Кинематика

Задача К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M найти уравнение ее траектории, положение точки для момента времени $t_o = 0$ и t_1, вычислить скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, радиус кривизны траектории только для t_1. Описать характер движения точки.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 4.

Примечание. 1. При выполнении задачи рисунки для скорости и ускорения точки делать отдельно.

2. Для определения траектории точки следует использовать формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

В кинематике точки будем рассматривать три способа задания движения точки (рис. 67): $\bar{r} = \bar{r}(t)$ - векторный; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – координатный; $S = S(t)$ – естественный.

Траектория точки – это след движения точки в пространстве. Чтобы найти уравнение траектории точки, нужно в уравнениях ее движения исключить параметр времени (t).

Например, пусть $x = a \cdot \sin(kt)$, $y = a \cdot \cos(kt)$, где $\{a, b, k\}$ = const.

Применяем тригонометрическую формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Тогда $\sin(kt) = x/a$, $\cos(kt) = y/b$ и $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – точка перемещается по эллипсу.

Прямоугольная декартовая система координат $XOYZ$, связанная с землей, называется инерциальной системой отсчета (ИСО), а $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ - орты этих осей (единичные векторы).

Таблица 4

Номер варианта	Уравнения движения точки		t_1, с
	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	
1	$3 - 2t^2$	$-6t$	1
2	$2t$	$4t^2 - 2t + 1$	0,5
3	$2\sin(\pi \cdot t/3)$	$4\cos(\pi \cdot t/3)$	1
4	$2\sin(\pi \cdot t/6)$	$-3\cos(\pi \cdot t/6) + 4$	1
5	$3t^2 + 2$	$-4t$	0,5
6	$0{,}5\,e^t$	$3\,e^{-t}$	0,5
7	$-3\cos(\pi \cdot t/4) + 3$	$2\sin(\pi \cdot t/4) - 1$	1
8	$3\,t$	$4 - 9t^2$	1
9	$3\cos(\pi t)$	$\sin(\pi t)$	1/3
10	$2t^2$	$4t$	1
11	$-5/(t + 2)$	$3t + 6$	0,5
12	$5t + 5$	$-4/(t + 1)$	0,5
13	$3t/\pi$	$2\sin(t + 2)$	1
14	$2\sin(\pi \cdot t/3)$	$4 + 4\cos(\pi \cdot t/3)$	0,5
15	$4t^2$	$2t^3$	1
16	$2\sin(\pi t) - 2$	$2\cos(\pi t)$	1/6
17	$2\cos(\pi t)$	$3\sin(\pi t)$	1/3
18	$t^2 - 1$	$\sqrt{t}$	4
19	$2\sin(\pi \cdot t/3)$	$-3\cos(\pi \cdot t/3) + 4$	1
20	$-2\sin(\pi \cdot t/6)$	$3\cos(\pi \cdot t/6)$	1
21	$2\sqrt{t}$	$4t^2 - 2$	1
22	$1/2 \cdot (t - 3)^2$	$\sqrt{t}$	1
23	$2\sin(\pi t) - 2$	$3\cos(\pi t)$	1/4
24	$3\sqrt{t}$	$4t^2 + 1$	1
25	$-6\sqrt{t}$	$-2t^2 - 4$	1
26	$2e^{3t}$	$2{,}4\,e^{-3t}$	1/6
27	$4\cos(2\pi t)$	$4\sin(2\pi t)$	1/6
28	$2e^{2t}$	$3e^t$	1/4
29	$4t + 2$	$3/(1 + t)$	1
30	$2t^2$	$\sqrt{(t+1)}$	1

Оси τMnb, связанные с точкой М, называются естественные оси координат. $M\tau$ - касательная ось, Mn – нормальная ось. Эта ось направлена к центру кривизны траектории. Mb – бинормальная ось. Между осями координат прямой угол и они перемещаются вместе с точкой М, поэтому такая система координат называется неинерциальной. $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ и $\bar{b}$ - орты естественных осей координат.

Вектор скорости точки:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k} = v_\tau \cdot \bar{\tau};$$

где $v_x = \dot{x}$; $v_y = \dot{y}$; $v_z = \dot{z}$; $v_\tau = \dot{S}$.

v_x, v_y и v_z – проекции $\bar{v}$ на оси координат; v_τ – проекция $\bar{v}$ на касательную ось.

Модуль вектора скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Направление вектора $\bar{v}$:

$$\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{i}}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{j}}) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}) = \frac{v_z}{v}.$$

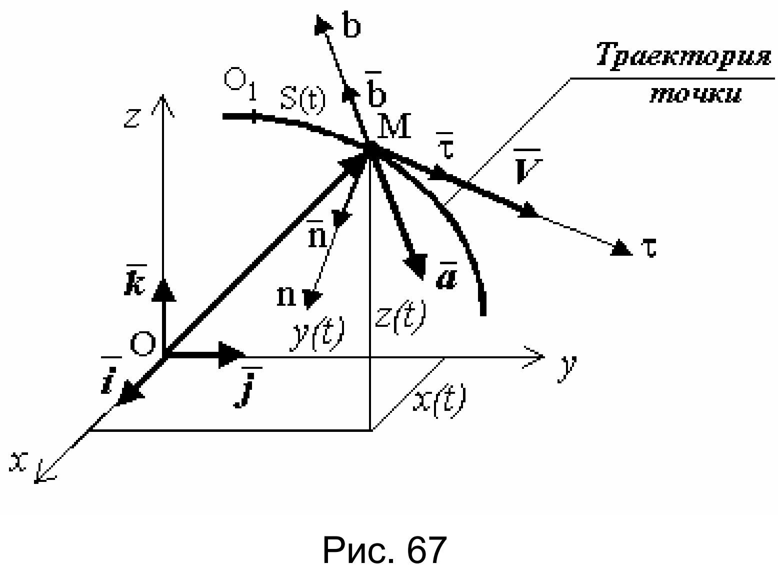


Рис. 67

Вектор $\bar{v}$ в данной точке всегда направлен по касательной к траектории в сторону движения.

Вектор $\overline{a}$ в декартовой системе координат:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k};$$

где $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$; $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$; $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$ – проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат.

Модуль вектора ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора $\overline{a}$: $\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{i}}) = \frac{a_x}{a}$; $\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{j}}) = \frac{a_y}{a}$; $\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{k}}) = \frac{a_z}{a}$.

Вектор ускорения $\overline{a}$ в естественных осях координат:

$$\overline{a} = a_\tau \cdot \overline{\tau} + a_n \cdot \overline{n};$$

где $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}$ - касательное ускорение;

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ - нормальное ускорение; ρ - радиус кривизны траектории в данной точке кривой.

Модуль вектора $\overline{a}$: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Если движение точки ускоренное, то $\overline{v} \cdot \overline{a} > 0$, если движение замедленное, то $\overline{v} \cdot \overline{a} < 0$. Если $|a_\tau|$ = *const*, то движение точки равнопеременное. При $|\overline{v}|$ = *const* – движение точки равномерное.

Пример решения задачи

Исходные данные: $x = 2t^2 - 1$ *(м);* $y = \dfrac{1}{2}t^4 + 1$ *(м);* $t_1 = 1$ *с.*

Решение

1)Определяем уравнение траектории точки.

В уравнениях движения исключаем параметр t. Из уравнения $x = x(t)$ находим $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ и подставляем в уравнение $y = y(t)$. Тогда

$$y = \frac{1}{8}(x+1)^2 + 1$$ – уравнение траектории парабола.

2) Построение графика полученной кривой.

Вычисляем координаты трех точек кривой для моментов времени: $t_0 = 0$; $x_0 = -1м$; $y_0 = 1м$; $t_1 = 1с$; $x_1 = 1м$; $y_1 = 1{,}5м$; $t_2 = 1{,}5с$; $x_2 = 3{,}5м$; $y_2 = 3{,}53м$. В любом выбранном масштабе, например $\mu_l = 0{,}1\dfrac{м}{мм}$, строим график (рис. 68) кривой $y = 1/8(x + 1)^2 + 1$.

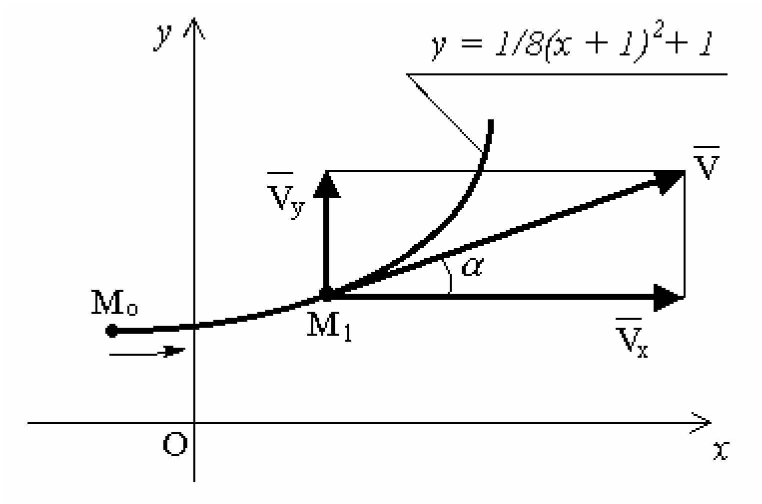


Рис. 68

3)Вычисляем скорости точки.

Проекции скорости на оси координат: $v_x = \dot{x} = 4t$; $v_y = \dot{y} = 2t^3$

$v_x(t_1) = 4 \cdot 1 = 4$ *м/с,* $v_y(t_1) = 2 \cdot 1 = 2$ *м/с.*

Модуль скорости $\overline{v}$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2t\sqrt{4+t^4}\,,\;\; v(t_1)=\sqrt{20}=4,47\,м/с.$$

Векторы $\overline{v}_x=v_x\overline{i}$, $\overline{v}_y=v_y\overline{j}$ и $\overline{v}$ показываем в точке M_1 кривой

рис. 68 в масштабе $\mu_v=0,1\dfrac{м}{с\cdot мм}$.

Направление вектора $\overline{v}$: $\cos\alpha=\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{4}{4,47}=0,895$. Угол $\alpha\cong 26,5^{o}$.

4) Вычисление ускорения точки.

Проекции ускорения на оси координат $a_x=\dot v_x=4$; $a_y=\dot v_y=6t^2$.

$a_x(t_1)=4\,м/с^2$; $a_y(t_1)=6\,м/с^2$.

Модуль ускорения $\overline{a}$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=2\sqrt{4+9t^4}\,;\;\; a(t_1)=\sqrt{52}=7,21\,м/с^2.$$

Направление вектора $\overline{a}$ $\quad\cos\beta=\dfrac{a_x}{a}=\dfrac{4}{7,21}=0,5547$,

угол $\beta=56,31^0$.

Вычисление касательного ускорения.

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{v_xa_x+v_ya_y+v_za_z}{v}=\frac{4\cdot4+2\cdot6}{4,47}=6,26\,м/с^2.$$

Вычисление нормального ускорения.

Из формулы $a^2=a^2{}_n+a^2{}_\tau$ находим

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{7,21^2-6,26^2}=3,57\,м/с^2.$$

Радиус кривизны траектории в точке M_1.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4,47^2}{3,57} = 5,6\,м.$$

Векторы $\bar{a}_x = a_x\bar{i}$, $\bar{a}_y = a_y\bar{j}$, $\bar{a}$, $\bar{a}_\tau$, $\bar{a}_n$ показываем в точке M_1 на графике рис. 69 в масштабе $\mu_a = 0,1\frac{м}{с^2 \cdot мм}$.

5) Характер движения точки.

Точка М перемещается по плоской траектории y = 1/8(x + 1)^2 + 1 вправо от точки M_o. Перемещение точки ускоренное, так как $\bar{v} \cdot \bar{a} > 0$, или вектор скорости $\bar{v}$ по направлению совпадает с вектором касательного ускорения $\bar{a}_\tau$. Скорость точки меняется по закону $v = 2t\sqrt{4 + t^4}$, а ускорение - $a = 2\sqrt{4 + 9t^4}$. Скорость точки в начальный момент времени t_o = 0, v_o = 0, а ускорение a_o = 4$м/с^2$.

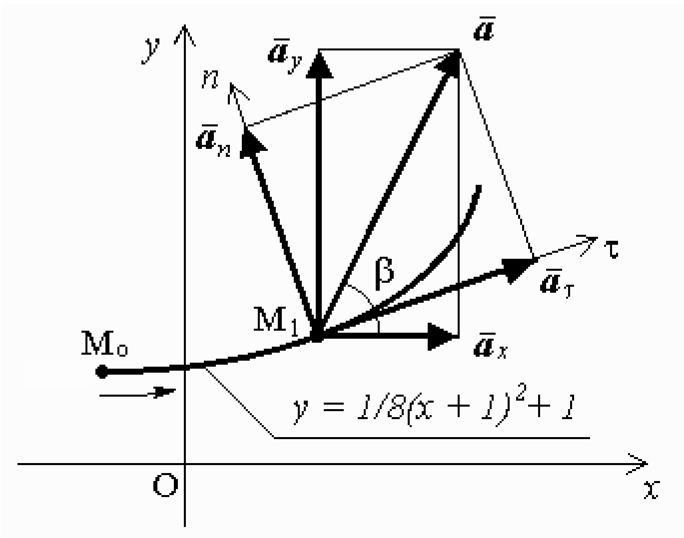


Рис. 69

Задача К.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

На рис 71-73 показаны передаточные механизмы. Для некоторых тел заданы уравнения движения: x = x(t) или $\varphi = \varphi(t)$. Для других тел задаются кинематические параметры: v = v(t) – скорость движения; $\omega = \omega(t)$ – угловая скорость вращения; a, ε – постоянное линейное ускорение или постоянное угловое ускорение.

При начальных условиях (x_o; φ_o; v_o; ω_o) = 0 определить скорость и ускорение точки М в конце пройденного пути *S* телом 1 или точки, лежащей на ободе ведущего колеса.

Необходимые данные для расчета всех вариантов приведены в таблице 5.

1. *Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси*

При вращательном движении (рис. 70) все точки тела (σ) перемещаются по концентрическим окружностям, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси Oz.

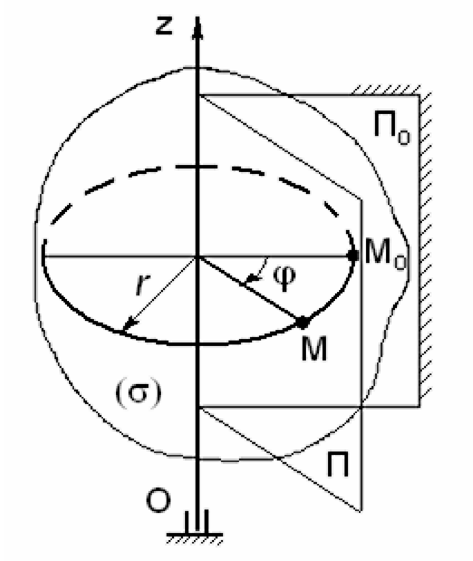


Рис. 70

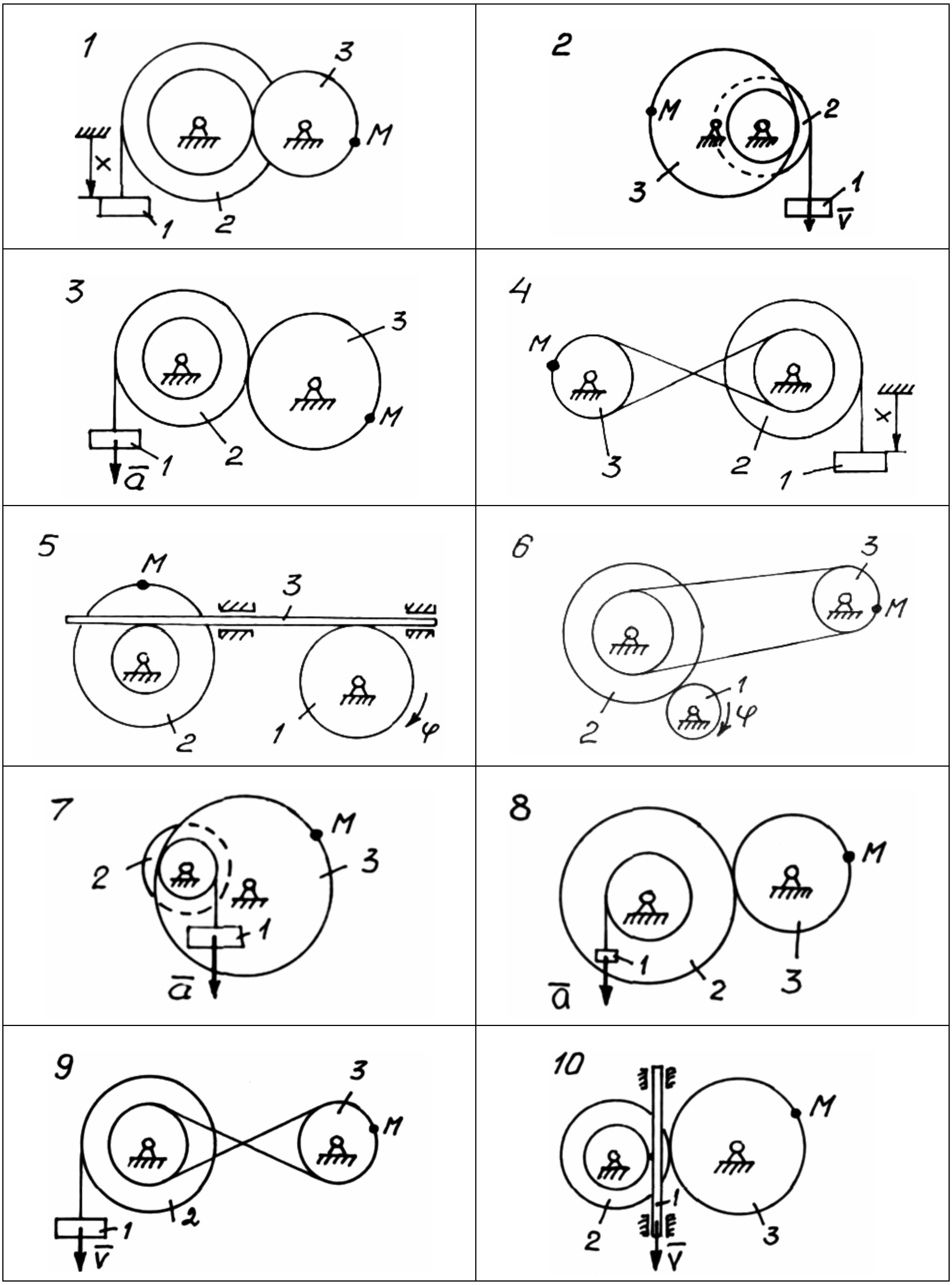

1
3
M
x
1
2
2
M
2
3
1
V
3
3
M
1
a
2
4
M
x
3
2
1
5
M
3
2
1
φ
6
3
M
1
φ
2
7
M
2
3
1
a
8
M
1
2
3
a
9
3
M
1
2
V
10
M
1
2
3
V

Рис. 71

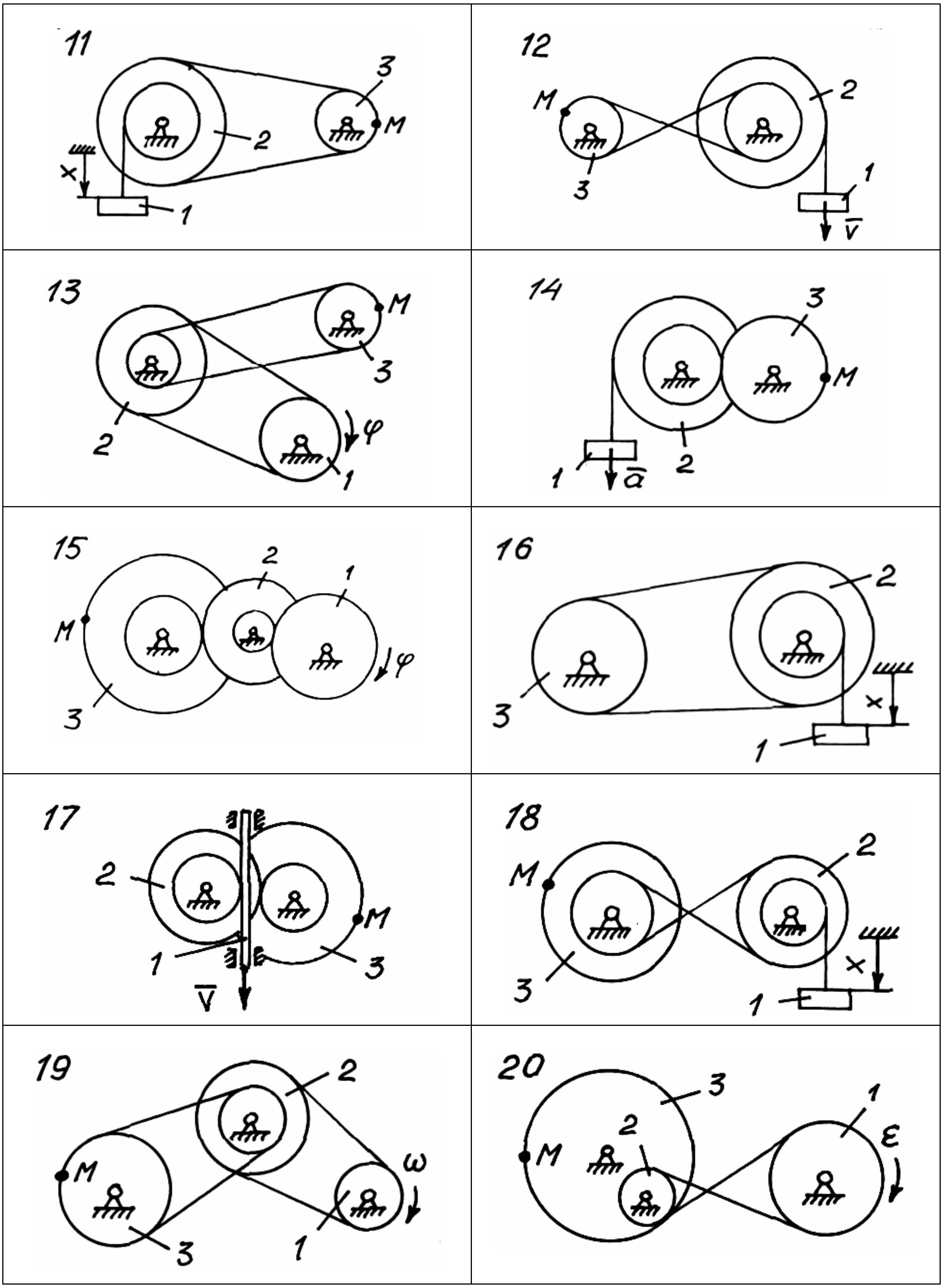

11
3
M
2
x
1
12
M
2
1
3
V
13
M
3
2
φ
1
14
3
M
1
a
2
15
2
1
M
φ
3
16
2
x
3
1
17
2
M
1
3
V
18
M
2
x
3
1
19
2
M
ω
3
1
20
3
1
2
M
ε

Рис. 72

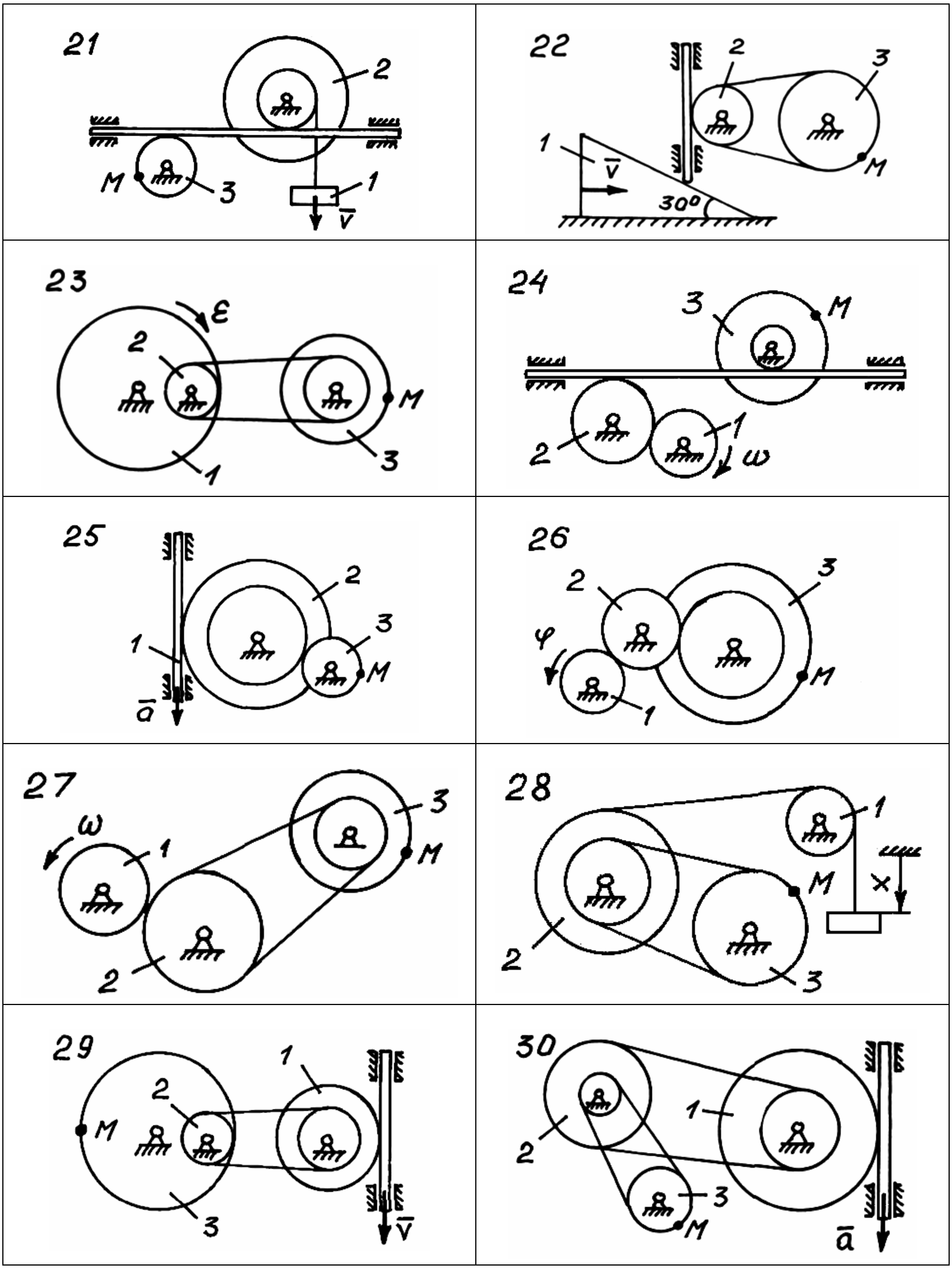

21
2
M
3
1
$\bar{v}$
22
2
3
1
$\bar{v}$
M
30°
23
ε
2
M
1
3
24
3
M
2
1
ω
25
2
3
1
M
$\bar{a}$
26
2
3
φ
M
1
27
ω
3
1
M
2
28
1
M
x
2
3
29
1
2
M
3
$\bar{v}$
30
1
2
3
M
$\bar{a}$

Рис. 73

Таблица 5

Номер варианта (рис.71-73)	r_1	R_1	r_2	R_2	r_3	R_3	S	x, м φ, рад	v,м/с ω,$с^{-1}$	a,м/$с^2$ ε, $с^{-2}$
	м									
1	–	–	0,4	1,2	0,8	–	0,4	$0{,}2+t^2$	–	–
2	–	–	0,5	1,5	2	–	0,2	–	0,4t	–
3	–	–	0,2	1,2	0,9	–	0,6	–	–	4
4	–	–	0,6	1,8	0,5	–	0,3	$0{,}1+t^2$	–	–
5	0,6	–	0,8	1,4	–	–	0,5	$0{,}8+1{,}2t^2$	–	–
6	0,5	–	0,4	1,2	0,6	–	0,8	$2{,}4t^2$	–	–
7	–	–	0,8	1,8	2	–	1,2	–	–	3
8	–	–	0,5	1,5	0,8	–	0,6	–	–	5
9	–	–	0,6	1,8	0,5	–	1,4	–	0,6t	–
10	–	–	0,8	2,4	0,9	–	1,0	–	1,2t	–
11	–	–	0,5	1,4	1,2	–	1,2	$0{,}5+1{,}6t^2$	–	–
12	–	–	0,8	1,2	1,4	–	0,8	–	0,8t	–
13	0,8	–	0,9	1,8	1,2	–	0,6	$0{,}8t^2$	–	–
14	–	–	1,2	1,9	1,5	–	0,5	–	–	1,8
15	0,9	–	0,4	1,2	0,8	1,6	0,4	$1{,}2t^2$	–	–
16	–	–	0,8	2,2	1,2	–	0,8	$0{,}5+t^2$	–	–
17	–	–	0,5	1,2	0,8	1,8	0,6	–	1,2t	–
18	–	–	0,4	0,9	0,6	1,2	0,4	$0{,}8+1{,}2t^2$	–	–
19	0,6	–	0,8	1,4	1,8	–	1,2	–	0,8t	–
20	1,2	–	0,4	–	2,4	–	0,5	–	–	2
21	–	–	0,6	2,4	0,8	–	0,8	–	1,5t	–
22	–	–	0,8	–	1,4	–	0,4	–	t	–
23	1,2	–	0,4	–	1,5	2	0,6	–	–	1,6
24	0,4	–	0,8	–	1,2	2	0,8	–	1,2t	–
25	–	–	0,6	2	0,8	–	1,2	–	–	2,5
26	0,8	–	1,4	–	1,2	2	0,4	$0{,}8+1{,}2t^2$	–	–
27	0,5	–	1,5	–	0,8	1,2	0,6	–	0,8t	–
28	0,4	–	0,6	1,2	0,5	–	0,5	$2t^2$	–	–
29	0,8	1,2	0,5	–	1,6	–	0,8	–	1,4t	–
30	0,4	1,4	0,6	1,2	0,8	–	1,2	–	–	4

Возьмем вертикальную плоскость $П_O$, которая будет неподвижной и проходящей через ось Oz. Относительно плоскости $П_O$ будем рассматривать поворот плоскости П, связанной с телом (σ), на угол φ. Этот угол φ будет изменяться с течением времени.

Тогда φ = φ(t) – есть уравнение вращения тела (σ) относительно неподвижной оси Oz.

Количество оборотов N и угол поворота тела φ в радианах связаны формулой φ = 2πN.

Средняя угловая скорость вращения тела определяется отношением приращения угла к бесконечно малому промежутку времени

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Мгновенное значение $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

Размерность $[\omega] = \left[\frac{рад}{с}\right] = \left[с^{-1}\right]$.

Среднее значение углового ускорения вращения тела определяется отношением приращения угловой скорости к бесконечно малому промежутку времени

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Мгновенное значение $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

Размерность $[\varepsilon] = \left[\frac{рад}{с^2}\right] = \left[с^{-2}\right]$.

Часто в технике угловую скорость вращения тела измеряют в оборотах/минуту, тогда

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30},$$

где [n] = [об/мин].

Выведем формулы для вычисления скорости и ускорения любой точки тела при его вращательном движении (рис. 74).

Траекторией точки М будет окружность радиуса *r*. Применяем естественный способ задания движения точки

$$S = S(t), \text{ т.е. } \overset{\frown}{M_o M} = S.$$

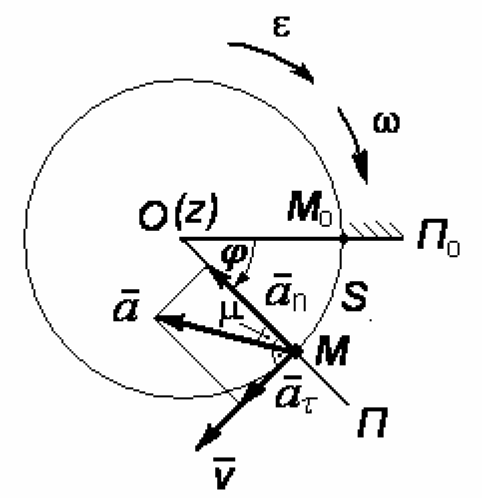


Рис. 74

Скорость точки $v = \dfrac{dS}{dt}$, но $S = \varphi \cdot r$.

Тогда $v = \dfrac{d}{dt}(\varphi \cdot r) = r \cdot \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot r$.

$$\boxed{v = \omega \cdot r} \tag{1}$$

Вектор скорости $\bar{v}$ всегда будет направлен перпендикулярно радиусу *r* в сторону вращения, как показывает ω.

Ускорение точки *M* есть геометрическая сумма двух составляющих – нормального и тангенциального ускорений.

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau, \quad (\bar{a}_n \perp \bar{a}_\tau).$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r\,, \qquad\qquad a_n = \omega^2 \cdot r\,.$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot r) = r\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \cdot r\,, \qquad a_\tau = \varepsilon \cdot r\,.$$

Нормальное ускорение всегда направлено к оси вращения, а тангенциальное – перпендикулярно радиусу окружности.

Тогда $$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (2)$$

Угол наклона ускорения $\bar{a}$ к радиусу r определяется по формуле

$$tg\,\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\,. \qquad (3)$$

Если $\bar{v} \cdot \bar{a}_\tau > 0$ – вращение тела ускоренное, а если $\bar{v} \cdot \bar{a}_\tau < 0$ – замедленное.

1.1 Характеристики вращательного движения тела

а) Равномерное вращение

При равномерном вращении $\omega = const$.

Так как $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то $d\varphi = \omega \cdot dt$.

$\int d\varphi = \omega \int dt + C$, $\varphi = \omega t + C$ – уравнение вращения тела.

б) Равнопеременное вращение

При равнопеременном вращении $\pm\varepsilon = const$.

Можно записать $\dfrac{d\omega}{dt} = \pm\varepsilon$, $d\omega = \pm\varepsilon \cdot dt$.

Изменение угловой скорости вращения $\omega = \omega_o \pm \varepsilon t$.

Но $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, тогда $\int d\varphi = \omega_o \int dt \pm \varepsilon \int t \cdot dt + C$, где $C = \varphi_o$.

Окончательно уравнение вращения тела

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

в) Переменное вращение

При переменном вращении $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Чтобы найти $\varphi = \varphi(t)$, надо знать ε в зависимости от времени t.

1.2 Векторы угловой скорости и углового ускорения. Формула Эйлера[1]

Рассмотрим скорость точки М тела, вращающегося вокруг оси Oz (рис. 75).

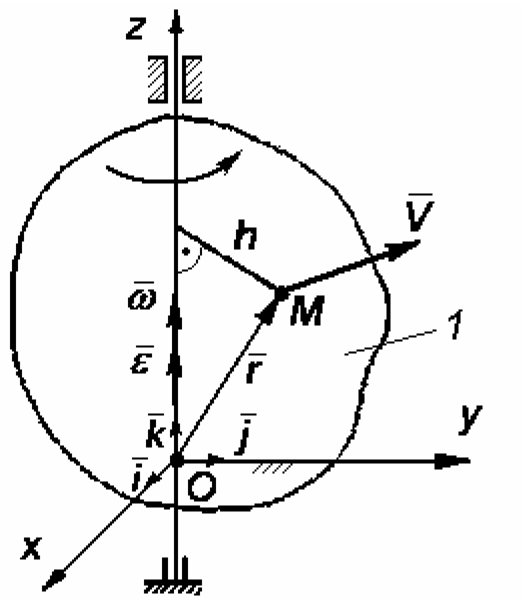


Рис. 75

Воспользуемся прямоугольной системой декартовых осей координат с началом на оси вращения, неизменно связанной с телом 1.

[1] Эйлер Леонард (15.4.1707–18.9.1783). Математик, механик, физик и астроном. Академик Петербургской АН с 1726 г.

Радиус-вектор точки М можно представить в следующем виде

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

При этом координаты x, y, z и вектор $\bar{k}$ не зависят от времени, а вектора $\bar{i}$ и $\bar{j}$ являются функциями времени, так как они вращаются вместе с телом 1.

Тогда $$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt}.$$

Производные $\frac{d\bar{i}}{dt}$ и $\frac{d\bar{j}}{dt}$ являются скоростями точек на концах векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \omega \cdot \bar{j}; \qquad \frac{d\bar{j}}{dt} = -\omega \cdot \bar{i}.$$

Далее $\bar{j} = \bar{k} \times \bar{i}$, $\qquad -\bar{i} = \bar{k} \times \bar{j}$,

следовательно, $\frac{d\bar{i}}{dt} = \omega\bar{k} \times \bar{i}$; $\quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \omega\bar{k} \times \bar{j}$,

где $\omega\bar{k} = \bar{\omega}$ - вектор угловой скорости.

Принимая во внимание, что $\bar{k} \times \bar{k} = 0$, получим

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$$

Модуль скорости $|\bar{v}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}})$, $\; v = \omega \cdot h$.

Определяя угловое ускорение как вектор, характеризующий быстроту изменения вектора угловой скорости, будем иметь

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}.$$

Если $\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\omega} > 0$, то вращение тела *1* ускоренное, а если $\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\omega} < 0$ – вращение тела замедленное.

<u>*1.3 Вектор ускорения точки М*</u>

Ускорение точки М, как вектор, определяется геометрической суммой вектора нормального и вектора тангенциального ускорения.

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau, \qquad (\bar{a}_n \perp \bar{a}_\tau).$$

С другой стороны,

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}\,.$$

Следовательно, $\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v}$ и $\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$.

Модули ускорений:

$$|\,\bar{a}_n\,| = |\,\bar{\omega}\,| \cdot |\,\bar{v}\,| \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}); \qquad a_n = \omega v = \omega^2 h;$$

$$|\,\bar{a}_\tau\,| = |\,\bar{\varepsilon}\,| \cdot |\,\bar{r}\,| \cdot \sin(\widehat{\bar{\varepsilon}, \bar{r}}); \qquad a_\tau = \varepsilon \cdot h\,.$$

2. <u>*Передаточные механизмы*</u>

Передаточный механизм осуществляет передачу вращательного движения от ведущего вала (источника энергии) к ведомому валу (органу рабочей машины) при помощи зубчатых колес, фрикционных зацеплений, цепных и ременных передач, винтовых передач и т.д.

На рис. 76 показана передача вращательного движения при помощи двух фрикционных или зубчатых колес, где *1* ведущее колесо, а *2* – ведомое.

