ.

Консультирование по вопросам РПР, их проверку и прием проводит преподаватель, ведущий в группе практические занятия.

Исправления, отмеченных преподавателем ошибок, производится на обратной стороне листа пояснительной записки. Возможна подшивка

дополнительных листов к заданию, но не разрешается изымать из проверенной пояснительной записки листы или чертежи. Исправления предъявляются вместе с проверенной работой. При повторной сдаче преподавателю исправленной работы РПР студент должен на титульном листе написать «исправлено» с указанием даты повторной сдачи и расписаться. Правильно выполненные РПР (с учетом исправлений) должны быть защищены. В защиту входит решение контрольных примеров и проверка знаний теоретического материала по теме РПР.



Приложение 3.  
(пример оформления титульного листа РПР)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА  
им. И.М. ГУБКИНА

Кафедра «ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №1  
по курсу сопротивления материалов

Тема «Анализ внутренних силовых факторов в  
статически определимых системах»

ВАРИАНТ № 786

Работу выполнил студент группы.....

Ф.И.О. ....

.....  
число подпись

Работу проверил.....

.....  
Ф.И.О.

.....  
число подпись

Работа исправлена.....

.....  
число подпись

Работа допущена к защите.....

.....  
число подпись

Работа защищена.....

.....  
число подпись

Москва 2006

Лукьянов Виктор Алексеевич  
Молчанов Александр Георгиевич  
Пирожков Виктор Григорьевич  
Романенко Светлана Валентиновна  
Сердий Леонид Артемьевич

«Сопротивление материалов»  
Часть I.

Набор, верстка и корректура авторская

Подписано в печать 17.05.2006  
Объем 7,75 п.л.

Формат 60x90/16  
Тираж 300

Заказ 402

119991, Москва, Ленинский просп., 65  
Отдел оперативной полиграфии  
РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина