$\overline{a}_k$ применим правило Жуковского. Вектор $\overline{V}_r$ проецируем на прямую N_1N_2 (линия пересечения горизонтальной и вертикальной плоскостей), затем полученную проекцию поворачиваем на угол 90^0 в сторону переносного вращения. Вектор $\overline{a}_k$, по направлению, совпадает с вектором $\overline{a}_e^\tau$. С точкой $M(t_1)$ связываем систему координат $xMyz$ и на эти оси проецируем векторное равенство для $\overline{a}$ в развернутом виде:

$$a_x = a_e^\tau + a_k;$$

$$a_y = a_e^n + a_r^n \cdot \sin\alpha + a_r^\tau \cdot \cos\alpha;$$

$$a_z = a_r^n \cdot \cos\alpha - a_r^\tau \cdot \sin\alpha.$$

Тогда $a_x = 3{,}12 + 1{,}48 = 4{,}6$ *м/с*^{2};

$a_y = 1{,}76 + 1{,}08 \cdot \sin 60^0 + 0{,}34 \cdot \cos 60^0 = 2{,}87$ *м/с*^{2};

$a_z = 1{,}08 \cdot \cos 60^0 - 0{,}34 \cdot \sin 60^0 = 0{,}25$ *м/с*^{2}.

Модуль абсолютного ускорения $\overline{a}$:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{4{,}6^2 + 2{,}87^2 + 0{,}25^2} = 5{,}43 м/с^2.$$

Итак, $\underline{a = 5{,}43}$ *м/с*^{2}.

Направление вектора $\overline{a}$:

$$cos(\widehat{\overline{a};\overline{i}}) = \frac{a_x}{a} = \frac{4{,}6}{5{,}43} = 0{,}8471; \qquad \angle(\overline{a};\overline{i}) = 32{,}1^o;$$

$$cos(\widehat{\overline{a};\overline{j}}) = \frac{a_y}{a} = \frac{2{,}87}{5{,}43} = 0{,}5285; \qquad \angle(\overline{a};\overline{j}) = 58{,}1^o;$$

$$cos(\widehat{\overline{a};\overline{k}}) = \frac{a_z}{a} = \frac{0{,}25}{5{,}43} = 0{,}046; \qquad \angle(\overline{a};\overline{k}) = 87{,}4^o.$$

<u>Ответ:</u> абсолютная скорость точки v = 1,77 *м/с*;

абсолютное ускорение точки $a = 5{,}43$ *м/с*^{2}.

Динамика

Задача Д.1. Вторая задача динамики материальной точки

Вариант 1. (рис. 107). Материальная точка 1 движется по наклонной плоскости под действием силы $F = 2mt^2$ (Н). Определить уравнение движения точки $x = x(t)$, пройденный путь за время τ = 1 с и скорость в конце этого пути, если заданы следующие величины: $\alpha = 30^{\circ}$; V_0 = 2 м/с – начальная скорость; f = 0,2 – коэффициент трения скольжения; $x_o = 0$.

Вариант 2. Колечко 1, массой m = 2 кг, скользит по окружности в вертикальной плоскости. Определить скорость колечка и реакцию нормального давления в точке A, если заданы следующие величины: $V_0 = 0$; f = 0,2 – коэффициент трения скольжения; R = 0,4 м – радиус окружности; $\alpha = 30^{\circ}$; $\varphi_o = 90^{\circ}$.

Вариант 3. Материальная точка 1 скользит вниз по наклонной плоскости. На точку действует сила сопротивления $R = 2mV$, где m - масса точки. Определить уравнение движения точки, а также скорость и пройденный путь за время τ = 1 с, если коэффициент трения скольжения f = 0,2, $\alpha = 45^{\circ}$; V_0 = 2 м/с; $x_o = 0$.

Вариант 4. Материальная точка 1 скользит по гладкой внутренней цилиндрической поверхности радиусом r = 0,6 м в вертикальной плоскости. На точку действует сила сопротивления $R = \frac{1}{2}mV^2$, которая направлена в обратную сторону от скорости $\bar{V}$. Определить скорость точки и реакцию нормального давления для $\varphi_1 = 60^{\circ}$, если масса точки m = 2 кг и начальная скорость V_0 = 2 м/с.

Вариант 5. Материальная точка 1, при начальной скорости V_0 = 2 м/с, совершает свободный полет. На точку действует сила сопротивления $\bar{R} = -\alpha m\bar{V}$ $(\alpha = 0,2c^{-1})$. Определить уравнения движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, а также высоту падения h, если l = 2 м.

Вариант 6. Материальная точка 1 движется по гладкой поверхности вдоль оси Ox под действием силы $F = 0,5m\cos 2t$ (Н), которая наклонена под углом α = 30^O к горизонтальной линии. Определить уравнение движения точки и максимальную реакцию нормального давления, если сила сопротивления $\bar{R} = -km\bar{V}$ $(k = 0,1c^{-1})$, $\dot{x}_o = 1,2м/с$, $x_o = 0$, m = 5 кг.

Вариант 7. Материальную точку 1 бросают вертикально вверх с начальной скоростью V_0 = 8 м/с. Точка, при движении по своей траектории Oz, испытывает сопротивление воздуха с силой $\bar{R} = -\alpha m\bar{V}$ $(\alpha = 0,2c^{-1})$. Определить, на какую максимальную высоту поднимется точка.

Вариант 8. Материальная точка 1 движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения $\bar{F} = km\bar{r}$ $(k = 16c^{-2})$. Определить уравнения движения точки, если $x_o = 0,5м$, $\dot{x}_o = 1,2м/с$, $y_o = 0$, $\dot{y}_o = 2м/с$. m – масса точки.

Вариант 9. Материальная точка 1 движется в горизонтальной плоскости под действием силы притяжения $\bar{F} = km\bar{r}$ $(k = 25c^{-2})$, m – масса точки. Определить уравнения движения точки, если $x_o = 0,4м$, $\dot{x}_o = 1,4м/с$, $y_o = 0$, $\dot{y}_o = 1,4м/с$, OA = 0,5 м.

Вариант 10. Материальная точка 1 брошена под углом α = 30^O к горизонту с начальной скоростью V_0 = 19,6 м/с. Точка перемещается по своей траектории и попадает в мишень *A*, расположенную на высоте *h* =1,7 м. Определить дальность полета l точки без учета сил сопротивления.

Вариант 11. (рис. 108). Материальная точка 1, массой *m* = 4 кг, движется по окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Радиус окружности *R* = 0,5 м. Определить, какую начальную скорость $\bar{V}_o$ нужно сообщить точке, чтобы реакция нормального давления в точке *A* была равна нулю? Найти величину реакции нормального давления в точке *O*.

Вариант 12. Материальная точка 1 перемещается по шероховатой наклонной поверхности (α = 30^O) под действием вертикальной силы $F = kmx \quad (k = 0{,}2c^{-2},\ m - \text{масса точки})$. Определить уравнение движения *x = x(t)* и реакцию нормального давления, если: *f* = 0,2 – коэффициент трения скольжения; *m* = 4 кг – масса точки; V_0 = 2 м/с – начальная скорость точки; $x_o = 0$.

Вариант 13. Материальная точка 1, массой *m* = 4 кг, движется по дуге окружности в вертикальной плоскости под действием силы $F = km\varphi^2 \ \ (k = 1{,}2\text{м}/c^2)$. Определить модуль скорости точки и реакцию нормального давления для угла $\varphi_1 = \pi/3$, если V_0 = 2 м/с; $\varphi_o = 0$, R = 1 м.

Вариант 14. Материальная точка 1 движется по криволинейной траектории в горизонтальной плоскости под действием сил притяжения: $\bar{F}_1 = k_1 m \bar{r}_1$; $\bar{F}_2 = k_2 m \bar{r}_2$ ($k_1 = 9\,c^{-2}$, $k_2 = 4\,c^{-2}$, *m* - масса точки). Определить уравнения движения точки, если $x_o = 0$, $y_o = 0$, $\dot{x}_o = 1{,}2\,\text{м}/c$, $\dot{y}_o = 2\,\text{м}/c$, *OA* = *b* = 3 *м*.

Вариант 15. Колечку *1* сообщили начальную скорость V_0 = *12* м/с и оно начало скользить по горизонтальной окружности с трением, при этом коэффициент трения скольжения f = 0,2 . Радиус окружности R = 1 м. Определить скорость колечка $V = V(\varphi)$.

Вариант 16. Колечку *1* сообщили начальную скорость V_0 = *8* м/с и оно начало скользить по горизонтальной окружности с трением, при этом коэффициент трения скольжения f = 0,3 . Радиус окружности R = 1,2 м. Определить угол φ_1, при котором колечко остановится.

Вариант 17. Материальной точке 1 сообщили начальную скорость V_0 = *1* м/с и она начала скользить по шероховатой цилиндрической поверхности в вертикальной плоскости радиуса R = 1,5 м. Коэффициент трения скольжения f = 0,2. Зная массу точки m = 2 кг, определить скорость точки $V = V(\varphi)$.

Вариант 18. Материальной точке 1 сообщили начальную скорость V_0 = *3* м/с и она начала погружаться в жидкость вертикально вниз, испытывая при этом силу сопротивления жидкости $R = \alpha m V^2$ ($\alpha = 2 м^{-1}$, m – масса точки). Определить скорость точки $V = V(z)$ как функцию ее перемещения.

Вариант 19. Материальную точку 1 бросили под углом α = 60^O к горизонту (Ox) с начальной скоростью V_0 = *12* м/с. В свободном полете точка испытывает сопротивление $\bar{R} = -\mu m \bar{V}$ ($\mu = 0{,}2 c^{-1}$, m – масса точки). Определить уравнения движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Вариант 20. Материальную точку 1 бросили под углом α = 60^O к вертикали с начальной скоростью V_0 = *8* м/с. Определить дальность полета l точки, если h = 4 м.

Вариант 21. (рис. 109). Материальная точка 1, перемещаясь по своей траектории в вертикальной плоскости, притягивается к центру *A* с силой $\bar{F} = km\bar{r}$ ($k = 16\,c^{-2}$, *m* – масса точки). Определить уравнения движения точки *x = x(t)*, *y = y(t)*, если: *OA = b = 0,6м*; $x_o = y_o = 0$; $\dot{x}_o = 2\,м/c$; $\dot{y}_o = 1\,м/c$.

Вариант 22. Материальная точка 1 движется по гладкой горизонтальной поверхности *xOy* под действием силы $F = kmt^2$ (*m* – масса точки, $k = 0{,}5\,м/c^4$). Определить уравнение траектории точки, если V_0 =2 м/с, α = 60^O.

Вариант 23. Материальная точка 1 движется по своей траектории в вертикальной плоскости под действием подъемной силы $F = kmy$ ($k = 0{,}25\,c^{-2}$, *m* – масса точки). На точку действует сила сопротивления $\bar{R} = -\mu m\bar{V}_x$ ($\mu = 0{,}4\,c^{-1}$). Определить уравнения движения точки, если V_0 =2 м/с, α = 60^O.

Вариант 24. Материальной точке 1 сообщили начальную скорость V_0 = 4 м/с. При перемещении точки по своей траектории на нее действует сила сопротивления $\bar{R} = \mu m\bar{V}_x$ ($\mu = 0{,}4\,c^{-1}$, *m* – масса точки). Определить уравнение траектории точки *y = f(x)*, если она движется в вертикальной плоскости.

Вариант 25. Материальная точка 1 (колечко) начинает скользить с трением по вертикальной окружности, радиус которой *R* = 0,4 м. Определить скорость колечка в точке *A*, если коэффициент трения скольжения *f* = 0,3. Какова будет скорость колечка V_A, если *f* = 0?

Вариант 26. Материальная точка 1 перемещается в горизонтальной плоскости под действием силы $\bar{F}$ так, что $F_x = 2m\cos 2t\ (H)$,

$F_y = 4m\sin 4t + 6t^2$ (H). Определить уравнения движения точки, если V_0 =2 м/с, α = 45^O.

Вариант 27. Материальная точка 1 скользит по гладкой наклонной поверхности под действием силы $F = \mu mx$ ($\mu = 0,25\,c^{-2}$, m – масса точки). Определить уравнения движения точки и реакцию нормального давления для времени τ = 2 с, если m = 4 кг, V_0 = 4 /с, α = 30^O, β = 30^O.

Вариант 28. Колечку 1 сообщили начальную скорость V_0 =4 м/с и оно начало скользить по горизонтальной окружности, испытывая при этом силу сопротивления $R = \mu mV^2$ ($\mu = 0,4\,м^{-1}$, m = 2 кг – масса точки). Определить скорость точки $V = V(\varphi)$ и реакцию нормального давления, если радиус окружности r = 0,5 м.

Вариант 29. Материальная точка 1, массой m = 2 кг, движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием сил $Q = 0,8\sin pt$ $(p = 2c^{-1})$; $F = -cx$ $(c = 50\,H/м)$. Определить уравнения движения точки, если V_0 =2 м/с, x_o = 0,4 м.

Вариант 30. Материальная точка 1 движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения $\bar{F} = km\bar{r}$ ($k = 0,2\,c^{-2}$, m – масса точки). Определить уравнения движения точки, если V_0 = 4 м/с и α = 30^O.

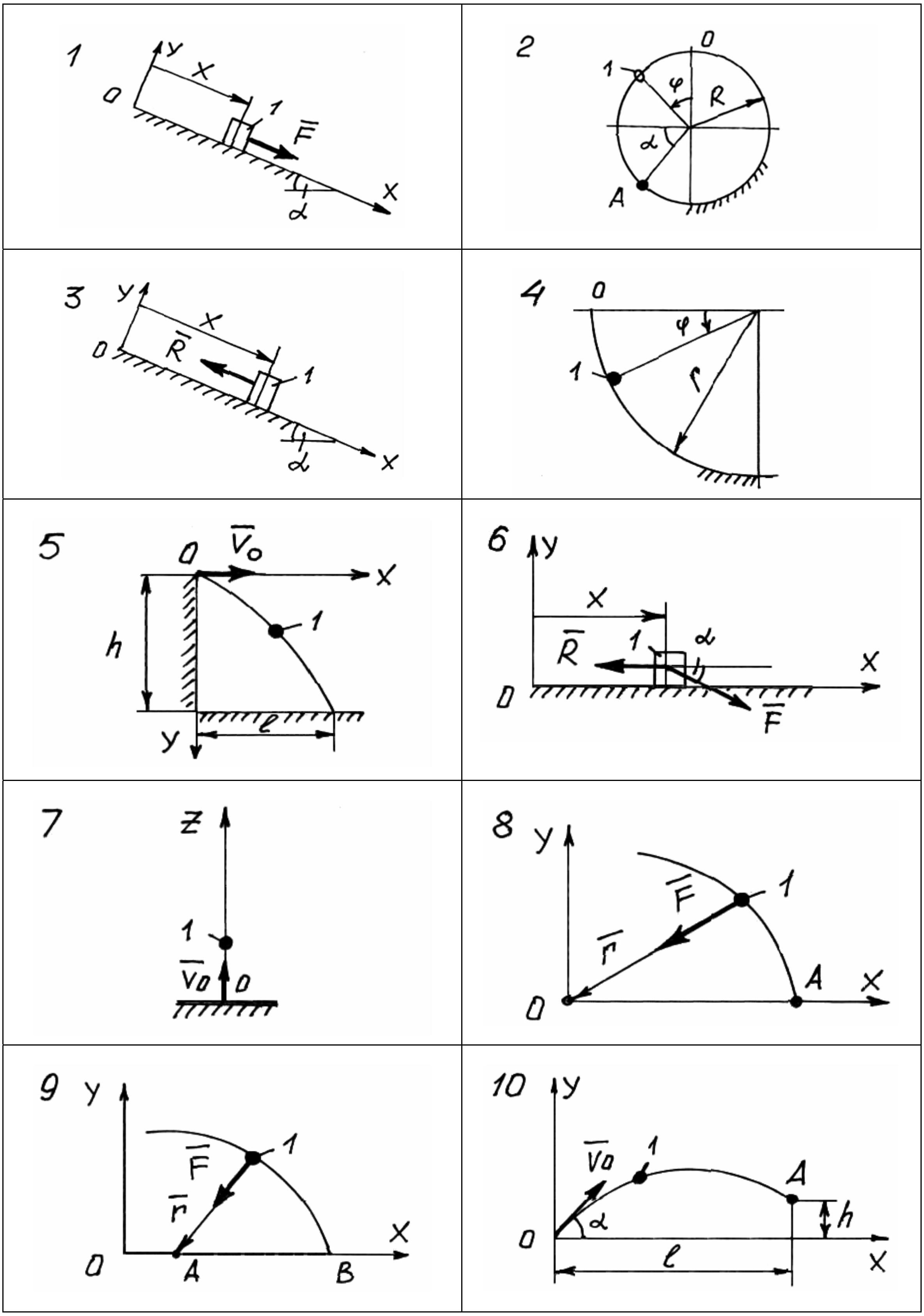

1
y
x
0
1
F
x
α
2
0
1
φ
R
α
A
3
y
x
0
R
1
α
x
4
0
φ
1
r
5
0
V0
x
1
h
y
l
6
y
x
R
1
α
x
0
F
7
z
1
V0
0
8
y
F
1
r
A
x
0
9
y
F
1
r
x
0
A
B
10
y
V0
1
A
α
h
0
l
x

Рис. 107

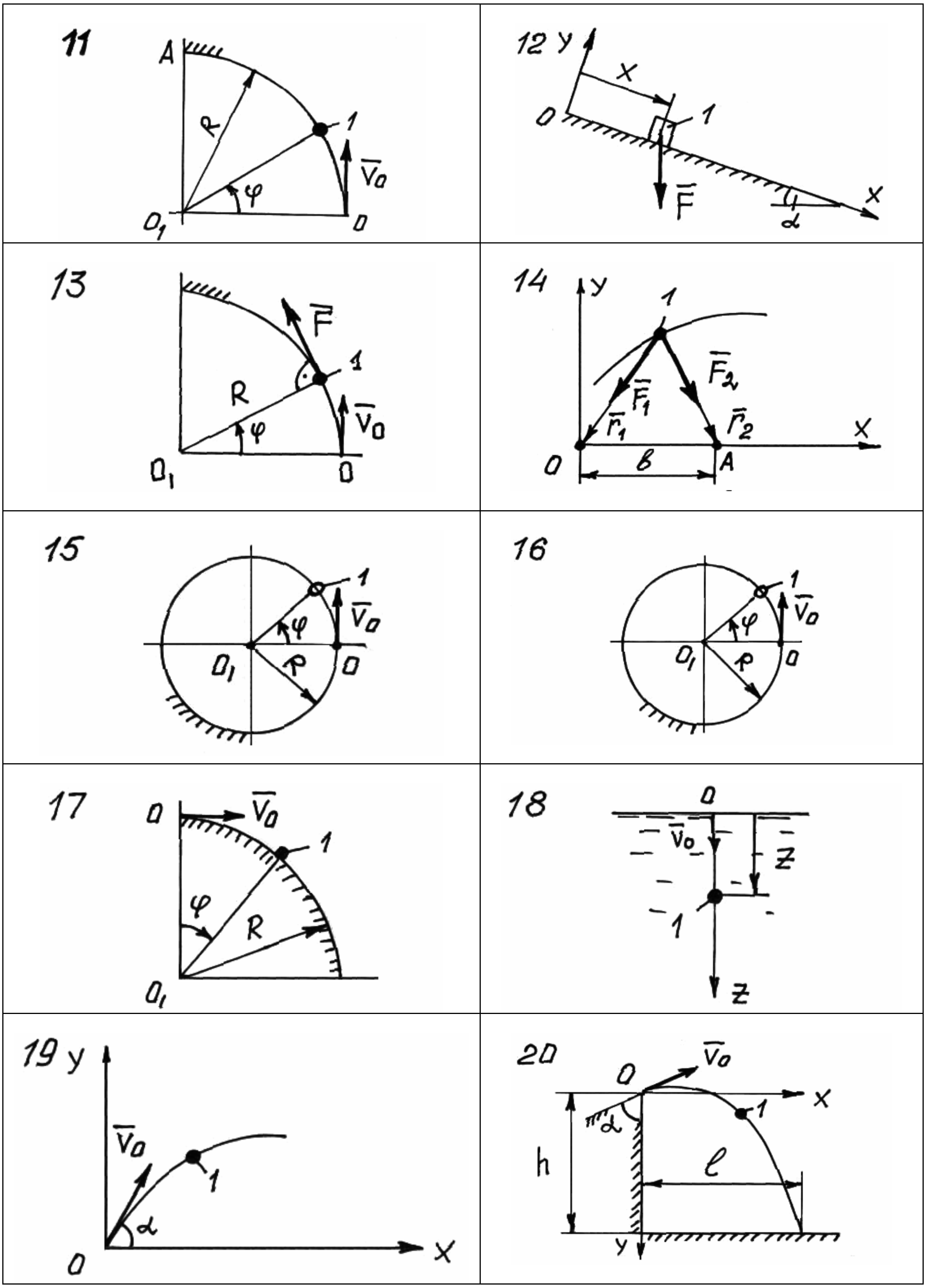

11
A
R
1
φ
$\overline{V}_0$
O_1
O
12
y
x
O
1
$\overline{F}$
x
α
13
$\overline{F}$
1
R
φ
$\overline{V}_0$
O_1
O
14
y
1
$\overline{F}_2$
$\overline{F}_1$
$\overline{r}_1$
$\overline{r}_2$
x
O
b
A
15
1
φ
$\overline{V}_0$
O_1
R
O
16
1
φ
$\overline{V}_0$
O_1
R
O
17
O
$\overline{V}_0$
1
φ
R
O_1
18
O
$\overline{V}_0$
z
1
z
19
y
$\overline{V}_0$
1
α
O
x
20
O
$\overline{V}_0$
x
1
α
h
ℓ
y

Рис. 108

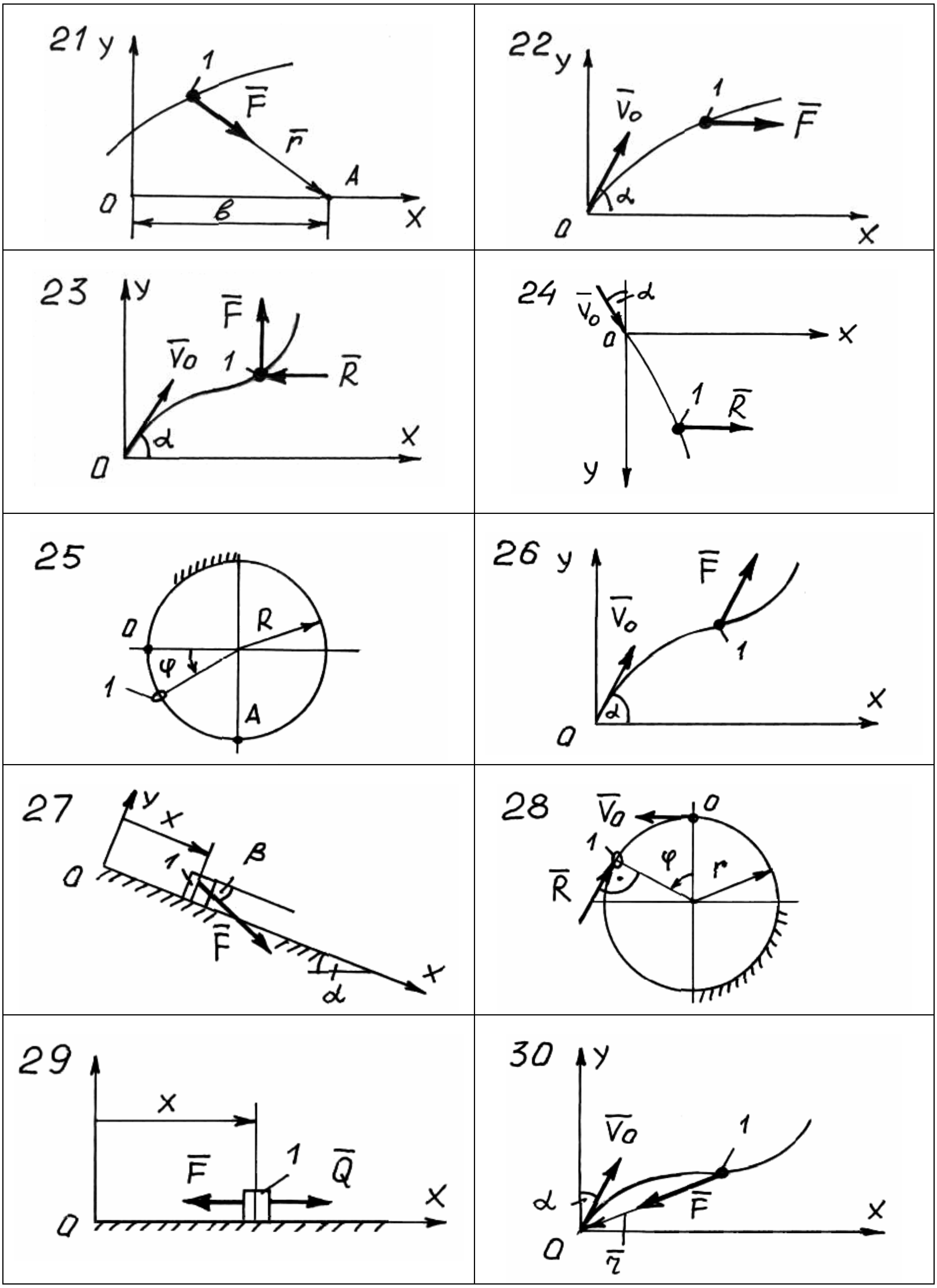


Рис. 109

1. Динамика материальной точки

Основной закон механики (Ньютона)[1] гласит:

Сила $\bar{F}$ (рис. 110), действующая на точку М, пропорциональна ускорению $\bar{a}$ и имеет одинаковое с ним направление в инерциальной системе отсчета xOyz, связанной с Землей. Этот закон можно записать в виде

$$\boxed{m \cdot \bar{a} = \bar{F}} \quad , \qquad (1)$$

где m - масса материальной точки;

$\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt}$ - вектор ускорения точки.

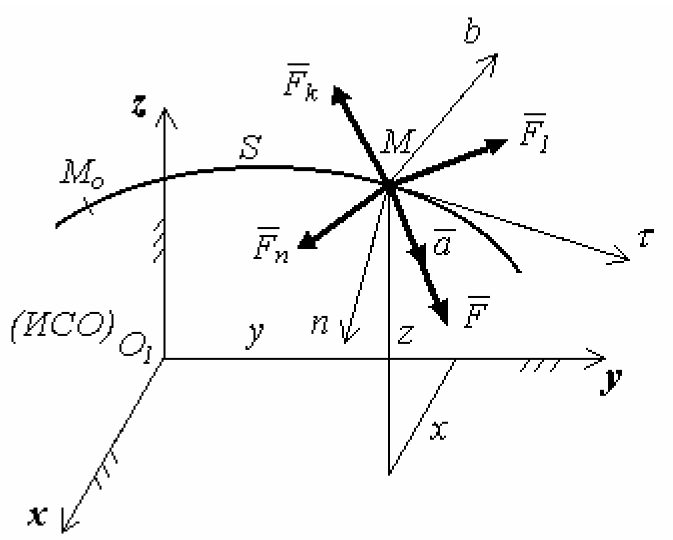


Рис. 110

При малых скоростях движения точки M (значительно меньших скорости света) можно считать, что масса точки есть величина постоянная (m = $const$). Несколько действующих на точку сил

---

[1] Ньютон Исаак (4.1.1643 – 31.3.1727). Английский математик, физик, астроном, основоположник современной механики, создатель математики непрерывных процессов.

$\left\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \cdots \overline{F}_n\right\}$ вызывают такое ее движение, какое бы вызвала одна сила $\overline{F}$, равная их геометрической сумме. Такая сила $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ называется *равнодействующей.* Тогда (1) можно записать в виде:

$$\boxed{m \cdot \overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k} \quad . \tag{2}$$

Равенство (2) получило название - *основное уравнение механики* в векторной форме.

2. Дифференциальные уравнения движения точки

Если векторное равенство (2) спроецировать на прямоугольные декартовые оси координат *xOyz*, то получим следующие выражения:

$$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,; \quad ma_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\,; \quad ma_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\,.$$

Но $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ - уравнения движения точки, поэтому

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases}} \quad . \tag{3}$$

Система (3) определяет дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах.

Свяжем с точкой *M* подвижную систему отсчета τMnb - естественные оси координат, на которые спроецируем равенство (2).

Получим $ma_\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}$; $ma_n = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}$; $ma_b = \sum_{k=1}^{n} F_{kb}$.

Для этих осей $a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{S}$; $a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\dot{S})^2}{\rho}$; $a_b = 0$. Здесь уравнение движения точки S = S(t) задано в естественных координатах. На рис. 110 $\overset{\frown}{M_oM} = S$ - дуговая координата точки *M*. Тогда можно записать:

$$\boxed{\begin{cases} m\dfrac{dV_\tau}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{k\tau} \\ m\dfrac{V^2}{\rho} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kn} \\ 0 = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kb} \end{cases}} \quad . \qquad (4)$$

где V_τ - проекция скорости на касательную ось,

ρ - радиус кривизны траектории в точке *M*.

Система (4) определяет дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественных координатах. При этом последнее уравнение является уравнением статики.

3. Две основные задачи динамики точки

Первая задача.

Зная массу точки *m*, уравнения ее движения *x = x(t)*, *y = y(t), z = z(t),* определить модуль и направление силы $\overline{F}$, действующей на точку. Проекции силы на оси координат определяются из соотношений $F_x = m\ddot{x}$; $F_y = m\ddot{y}$; $F_z = m\ddot{z}$.

Модуль силы $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, а направление вектора $\bar{F}$ определяется по направляющим косинусам

$$cos(\widehat{\bar{F};\bar{i}}) = \frac{F_x}{F};\; cos(\widehat{\bar{F};\bar{j}}) = \frac{F_y}{F};\; cos(\widehat{\bar{F};\bar{k}}) = \frac{F_z}{F}.$$

Первая задача всегда сводится к дифференцированию уравнений движения.

Вторая задача.

Зная массу точки m, начальное ее положение ($x_o; y_o; z_o$), начальную скорость ($\dot{x}_o; \dot{y}_o; \dot{z}_o$), силы действующие на нее, определить уравнения движения точки ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$).

Вторая задача сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (3) и (4).

Вид дифференциальных уравнений (3) и (4) будет зависеть от действующих сил. В практике могут встретиться различные категории сил.

Категории сил:

1) $\bar{F} = const$ – сила постоянная по модулю и направлению (например, сила тяжести $P = mg$);
2) $F = const$ – сила постоянная только по модулю, но меняет свое направление (например, сила притяжения);
3) $\bar{F} = \bar{F}(S)$ – сила, зависящая от перемещения точки приложения (например, сила упругости пружины $F_{упр} = \pm c{\cdot}\lambda$, где λ - деформация пружины, [c] = [$Н/м$] – коэффициент жесткости пружины);
4) $\bar{F} = \bar{F}(\bar{V})$ – сила, которая зависит от скорости точки (например, сила сопротивления среды $\bar{R} = -\mu \cdot \bar{V}$, где [μ] = [$Н{\cdot}с/м$] – коэффициент сопротивления);
5) $\bar{F} = \bar{F}(t)$ – сила, которая зависит от времени (например, возмущающая сила $F = F_o\, sin(\omega t)$).

Наличие этих сил определяют также линейность или нелинейность дифференциальных уравнений (3) и (4).

После двойного интегрирования дифференциальных уравнений (3) появляются шесть констант ($C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$). Величину этих констант определяют по начальным условиям задачи.

Начальные условия:

$$t_o = 0;\; x_o;\, y_o;\, z_o;\; \dot{x}_o;\, \dot{y}_o;\, \dot{z}_o.$$

Пример решения задачи

Точка *1* (рис. 111) под действием силы $F_1 = 0{,}4mt$ (H) скользит с начальной скоростью $V_o = 0{,}4$ *м/с* по наклонной шероховатой плоскости *OA*, для которой $f = 0{,}2$ - коэффициент трения скольжения. Затем точка входит со скоростью V_A в гладкую трубку *AB* и перемещается в ней под действием касательной силы $F_2 = 0{,}2m\varphi$ (H) ($R = 0{,}6$*м*, $F_1 = 0$). В точке *B* она вылетает из трубки со скоростью V_B и перемещается по своей траектории *BC*. Определить: скорости V_A, V_B, V_C; длину участка *OA*, который она пройдет за время $\tau = 1$*с*; реакцию нормального давления в точке *B* трубки; уравнение траектории *BC*; высоту падения *h*, если $l = 4$*м*.

Решение.

1) Рассмотрим отдельно участок *OA* (рис. 112).

На точку *1* будут действовать: заданная сила $F_1 = 0{,}4mt$; реакция нормального давления $\bar{N} \perp OA$; сила тяжести $P = mg$, всегда направленная вертикально вниз, где $g = 9{,}8$*м/с*^{2} – ускорение свободного падения; сила трения скольжения $\bar{F}_{TP}$, которая направлена всегда в обратную сторону от скорости движения точки. Применяя (3), запишем:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \qquad m\ddot{x} = F_1\cos 10^o + P\sin 60^o - F_{TP};$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \qquad 0 = N - P\cos 60^o - F_1\sin 10^o.$$

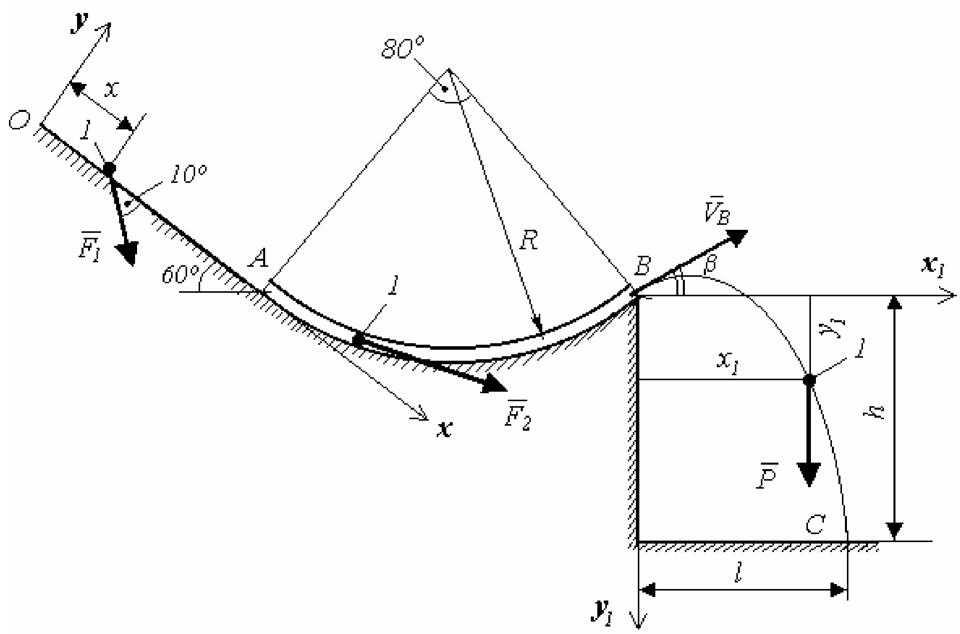


Рис. 111

Из второго уравнения находим

$$N = F_1 \sin 10^o + P\cos 60^o = 0{,}4mt\sin 10^o + mg\cos 60^o = 0{,}07mt + 4{,}9m\,.$$

$$N = (4{,}9 + 0{,}07t)m \ \ (H).$$

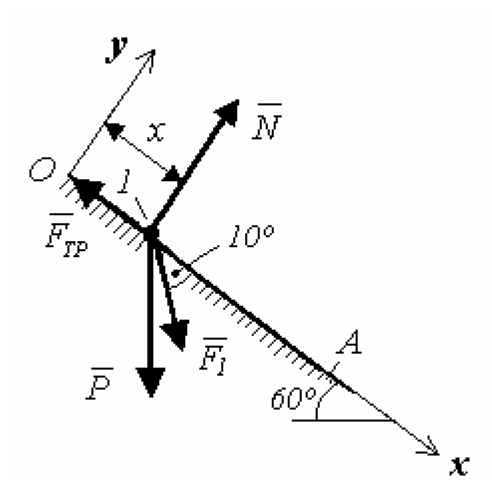


Рис. 112

По закону Кулона[2] $F_{TP} = N{\cdot}f = (4{,}9 + 0{,}07t)m{\cdot}0{,}2 = 0{,}98m + 0{,}014mt$ (H).

Тогда первое уравнение

$$m\ddot{x} = 0{,}4mt\cos 10^o + mg\sin 60^o - 0{,}98m - 0{,}014mt$$

[2] Кулон Шарль Огюстен (14.7.1736 – 13.8.1806). Французский физик, механик и инженер, член Французской АН с 1781г.

после преобразований будет иметь вид: $\ddot{x} = 0{,}38t + 7{,}5$.

Первый интеграл: $\dot{x} = V_x = 0{,}19t^2 + 7{,}5t + C_1$;

второй интеграл: $x = 0{,}063t^3 + 3{,}75t^2 + C_1 t + C_2$.

Запишем начальные условия: $t_o = 0$; $x_o = 0$; $\dot{x}_o = V_o = 0{,}4 м/с$.

Используя их, находим: $C_1 = 0\ 4$; $C_2 = 0$.

Получаем уравнение движения на участке *OA* в виде

$$x = 0{,}063t^3 + 3{,}75t^2 + 0{,}4t \ (м).$$

Скорость точки $V_x = 0{,}4 + 0{,}19t^2 + 7{,}5t$ (*м/с*).

При $\tau = 1с$ $x(\tau) = OA = 0{,}063\tau^3 + 3{,}75\tau^2 + 0{,}4\tau \cong 4{,}21 м$,

$V_x = V_A = 0{,}4 + 0{,}19\tau^2 + 7{,}5\tau \cong 8{,}1$ *м/с.*

2) Теперь рассмотрим криволинейный участок *AB* (рис. 113). Помещаем точку *1* в промежуточное положение на траектории *AB* (угол $\varphi = \varphi(t)$) и показываем все силы, которые действуют на точку. Сила $F_2 = 0{,}2m\varphi$ перпендикулярна радиусу окружности; реакция $\bar{N}_1$ направлена вдоль радиуса; сила $\bar{P}$ направлена вертикально вниз и отклонена от линии радиуса на угол $\alpha = 60^0 - \varphi$. Для криволинейного участка применяем уравнения (4).

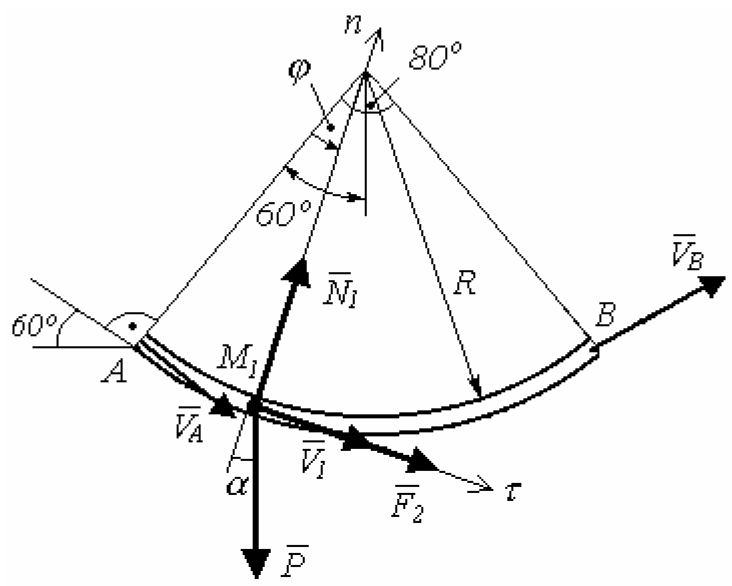


Рис. 113

С точкой связываем естественные оси координат $\tau\, M_1\, n$. Тогда

$$m\frac{dV_1}{dt} = F_2 + P\sin\alpha;$$

$$m\frac{V_1^2}{R} = N_1 - P\cos\alpha.$$

Рассмотрим первое уравнение $m\frac{dV_1}{dt} = 0{,}2m\varphi + mg\sin(\pi/3-\varphi).$

В этом дифференциальном уравнении три переменные величины V_1, t и φ, поэтому в таком виде его решить невозможно. Нужно, чтобы были две переменные V_1 и φ.

Пусть дуга $AM_1 = S_1$, тогда $V_1 = \frac{dS_1}{dt}$, но $S_1 = \varphi \cdot R$.

Можно записать $V_1 = R\dot{\varphi}$ и $\dot{\varphi} = \frac{V_1}{R}$. Выражение $\frac{dV_1}{dt}$ умножим и разделим на $d\varphi$: $\frac{dV_1}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi}\cdot\frac{dV_1}{d\varphi} = \frac{V_1}{R}\cdot\frac{dV_1}{d\varphi}$, тогда

$\frac{m}{R}V_1\frac{dV_1}{d\varphi} = 0{,}2m\varphi + mg\sin(\pi/3-\varphi)$, т.е. получаем дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными V_1 и φ.

Разделим переменные и возьмем интеграл:

$$\frac{1}{R}\int V_1 dV = 0{,}2\int\varphi d\varphi + g\int\sin(\pi/3-\varphi)d\varphi + C_1$$

или $\frac{1}{R}\int V_1 dV_1 = 0{,}2\int\varphi d\varphi - g\int\sin(\pi/3-\varphi)d(\pi/3-\varphi) + C_1.$

Тогда $\frac{V_1^2}{2R} = 0{,}1\varphi^2 + g\cos(\pi/3-\varphi) + C_1.$

Константу C_1 находим по начальным условиям: $\varphi_o = 0$; $V_1(0) = V_A$.

$$C_1 = \frac{V_1^2}{2R} - g\cos\pi/3 = \frac{V_1^2}{2R} - g\cos 60^o =$$

$$= \frac{8{,}1^2}{2\cdot 0{,}6} - 9{,}8\cdot\cos 60^o = 49{,}8\ м/с^2.$$

Окончательно получаем

$$V_1^2 = 2R(49{,}8 + 0{,}1\varphi^2 + g\cos(\pi/3 - \varphi))\ (м^2/с^2).$$

При $\varphi_1 = 80^0$ $V_1(\varphi_1) = V_B$,

$$V_B = \sqrt{2 \cdot 0{,}6(49{,}8 + 0{,}1 \cdot 1{,}4^2 + 9{,}8 \cdot \cos(-20^o))} = 8{,}43\ м/с.$$

Итак, $V_B = 8{,}43$ *м/с.*

Из второго уравнения определяем $N_1 = N_1(\varphi)$:

$$N_1 = mg\cos(60^o - \varphi) + m\frac{V_1^2}{R}.$$

При $\varphi_1 = 80^0$, $m = 1$*кг,* $V_1(\varphi_1) = V_B$,

$$N_1(\varphi_1) = N_B = 1 \cdot 9{,}8\cos(-20^o) + 1 \cdot \frac{8{,}43^2}{0{,}6} = 127{,}7\ Н.$$

Итак, $N_B = 127{,}7$ *Н*.

3) На третьем участке точка *1* находится в свободном полете под действием силы тяжести $\bar{P}$. Показываем точку в промежуточном положении на траектории *ВС* и записываем дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = 0; \\ m\ddot{y}_1 = P; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = 0; \\ \ddot{y}_1 = g. \end{cases}$$

Решая дифференциальные уравнения, получаем:

$$\dot{x}_1 = V_{x_1} = C_1; \qquad x_1 = C_1 t + C_2;$$

$$\dot{y}_1 = V_{y_1} = gt + C_3; \qquad y_1 = \frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4.$$

Запишем начальные условия для этого участка:

$t_o = 0$; $x_1(0) = y_1(0) = 0$; $\dot{x}_1(0) = V_B\cos\beta$; $\dot{y}_1(0) = -V_B\sin\beta$,

где угол $\beta = 80^0 - 60^0 = 20^0$.

По начальным условиям находим константы:

$$C_1 = \dot{x}_1(0) = V_B\cos\beta; \qquad C_2 = C_4 = 0; \qquad C_3 = \dot{y}_1(0) = -V_B\sin\beta.$$

Запишем уравнения движения точки:

$$x_1 = V_B t\cos\beta; \qquad y_1 = 0{,}5gt^2 - V_B t\sin\beta.$$

Проекции скорости точки:

$$V_{x_1} = V_B \cos\beta; \qquad V_{y_1} = gt - V_B \sin\beta.$$

Для определения уравнения траектории точки нужно в уравнениях движения $x_1 = x_1(t)$ и $y_1 = y_1(t)$ исключить параметр t:

$$t = \frac{x_1}{V_B \cos\beta}; \qquad y_1 = \frac{g x_1^2}{2 V_B^2 \cos^2\beta} - x_1 tg\beta;$$

$$y_1 = \frac{9{,}8 \cdot x_1^2}{2 \cdot 8{,}43^2 \cdot \cos^2 20^o} - x_1 tg 20^o,$$

или $y_1 = 0{,}078 x_1^2 - 0{,}36 x_1$ - это уравнение траектории представляет параболу.

Пусть время движения точки по кривой BC будет T, тогда

$x_1(T) = l$, $l = V_B T\cos\beta$, откуда $T = \dfrac{l}{V_B \cdot \cos\beta} = \dfrac{4}{8{,}43 \cdot \cos 20^o} \cong 0{,}5\,с$.

С учетом этого

$$V_{Cx_1} = V_{x_1}(T) = V_B \cos\beta = 8{,}43 \cdot \cos 20^o = 7{,}92 \text{ м/с};$$

$$V_{Cy_1} = V_{y_1}(T) = gT - V_B \sin\beta = 9{,}8 \cdot 0{,}5 - 8{,}43 \cdot \sin 20^o \cong 2 \text{ м/с}.$$

Скорость точки в момент падения равна

$$V_C = \sqrt{V_{Cx_1}^2 + V_{Cy_1}^2} = \sqrt{7{,}92^2 + 2^2} = 8{,}17 \text{ м/с}.$$

Задача Д.2. Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Механическая система (рис. 114 – 116) состоит из однородной пластины 2, массой m_2, и точки 1, массой m_1. Пластина вращается вокруг неподвижной оси *Oz*, а точка под действием внутренних сил движется по пластине вдоль заданной траектории с постоянной относительной скоростью $v_r = u = const$. В начальный момент, когда точка находилась в *A*, пластина вращалась с угловой скоростью ω_o.

Определить: угловую скорость пластинки ω для момента времени, когда точка *1* достигнет положения *B*, если величины *a*, *b, r, R*, α – заданы.

1. Моменты инерции твердого тела

Мерой инертности тела (σ), при его вращательном движении вокруг неподвижной оси, является момент инерции. Его величина определяется по формулам (рис. 117):

$$I_x = \int\limits_{(v)} (z^2 + y^2)dm; \quad I_y = \int\limits_{(v)} (x^2 + z^2)dm; \quad I_z = \int\limits_{(v)} (x^2 + y^2)dm; \qquad (1)$$

где $I_x,\ I_y,\ I_z$ - осевые моменты инерции тела (σ);

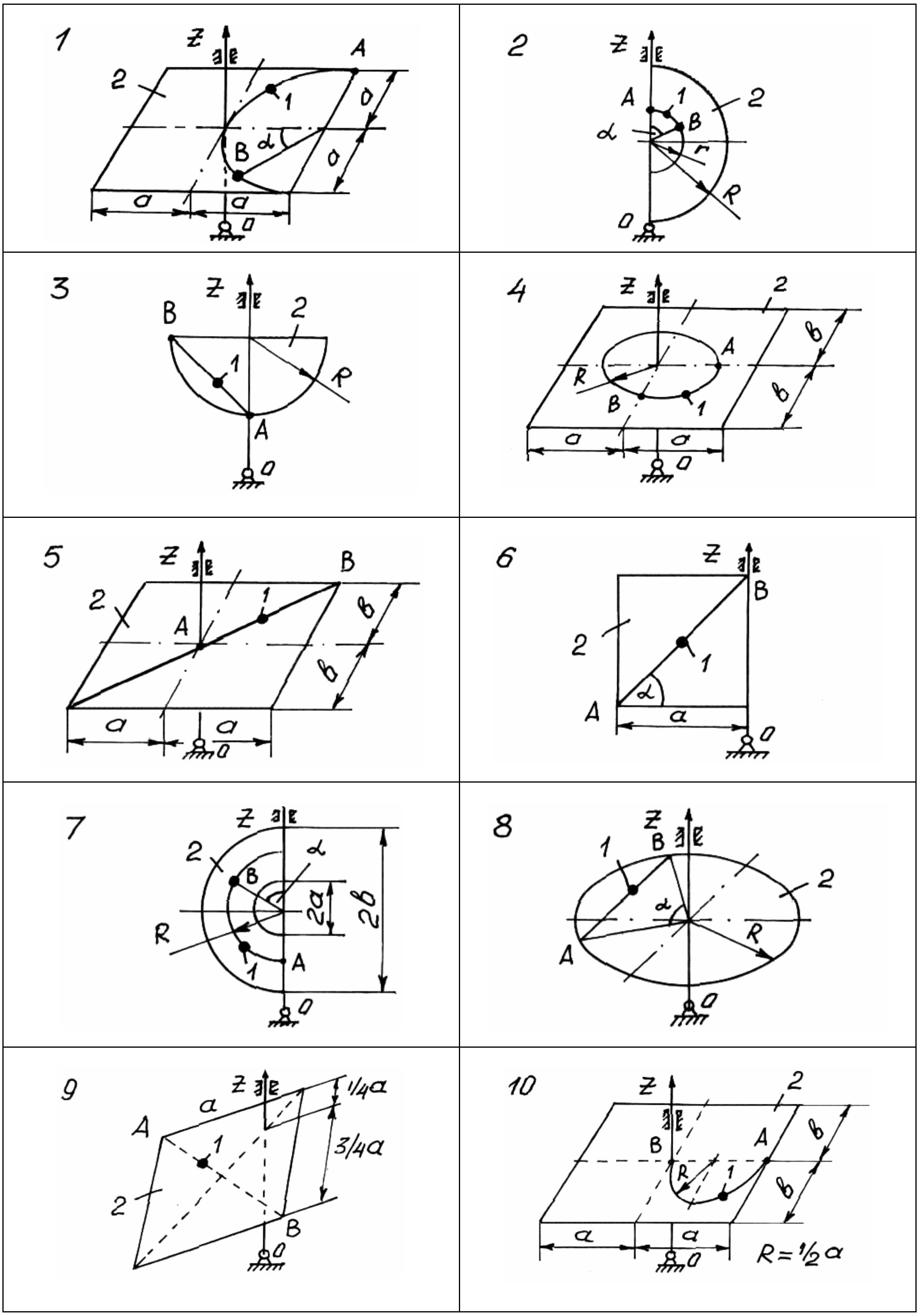
dm - элементарная масса тела;

$\int\limits_{(v)}$ - интеграл по всему объему тела (σ);

$(z^2 + y^2)$ - квадрат кратчайшего расстояния от элементарной массы *dm* до оси *Ox*;

$(x^2 + z^2)$- квадрат кратчайшего расстояния от элементарной массы *dm* до оси *Oy*;

$(x^2 + y^2)$- квадрат кратчайшего расстояния от элементарной массы *dm* до оси *Oz*.



1
z
A
2
1
B
α
a
O
2
A
1
B
α
r
R
O
3
B
2
1
R
A
O
4
2
A
R
B
1
b
a
O
5
B
2
1
A
b
a
O
6
z
B
2
1
A
α
a
O
7
z
α
2
B
2a
2b
R
1
A
O
8
z
1
B
2
α
A
R
O
9
z
a
1/4a
A
1
3/4a
2
B
O
10
z
2
B
A
R
1
b
a
O
R=1/2a

Рис. 114

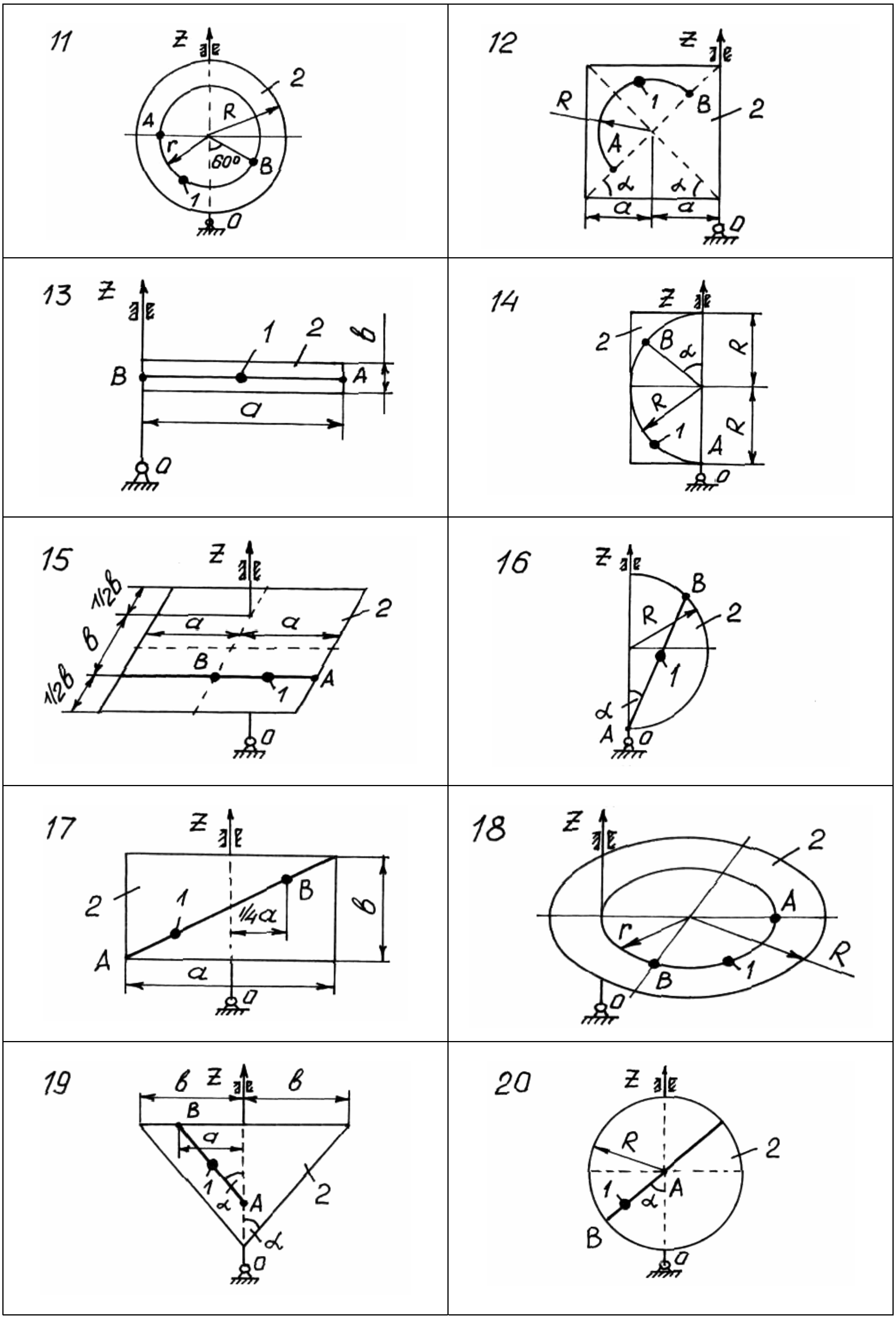

11
z
2
R
A
r
60°
B
1
O
12
R
1
B
2
A
α
a
13
1
2
b
B
A
a
14
2
B
α
R
1
A
15
1/2b
b
a
2
B
A
1
16
B
R
2
1
α
A
17
2
1
B
1/4a
b
A
a
18
2
A
r
R
B
1
19
b
B
a
1
α
A
2
20
R
2
1
A
α
B

Рис. 115

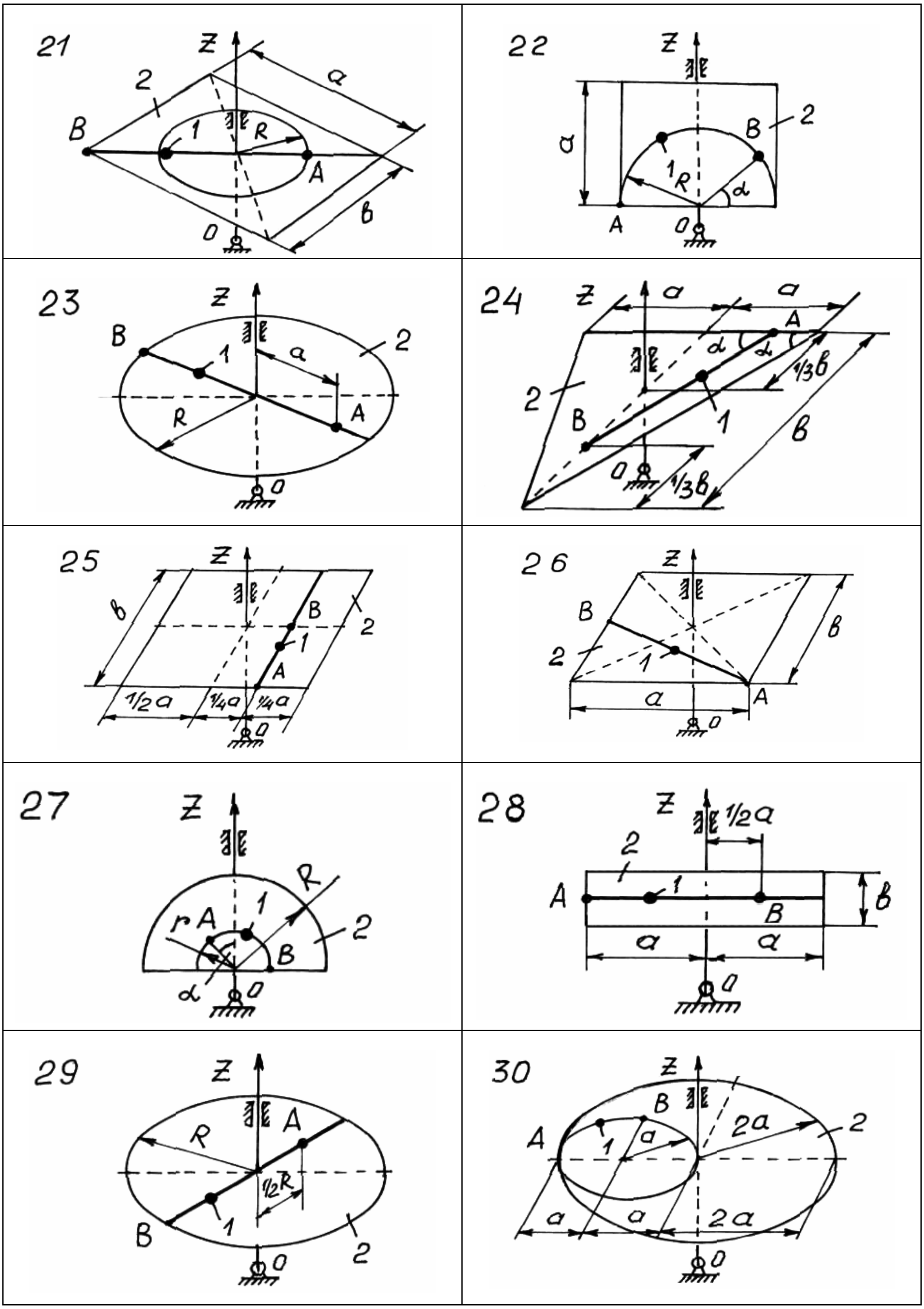
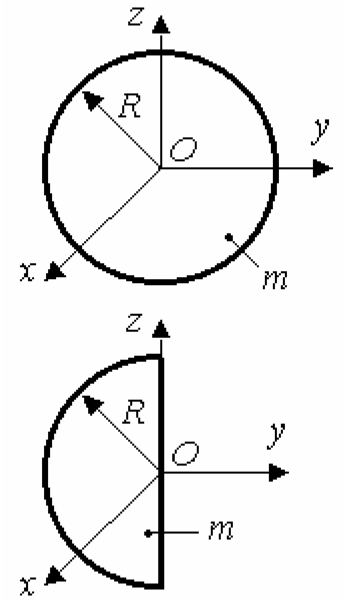
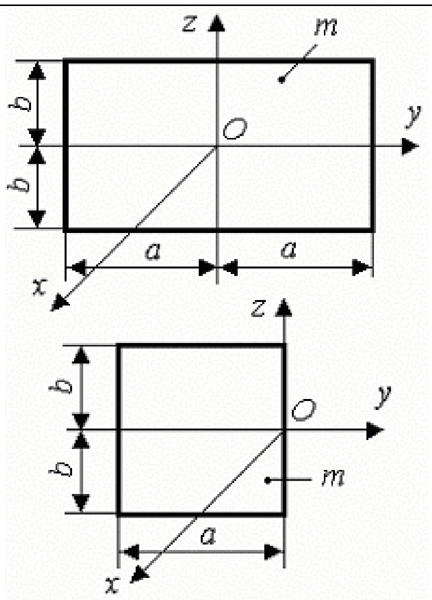
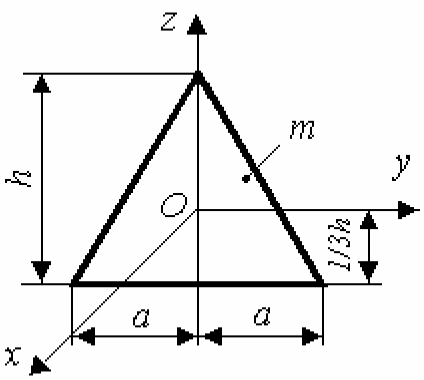

21 z 2 B 1 R A a b O
22 z a B 2 1 R α A O
23 z B 1 a 2 R A O
24 z a a A α α 1/3b 2 B 1 b O 1/3b
25 z b B 2 1 A 1/2a 1/4a 1/4a O
26 z b B 2 1 a A O
27 z R rA 1 2 B α O
28 z 1/2a 2 A 1 B b a a O
29 z R A 1/2R B 1 2 O
30 z B 2a 2 A 1 a a a 2a O

Рис. 116

Таблица 11

	I_x	I_y	I_z
	$\dfrac{mR^2}{2}$	$\dfrac{mR^2}{4}$	$\dfrac{mR^2}{4}$
	$\dfrac{m(a^2+b^2)}{3}$	$\dfrac{mb^2}{3}$	$\dfrac{ma^2}{3}$
	$\dfrac{m(3a^2+h^2)}{18}$	$\dfrac{mh^2}{18}$	$\dfrac{ma^2}{6}$

Размерность [I] = [$кг \cdot м^2$].

По формулам (1) можно всегда определить моменты инерции пластинок – круга, полукруга, прямоугольника, треугольника. Моменты инерции этих простейших фигур приведены в таблице 11. Если оси координат $x_cCy_cz_c$ проходят через центр масс (точку C) тела (σ), то такие оси называются *центральными осями инерции*. Относительно них осевые моменты инерции тела (σ) будут иметь наименьшие величины.

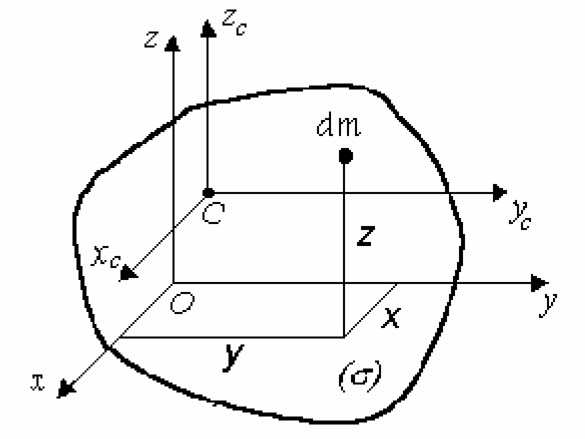


Рис. 117

2. Радиус инерции

Для тел сложной конфигурации вводится понятие *радиуса инерции* ρ (рис. 118).

Радиусом инерции ρ_z называется кратчайшее расстояние от оси Cz до точки A, в которой надо мысленно сосредоточит всю массу тела (σ) так, чтобы момент инерции этой материальной точки относительно оси Cz был равен моменту инерции тела (σ) относительно той же оси:

$$m \cdot \rho_z^2 = I_z \ , \qquad \text{где} \quad \rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} . \qquad (2)$$

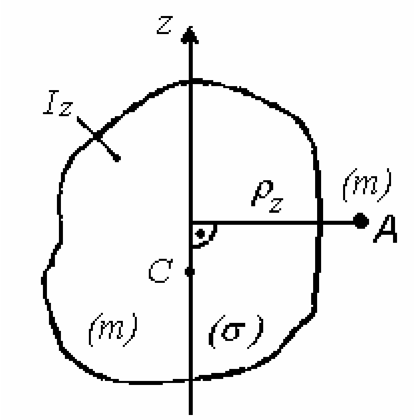


Рис. 118

3. Моменты инерции тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса - Штейнера)

На рис. 119 ось Oz_1 параллельна оси Cz тела (σ).

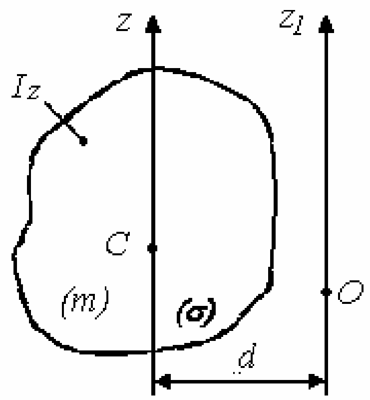


Рис. 119

По теореме Гюйгенса[1] – Штейнера[2]

$$\boxed{I_{z_1} = I_z + m \cdot d^2}, \tag{3}$$

где I_{z_1} - осевой момент инерции тела (σ) относительно

оси $Oz_1 \parallel Cz$,

---

[1] Гюйгенс Христиан (14.4.1629 – 8.71695). Голландский механик и математик. Основные исследования относятся к теоретической и прикладной механике, математике, физике и астрономии.

[2] Штейнер Якоб (18.3.1796 – 1.4.1863). Немецкий математик, член Берлинской АН с 1834г. Основные исследования относятся к проективной геометрии.

m – масса тела;

d – кратчайшее расстояние между осями Cz и Oz_1.

С учетом (2) теорему (3) можно записать через радиусы инерции

$\rho_{z_1} = \rho_z + d^2$.

По формуле (3) видно, что I_z – наименьший момент инерции тела (σ).

4. Момент количества движения точки

Количество движения $m\bar{V}$ - есть количественная мера механического движения точки.

Момент количества движения (рис. 120) – это вектор $\overline{l_o} = \bar{r} \times m\bar{V}$, при этом $\overline{l_o} \perp \{пл.П\}$, а $\{т.O; m\bar{V}\} \in \{пл.П\}$, а $\bar{r}$ - радиус-вектор, проведенный из точки *O* к началу вектора $m\bar{V}$.

По модулю $|\overline{l_o}| = |\bar{r}| \cdot |m\bar{V}| \cdot \sin\alpha$, или окончательно можно записать:

$$\boxed{l_o = mVh}, \qquad (4)$$

где $r \cdot \sin\alpha = h$ - перпендикуляр, опущенный из точки *O* на линию действия вектора $m\bar{V}$;

m – масса точки *M*.

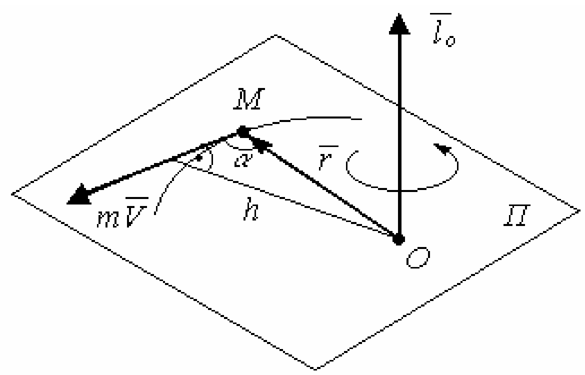


Рис. 120

5. Теорема об изменении кинетического момента механической системы

Механическая система характеризуется совокупностью материальных точек (m_1, m_2, …, m_n) взаимодействующих между собой. В механической системе различают две категории сил: $\bar{F}_k^e$ - внешние силы; $\bar{F}_k^i$ - внутренние силы $(k = \overline{1,n})$. Главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю, т.е.

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0; \quad \bar{M}_o^i = \sum (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^i) = 0.$$

Каждая материальная точка, входящая в механическую систему, будет иметь количество движения $m_k \bar{V}_k$. Вектор *кинетического момента механической системы* равен

$$\bar{K}_o = \sum_{k=1}^{n} (\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k),$$

где точка *O* – начало отсчета декартовой прямоугольной системы координат *xOyz*.

Рассмотрим изменение вектора $\bar{K}_o$ в зависимости от времени.

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k\Big) = \sum\Big(\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{V}_k\Big) + \sum\Big(\bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt}\Big) =$$

$$= \sum (\bar{V}_k \times m_k \bar{V}_k) + \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k);$$

где $\bar{V}_k \times m_k \bar{V}_k = 0$;

$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$ - основное уравнение динамики для *k* – ой точки.

Тогда $\sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k) = \sum (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^e) + \sum (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^i) = \bar{M}_o^e + \bar{M}_o^i$, но $\bar{M}_o^i = 0$.

Окончательно можно записать теорему об изменении кинетического момента в векторно-дифференциальной форме:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o^e . \quad (5)$$

Если спроецировать равенство (5) на ось Oz, то получим

$$\boxed{\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\bar{F}_k^e)} \quad . \quad (6)$$

Равенство (6) называется теоремой об изменении кинетического момента механической системы в дифференциальной форме.

Если $\sum_{k=1}^{n} M_z(\bar{F}_k^e) = 0$, то K_z = *const* для любого момента времени. Это есть закон сохранения кинетического момента.

Вычислим кинетический момент (рис. 121) твердого тела (σ) при его вращении вокруг неподвижной оси Oz.

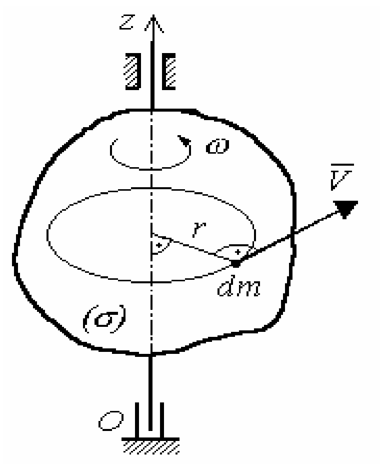


Рис. 121

Тело (σ) вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω. На теле выделим элементарную массу dm, которая будет перемещаться по окружности со скоростью $V = \omega \cdot r$.

Элементарный момент количества движения массы dm запишется в виде $dl_z = dm \cdot V \cdot r = \omega \cdot dm \cdot r^2$.

Кинетический момент тела (σ)

$$K_z = \int\limits_{(v)} dl_z = \omega \cdot \int\limits_{(v)} r^2 \cdot dm = I_z \omega;$$

где $\int\limits_{(v)} r^2 \cdot dm = I_z$ - осевой момент инерции тела (σ).

Окончательно запишем

$$\boxed{K_z = I_z \omega}. \qquad (7)$$

<u>Пример решения задачи</u>

На схеме рис. 122 однородная пластина *2*, массой m_2, вращается вокруг неподвижной оси Oz с постоянной начальной угловой скоростью ω_o. Затем по пластине из точки A начинает двигаться точка *1*, массой m_1, с постоянной относительной скоростью $\bar{u} = const$.

<u>Определить:</u> угловую скорость пластины ω для момента времени, когда точка *1* достигнет положения B, если геометрические размеры пластины заданы.

<u>Решение.</u>

Запишем теорему об изменении кинетического момента механической системы в проекции на ось Oz

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\bar{F}_k^e).$$

Составим расчетную схему. Для этого покажем на схеме все внешние силы и скорости. На систему действуют силы тяжести точки $\bar{P}_1$ и пластины $\bar{P}_2$, приложенные соответственно к точке и центру тяжести пластины, а также опорные реакции $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$.

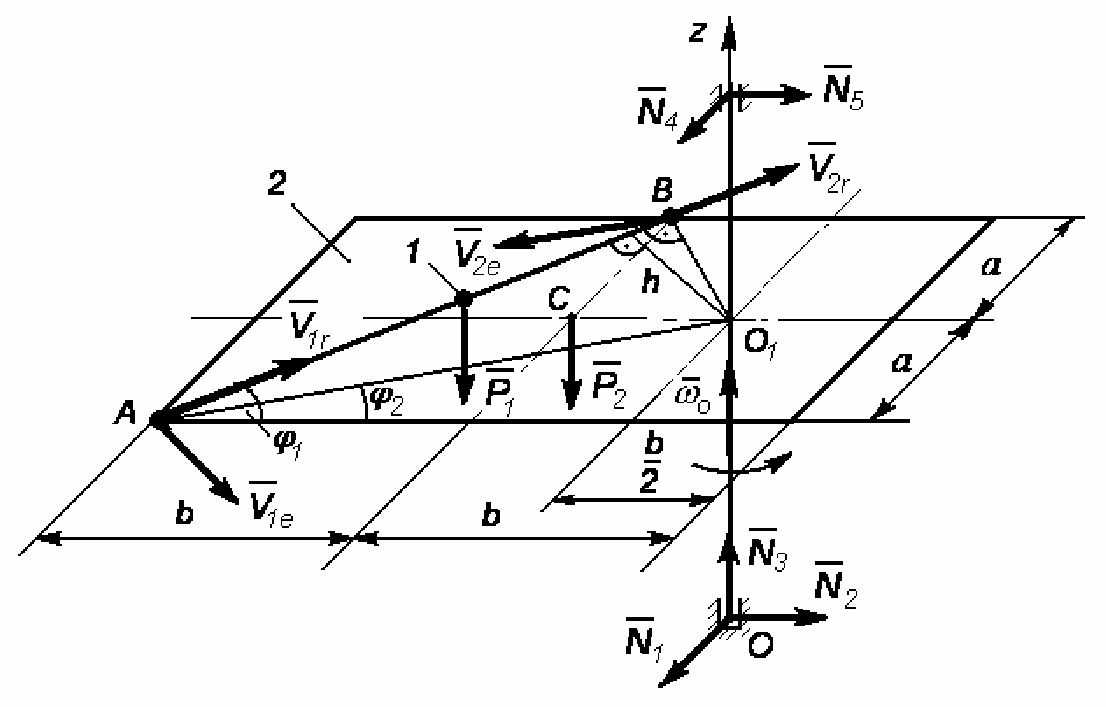


Рис. 122

Точка *1* совершает сложное движение, состоящее из переносного и относительного движений. Поэтому

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r .$$

Покажем эти скорости на схеме. Обозначим точку пересечения оси Oz с плоскостью пластины O_1. В начальный момент, когда точка находится в *A*, относительная скорость $\bar{V}_{1r} = \bar{u}$ направлена по траектории от *A* к *B*. Чтобы показать переносную скорость, соединим точку O_1 с точкой *A* и перпендикулярно радиусу O_1A в сторону вращения показываем вектор переносной скорости $\bar{V}_{1e}$.

В конечный момент, когда точка находится в *B*, относительная скорость $\bar{V}_{2r} = \bar{u}$ направлена также по траектории *AB* в сторону относительного движения. Чтобы показать переносную скорость, соединим точку O_1 с точкой *B* и перпендикулярно радиусу O_1B в сторону вращения показываем вектор переносной скорости $\bar{V}_{2e}$.

Из расчетной схемы видно, что все внешние силы либо параллельны, либо пересекают ось *Oz*.

Поэтому $\sum_{k=1}^{n} M_z(\bar{F}_k^e) = 0$ и K_z = *const* для любого момента времени, или $K_{2z} = K_{1z}$. Здесь K_{1z} и K_{2z} - соответственно кинетические моменты системы в начальный и конечный моменты времени.

В общем виде кинетический момент заданной системы вычисляется по формуле

$$K_z = K_z^{пл} + M_z(m_1\bar{V}).$$

Здесь $K_z^{пл} = I_z\omega_z$ - кинетический момент пластины,

$M_z(m_1\bar{V})$ - кинетический момент точки.

Вычислим момент инерции пластины относительно оси *Oz*.

В таблице 11 находим момент инерции прямоугольной пластины относительно оси, проходящей через центр масс пластины перпендикулярно ее плоскости

$$I_{z'_C} = \frac{m_2(a^2 + b^2)}{3}.$$

Момент инерции пластины относительно оси вращения определим, используя теорему Гюйгенса – Штейнера

$$I_z = I_{z'_C} + m_2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = m_2\frac{4a^2 + 7b^2}{12}.$$

Вычислим кинетический момент системы в начальный момент времени, когда точка находится в *A*.

$$K_{1z} = K_{1z}^{пл} + M_z(m_1\bar{V}_1).$$

Кинетический момент пластины определяем по формуле

$$K_{1z}^{пл} = I_z\omega_{oz},$$

где ω_{oz} - проекция вектора угловой скорости $\bar{\omega}_o$ пластины на ось вращения *Oz*. Пусть пластина в начальный момент времени вращается так, как показано на схеме. Тогда вектор $\bar{\omega}_o$ направлен вверх и $\omega_{oz} = \omega_o$. Следовательно,

$$K_{1z}^{пл} = I_z \omega_o = m_2 \frac{4a^2 + 7b^2}{12} \omega_o .$$

Кинетический момент точки относительно оси вращения вычислим как сумму кинетических моментов точки в переносном и относительном движениях

$$M_z(m_1 \bar{V}_1) = M_z(m_1 \bar{V}_{1e}) + M_z(m_1 \bar{V}_{1r}).$$

Так как $V_{1e} = \omega_o \cdot O_1 A$ и $V_{1r} = u$, то, с учетом правила знаков для моментов, получаем

$$M_z(m_1 \bar{V}_{1e}) = m_1 V_{1e} \cdot O_1 A = \omega_o \cdot m_1 (O_1 A)^2;$$

$$M_z(m_1 \bar{V}_{1r}) = -m_1 V_{1r} \cdot h = -m_1 u \cdot h.$$

Радиус *OA* определяется по формуле $O_1 A = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2} b\right)^2}$.

Плечо момента $M_z(m_1 \bar{V}_{1r})$ - *h* определяется как перпендикуляр, опущенный из точки О до линии действия вектора $\bar{V}_{1r}$.

$$h = O_1 A \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = O_1 A \cdot \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2} b\right)^2} \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Синус разности двух углов представим в виде

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 .$$

Значения тригонометрических функций находим из рисунка:

$$\sin \varphi_1 = \frac{2a}{AB}, \qquad \sin \varphi_2 = \frac{a}{O_1 A},$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{b}{AB}, \qquad \cos \varphi_2 = \frac{\frac{3}{2} b}{O_1 A},$$

где $AB = \sqrt{(2a)^2 + b^2}$.

Следовательно, $\sin(\varphi_1-\varphi_2)=\dfrac{2a}{AB}\cdot\dfrac{\frac{3}{2}b}{O_1A}-\dfrac{a}{O_1A}\cdot\dfrac{b}{AB}=\dfrac{2ab}{O_1A\cdot AB}$

и $h=O_1A\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)=O_1A\cdot\dfrac{2ab}{O_1A\cdot AB}=\dfrac{2ab}{AB}=\dfrac{2ab}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}$.

С учетом найденных значений кинетический момент точки определим по формуле

$$M_z(m_1\bar{V}_1)=\omega_o\cdot m_1(O_1A)^2-m_1u\cdot h=$$

$$=m_1\left\{\left[a^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^2\right]\cdot\omega_o-\frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}u\right\}.$$

Таким образом, кинетический момент механической системы в начальный момент времени будет равен

$$K_{1z}=m_2\frac{4a^2+7b^2}{12}\omega_o+m_1\left\{\left[a^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^2\right]\cdot\omega_o-\frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}u\right\}=$$

$$=\left\{m_2\frac{4a^2+7b^2}{12}+m_1\left[a^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^2\right]\right\}\omega_o-m_1\frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}u.$$

Вычислим кинетический момент механической системы относительно оси вращения в конечный момент времени, когда точка достигнет *B*

$$K_{2z}=K_{2z}^{пл}+M_z(m_1\bar{V}_2).$$

Кинетический момент пластины определяем по формуле

$$K_{2z}^{пл}=I_z\omega_z,$$

где ω_z - проекция вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ пластины на ось вращения *Oz*. Предположим, что вектор $\bar{\omega}$ направлен вверх. Тогда $\omega_z=\omega$. Тогда

$$K_{2z}^{пл}=I_z\omega=m_2\frac{4a^2+7b^2}{12}\omega.$$

Кинетический момент точки относительно оси вращения вычислим как сумму кинетических моментов точки в переносном и относительном движениях

$$M_z(m_1\bar{V}_2) = M_z(m_1\bar{V}_{2e}) + M_z(m_1\bar{V}_{2r}).$$

Так как $V_{2e} = \omega \cdot O_1B$ и $V_{2r} = u$, то, с учетом правила знаков для моментов, получаем

$$M_z(m_1\bar{V}_{2e}) = m_1V_{2e} \cdot O_1B = \omega \cdot m_1(O_1B)^2;$$

$$M_z(m_1\bar{V}_{2r}) = -m_1V_{2r} \cdot h = -m_1u \cdot h.$$

Радиус вращения в переносном движении OB определяется по формуле $O_1B = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2}$.

Так как траектория относительного движения – прямая линия AB, то расстояние h от точки O_1 до линии действия вектора $\bar{V}_{2r}$ такое же, как и в первом случае.

С учетом найденных значений кинетический момент точки определим по формуле

$$M_z(m_1\bar{V}_2) = \omega \cdot m_1(O_1B)^2 - m_1u \cdot h =$$

$$= m_1\left\{\left[a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] \cdot \omega - \frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2 + b^2}}u\right\}.$$

Таким образом, кинетический момент механической системы в конечный момент времени будет равен

$$K_{2z} = m_2\frac{4a^2 + 7b^2}{12}\omega + m_1\left\{\left[a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] \cdot \omega - \frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2 + b^2}}u\right\} =$$

$$= \left\{m_2\frac{4a^2 + 7b^2}{12} + m_1\left[a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\right\}\omega - m_1\frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2 + b^2}}u.$$

Приравняем значения K_{2z} и K_{1z}

$$\left\{ m_2 \frac{4a^2+7b^2}{12} + m_1\left[a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\right\}\omega - m_1\frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}u =$$

$$= \left\{ m_2 \frac{4a^2+7b^2}{12} + m_1\left[a^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^2\right]\right\}\omega_o - m_1\frac{2ab}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}u .$$

Отсюда получаем ответ

$$\omega = \frac{m_2 \frac{4a^2+7b^2}{12} + m_1\left[a^2+\left(\frac{3}{2}b\right)^2\right]}{m_2 \frac{4a^2+7b^2}{12} + m_1\left[a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}\omega_o .$$

Задача Д.3. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Механическая система (рис. 123 – 125) движется под действием силы $\bar{F}$, приложенной к катку *1*. В системе действует момент сопротивления М. В вариантах 18, 20, 23, 25, 26, 27 тела *3* и *4* скользят по гладкой поверхности.

При заданных величинах (таблица 12) во всех вариантах схем определить ускорение точки *A* тела *1*.

Для всех вариантов радиус катка *1* $R_1 = 1м$.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Кинетическая энергия – это качественная характеристика механического движения точки и механической системы, твердого тела.

Кинетическая энергия механической системы будет определяться по формуле:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m V_C^2 + T_C^r},$$

где $m = \sum m_k$ - масса механической системы;

V_C - скорость центра масс при поступательном движении системы;

T_C^r - сумма кинетических энергий каждой материальной точки в относительном движении, по отношению к центру масс *C*.

В общем случае для механической системы $T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k V_k^2$, где $\bar{V}_k$ - абсолютная скорость *k* – ой точки;

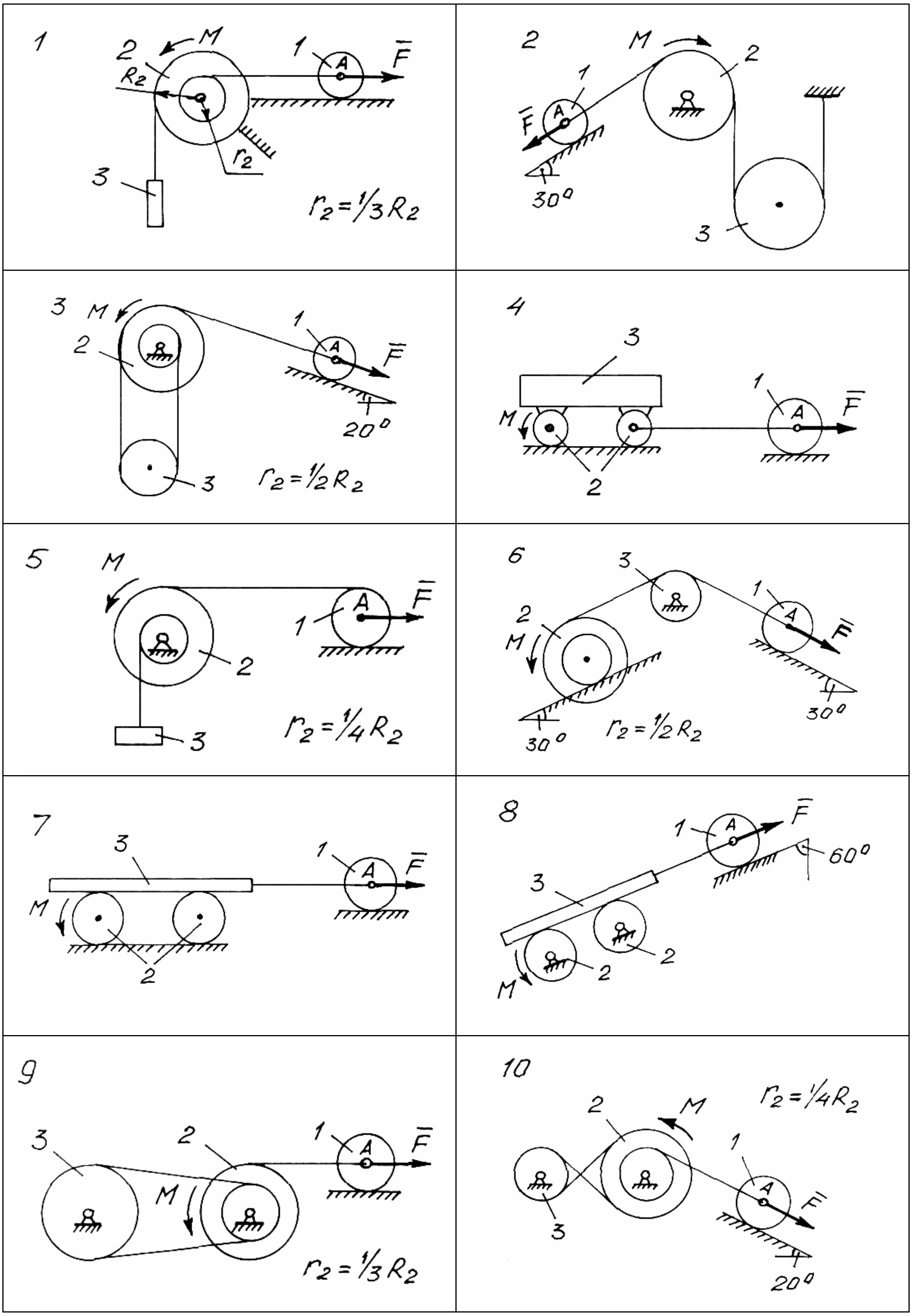

1
r2 = 1/3 R2
2
30°
3
20°
r2 = 1/2 R2
4
5
r2 = 1/4 R2
6
30°
30°
r2 = 1/2 R2
7
8
60°
9
r2 = 1/3 R2
10
r2 = 1/4 R2
20°

Рис. 123

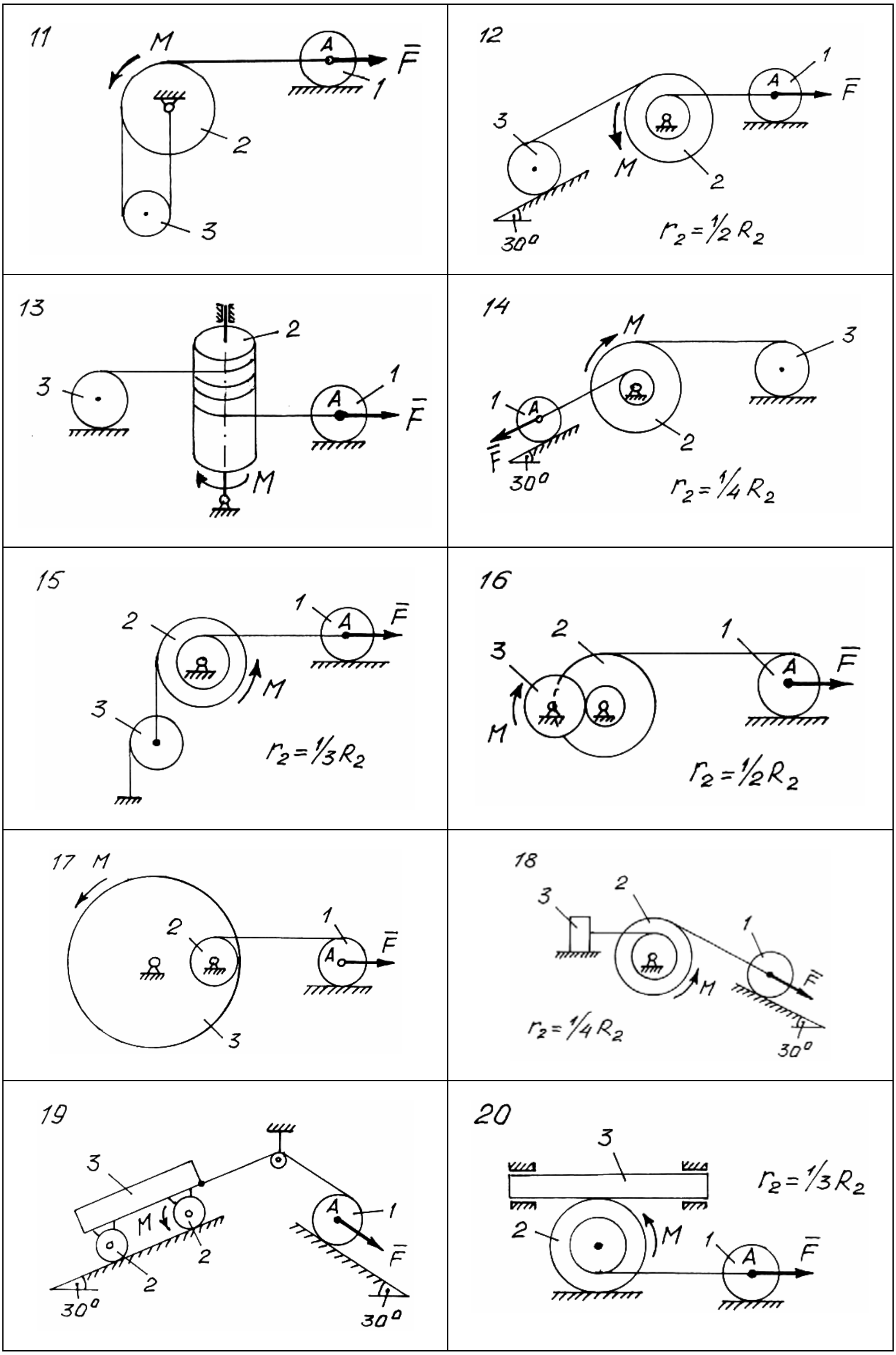

11
M
A
F
1
2
3
12
A
1
F
3
M
2
30°
r2 = 1/2 R2
13
2
3
A
1
F
M
14
M
3
1
A
F
30°
2
r2 = 1/4 R2
15
1
A
F
2
M
3
r2 = 1/3 R2
16
2
1
3
A
F
M
r2 = 1/2 R2
17 M
1
2
F
A
3
18
3
2
1
F
M
r2 = 1/4 R2
30°
19
3
M
A
1
2
F
30°
20
3
r2 = 1/3 R2
2
M
1
A
F

Рис. 124

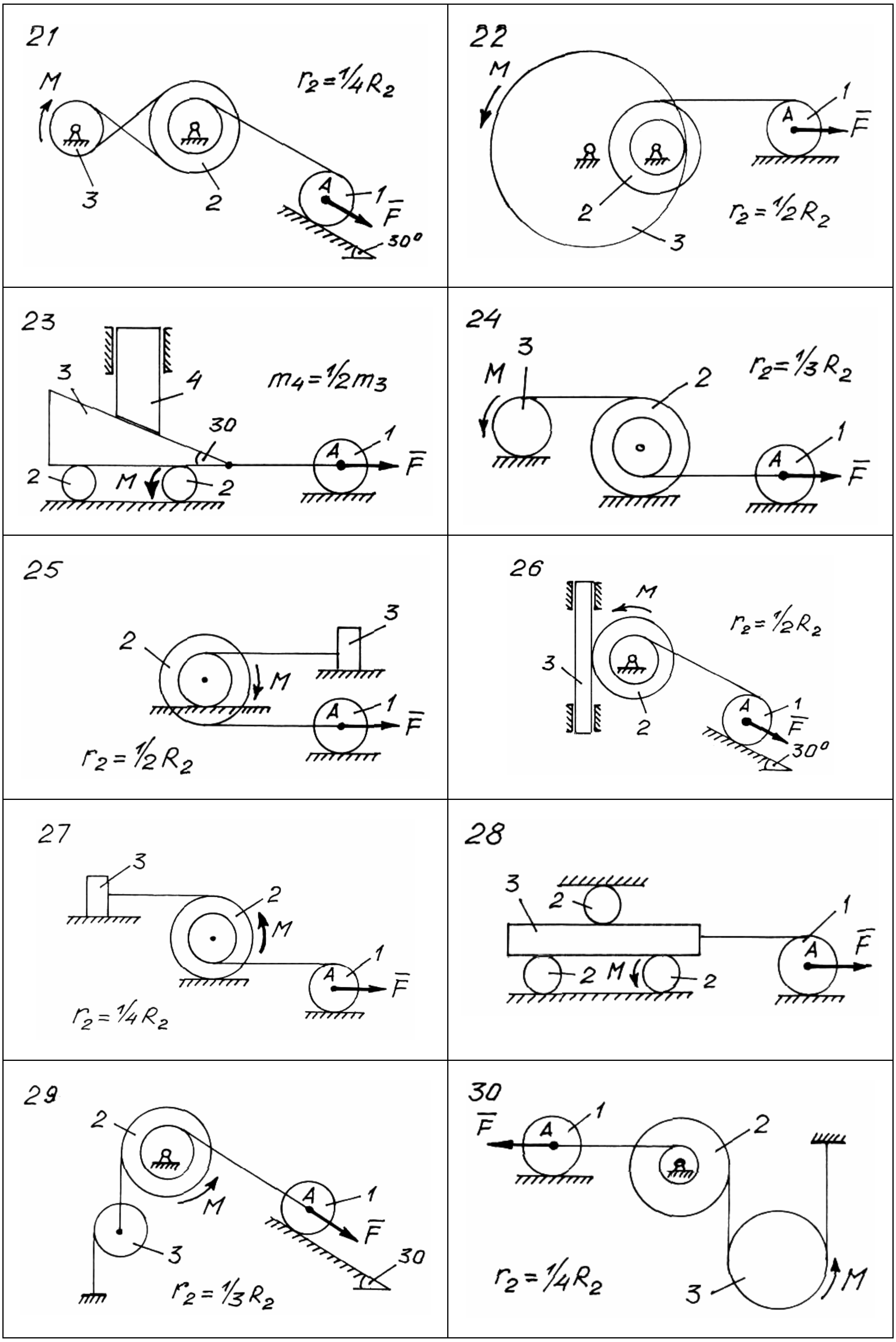

21
M
$r_2 = 1/4 R_2$
3
2
A
1
F
30°
22
M
A
1
F
2
$r_2 = 1/2 R_2$
3
23
3
4
$m_4 = 1/2 m_3$
30
A
1
F
2
M
2
24
3
M
2
$r_2 = 1/3 R_2$
A
1
F
25
3
2
M
A
1
F
$r_2 = 1/2 R_2$
26
M
$r_2 = 1/2 R_2$
3
A
1
F
2
30°
27
3
2
M
A
1
F
$r_2 = 1/4 R_2$
28
3
2
1
A
F
2
M
2
29
2
A
1
M
F
3
30
$r_2 = 1/3 R_2$
30
F
A
1
2
$r_2 = 1/4 R_2$
3
M

Рис. 125

Таблица 12

Номер варианта (рис.123 –125)	m_1	m_2	m_3	R_2	R_3	ρ_2	F	M
	кг	*кг*	*кг*	*м*	*м*	*м*	*Н*	*Нм*
1	8	10	2	0,6	-	0,4	19	2
2	6	8	16	0,5	0,8	-	16	3
3	5	6	2	0,8	-	0,6	18	2
4	4	6	8	0,4	-	-	12	1
5	8	10	4	0,8	-	0,6	14	2
6	6	10	6	0,8	0,6	0,5	15	1
7	10	8	12	0,6	-	-	18	2
8	8	6	10	0,5	-	-	20	2
9	6	10	8	0,9	0,8	0,4	16	1
10	8	10	4	0,8	0,4	0,6	18	2
11	10	12	5	0,6	-	-	15	1
12	8	12	6	0,8	0,4	0,5	17	2
13	10	12	6	0,6	0,5	-	12	1
14	8	10	5	0,8	0,6	0,4	15	2
15	10	12	6	0,9	0,5	0,4	16	2
16	8	12	4	0,8	0,6	0,5	13	1
17	6	4	10	0,8	1,6	-	14	2
18	10	12	6	0,8	-	0,6	13	1
19	10	6	8	0,5	-	-	16	2
20	8	12	6	0,9	-	0,5	15	1
21	10	12	8	0,8	0,5	0,6	17	2
22	8	10	12	0,8	1,2	0,6	16	1
23	10	4	8	0,6	-	-	14	2
24	8	12	10	0,9	0,5	0,4	15	1
25	10	12	4	0,8	-	0,5	16	2
26	8	10	6	0,8	-	0,6	12	1
27	10	12	6	1,2	-	0,5	14	2
28	8	4	6	0,6	-	-	15	1
29	10	12	4	0,9	0,6	0,8	16	2
30	10	12	6	1,2	0,5	0,6	17	2

m_k - масса точки;

$\frac{1}{2}m_k V_k^2$ - кинетическая энергия точки.

<u>*1. Вычисление кинетической энергии твердого тела*</u>

а) Пусть твердое тело *(σ)* (рис. 126) находится в поступательном движении. Выделяем элементарную массу *dm*, которая будет иметь скорость $\bar{V}$.

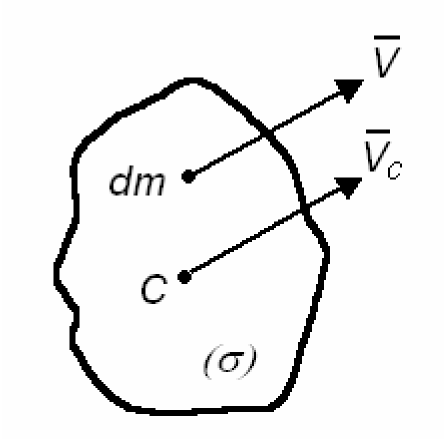


Рис. 126

Кинетическая энергия элементарной массы $dT = \frac{1}{2}dm \cdot V^2$.

Так как при поступательном движении $\bar{V} = \bar{V}_C$, то кинетическая энергия тела (σ) будет

$$T = \int\limits_{(v)} dT = \frac{1}{2}V_C^2 \int\limits_{(v)} dm = \frac{1}{2}mV_C^2 .$$

При поступательном движении тела (σ) кинетическую энергию всегда надо вычислять по формуле (1):

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mV_C^2} \quad , \qquad (1)$$

где $\overline{V}_C$ - скорость центра масс тела (σ).

б) Рассмотрим вращение тела (σ) (рис. 127) вокруг неподвижной оси *Oz.*

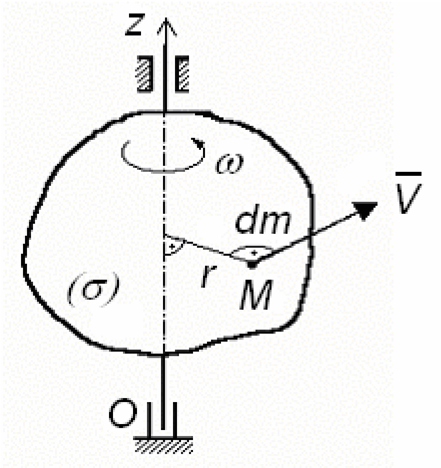


Рис. 127

Элементарная масса *dm* будет иметь скорость $V = \omega \cdot r$. Кинетическая энергия этой массы $dT = 1/2 dm \cdot V^2 = 1/2 \omega^2 \cdot dm \cdot r^2$. Для тела ($\sigma$) будем иметь $T = \int\limits_{(v)} dT = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot \int\limits_{(v)} r^2 \cdot dm$. Но $\int\limits_{(v)} r^2 \cdot dm = I_{Oz}$

– момент инерции тела (σ) относительно оси вращения *Oz*.

Окончательно запишем формулу для вычисления кинетической энергии тела (σ) при его вращении вокруг неподвижной оси *Oz*:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega^2}\quad , \qquad (2)$$

где ω - угловая скорость вращения тела.

в) При плоском движении фигуры (σ) (рис. 128) кинетическая энергия вычисляется по формуле (3):

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2}\quad , \qquad (3)$$

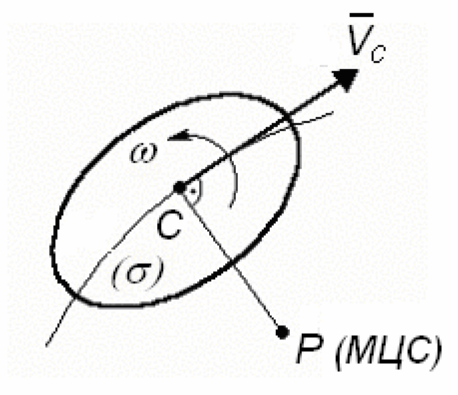


Рис. 128

где $\dfrac{1}{2}mV_C^2$ - кинетическая энергия поступательного движения фигуры вместе с центром масс *C*;

$\dfrac{1}{2}I_C\omega^2$ - кинетическая энергия вращательного движения фигуры относительно центра масс.

Пусть точка *P* – мгновенный центр скоростей фигуры (σ) в данный момент времени. Тогда $V_C = \omega \cdot PC$ подставим в формулу (3) и получим:

$$T = \frac{1}{2}m\omega^2 PC^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}(mPC^2 + I_C)\cdot\omega^2.$$

Но по теореме Гюйгенса - Штейнера $(I_C + mPC^2) = I_P$ - момент инерции фигуры относительно *МЦС*. Тогда формула (3) приобретает новый вид:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I_P\omega^2} \quad . \tag{4}$$

Вычислять кинетическую энергию при плоском движении фигуры (σ) можно по формуле (3) или по формуле (4).

Пример

Сплошной однородный диск массой *m* катится по поверхности без скольжения (рис. 129) со скоростью V_C.

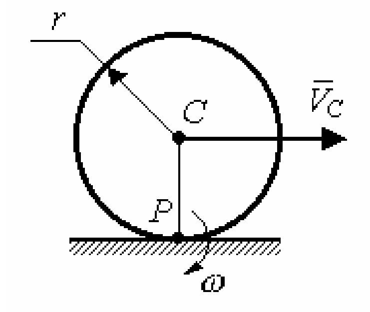


Рис. 129

Вычислим кинетическую энергию диска по формуле (4). По теореме Гюйгенса - Штейнера $I_P = I_C + mr^2 = 1/2mr^2 + mr^2 = 3/2mr^2$. Тогда

$$\boxed{T = \frac{3}{4} m V_C^2} \quad . \qquad (5)$$

Формулу (5) можно применять при решении задач для сплошных однородных дисков.

2. Теорема об изменении кинетической энергии

Запишем основное уравнение динамики для *k* – ой материальной точки:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \qquad (k = \overline{1,n}).$$

Ускорение $$\bar{a}_k = \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{d\bar{r}_k}{d\bar{r}_k} = \bar{V}_k \cdot \frac{d\bar{V}_k}{d\bar{r}_k}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{V}_k d\bar{V}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k,$$

где $\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{V}_k d\bar{V}_k = d(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k V_k^2) = dT$;

$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k = dA^e$ - элементарная работа внешних сил;

$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k = dA^i$ - элементарная работа внутренних сил.

Тогда $dT = dA^e + dA^i$.

Разделим полученное равенство на *dt* и окончательно получим:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = W^e + W^i}, \tag{6}$$

где $\frac{dA^e}{dt} = W^e$ - мощность внешних сил;

$\frac{dA^i}{dt} = W^i$ - мощность внутренних сил.

Мощность силы $\bar{F}$ есть скалярное произведение вектора силы на вектор скорости точки приложения силы:

$$W = \bar{F} \cdot \bar{V}; \qquad W = F \cdot V \cdot \cos(\bar{F};\bar{V}).$$

Мощность от момента пары сил определяется по формуле $W = M_z \cdot \omega_z$.

Равенство (6) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

Первый интеграл дифференциального уравнения (6) будет иметь вид:

$$\boxed{T - T_o = \sum^{n} A_k^e + \sum^{n} A_k^i}, \tag{7}$$

где $T = \sum_{k=1}^{n} T_k$ - кинетическая энергия механической системы в любой момент времени;

T_o - кинетическая энергия в начальный момент времени;

$\sum_{k=1}^{n} A_k^e$; $\sum_{k=1}^{n} A_k^i$ - суммы работ внешних и внутренних сил на перемещении точки или тела.

Применяя теорему в виде (6), мы всегда можем определить ускорение точки или угловое ускорение тела. Используя теорему в форме (7), мы находим скорость точки в зависимости от ее перемещения или угловую скорость тела в зависимости от угла его поворота.

Пример решения задачи

Механическая система (рис. 130), состоящая из четырех тел и нерастяжимых нитей, перемещается под действием силы $\bar{F}$, приложенной к телу *1* в центре масс (точка *A*). При этом тело *1* катится без скольжения по наклонной плоскости, а тело *4* скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Момент сопротивления М приложен к двухступенчатому шкиву *2*, который, при помощи зубчатого зацепления в точке *B*, может перемещать по вертикали рейку *3*. Трение в направляющих рейки отсутствует.

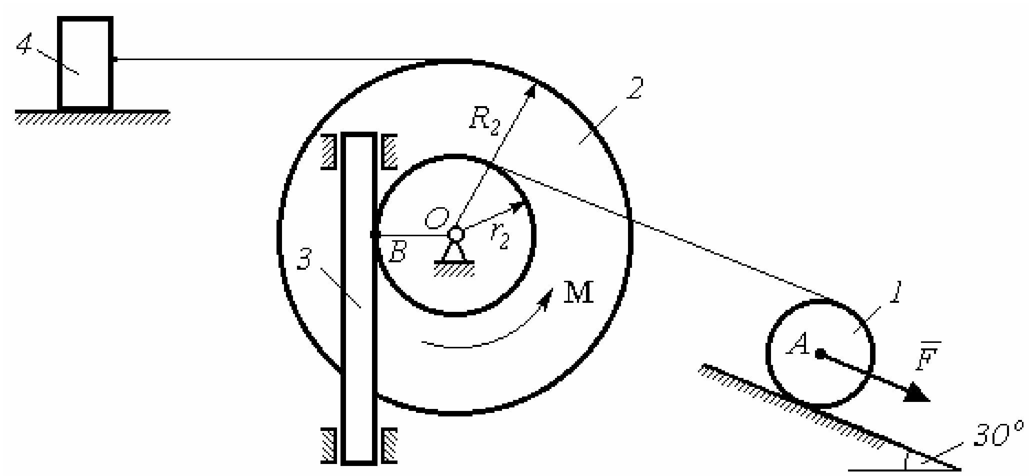


Рис. 130

<u>Заданы</u> следующие величины: $m_1 = 10$ *кг;* $m_2 = 6$ *кг;* $m_3 = 4$ *кг;* $m_4 = 2$ *кг* – массы твердых тел; $R_2 = 0{,}8$ *м;* $r_2 = 0{,}2$ *м;* $\rho_2 = 0{,}6$ *м* – большой, малый радиусы и радиус инерции шкива *2*; $R_1 = 0{,}4$ *м* – радиус катка *1*; момент сопротивления М = *2 Нм*; движущая сила $F = 150$ *Н*; $g = 9{,}8$ *м/с*^{2} – ускорение свободного падения.

<u>Определить:</u> ускорение точки *A* $(\bar{a}_A)$.

Решение.

Изображаем расчетную схему (рис. 131), на которой показываем кинематическую связь между телами и все действующие силы в механической системе.

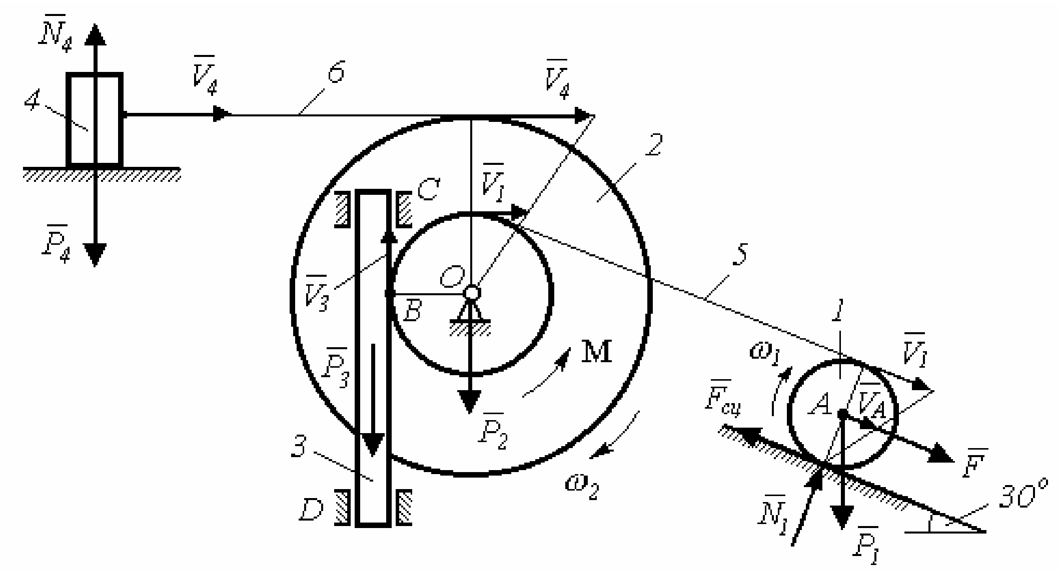


Рис. 131

Пользуясь схемой рис. 131 запишем кинематические соотношения, выразив скорости всех тел через скорость $\bar{V}_A$:

$$V_1 = 2V_A;\ \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{8V_A}{R_2};\ V_4 = \omega_2 R_2 = 8V_A;\ V_3 = V_1 = 2V_A;\ \omega_1 = \frac{V_A}{R_1}.$$

Согласно теореме (6) $\dfrac{dT}{dt} = W^e \quad (W^i = 0)$, вычисляем кинетическую энергию механической системы через скорость V_A.

$$T = \sum_{k=1} T_k = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Здесь $T_1 = \frac{3}{4} m_1 V_A^2$ - формула (5) для плоского движения катка *1*;

$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$ - формула (2) для вращения тела вокруг неподвижной оси. При $I_2 = m_2 \rho_2^2$ - момент инерции тела *2*, получаем

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2 \frac{64 V_A^2}{R_2^2} = 32 m_2 (\frac{\rho_2}{R_2})^2 V_A^2 .$$

$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2$ - формула (1) для поступательного движения тела *3*;

$$T_3 = 2 m_3 V_A^2 ; \quad T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2 = \frac{1}{2} m_4 64 V_A^2 = 32 m_4 V_A^2 .$$

Окончательно получаем

$$T = \left[\frac{3}{4} m_1 + 32 m_2 \left(\frac{\rho_2}{R_2} \right)^2 + 2 m_3 + 32 m_4 \right] V_A^2 .$$

При известных величинах

$$T = \left[\frac{3}{4} \cdot 10 + 32 \cdot 6 \cdot \left(\frac{0{,}6}{0{,}8} \right)^2 + 2 \cdot 4 + 32 \cdot 2 \right] V_A^2 \text{ или } T = 187{,}5 V_A^2 \text{ и}$$

$$\frac{dT}{dt} = 375 V_A a_A .$$

Вычисляем мощность всех внешних сил:

$$W^e = F V_A + P_1 \cos 60^o V_A - M \omega_2 - P_3 V_3 = (F + m_1 g \cos 60^o - \frac{M8}{R_2} - m_3 g 2) V_A .$$

При заданных величинах

$$W^e = (150 + 10 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 - \frac{8 \cdot 2}{0{,}8} - 4 \cdot 9{,}8 \cdot 2) \cdot V_A = 100{,}6 \cdot V_A \text{ (вт)}.$$

Тогда $375 V_A a_A = 100{,}6 V_A$. Окончательно получаем

$$a_A = \frac{100{,}6}{375} \cong 0{,}27 м / c^2 .$$