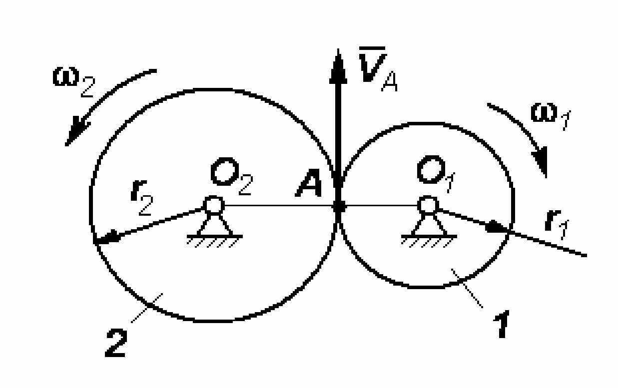


Рис. 76

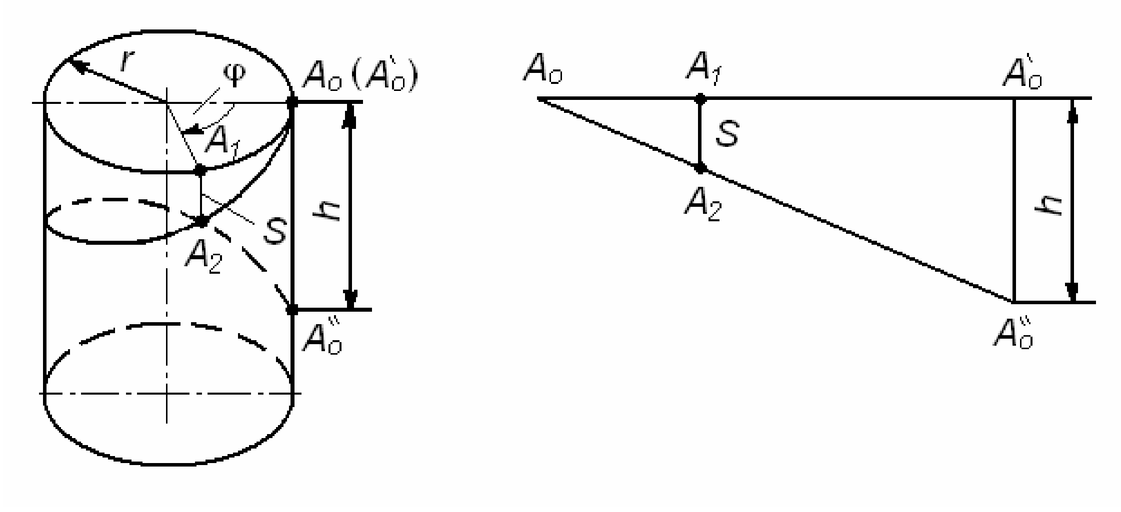
Скорость точки контакта со стороны колеса *1* будет $v_A = \omega_1 \cdot r_1$, а со стороны колеса 2 – $v_A = \omega_2 \cdot r_2$. Тогда $\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$, получаем соотношения

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \qquad (4)$$

где i – называется передаточным числом.

Большое распространение в технике получила передача «винт – гайка», которая преобразует вращательное движение винта в его поступательное движение. Рассмотрим связь между этими двумя видами движения.

На рис. 77а показана цилиндрическая поверхность, на которой изображена винтовая линия, где h – шаг винта.



а) б)

Рис. 77

Угол поворота винта $0 \le \varphi \le 2\pi$, а образующая $0 \le (A_1A_2 = S) \le h$, где r – радиус цилиндрической поверхности.

Если цилиндрическую поверхность разрезать по винтовой линии и развернуть, то получится прямоугольный треугольник $A_0A_0'A_0''$ (рис. 77б), в котором $\overset{\frown}{A_1A_o} = r \cdot \varphi$, $A_oA_1' = 2\pi r$, $\overset{\frown}{A_1A_o} = A_1A_o$.

Тогда $\Delta A_o A_1 A_2 \sim \Delta A_o A_o' A_o''$, откуда можно записать пропорцию $\dfrac{S}{h} = \dfrac{A_o A_1}{A_o A_o'}$.

$$\frac{S}{h} = \frac{r \cdot \varphi}{2\pi r} \qquad \text{и} \qquad S = \frac{h}{2\pi}\varphi \ . \qquad (5)$$

Поступательное перемещение винта прямо пропорционально углу его поворота.

Формула (5) будет справедлива для скорости V и ускорения a поступательного перемещения винта.

$$v = \frac{h}{2\pi}\omega, \qquad a = \frac{h}{2\pi}\varepsilon \, . \qquad (6)$$

<u>Пример решения задачи</u>

На рис. 78 показан передаточный механизм, который состоит из винтовой пары *1*, клина *2*, зубчатой рейки *3*, двухступенчатого колеса 4 и ременной передачи со шкивами *5* и *6*.

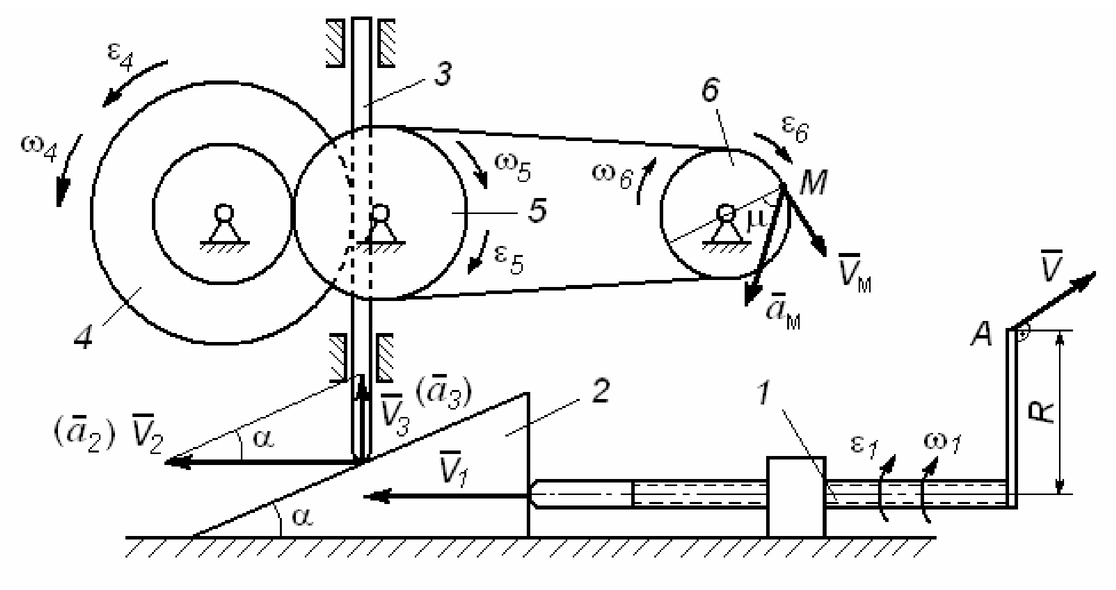


Рис. 78

Заданы следующие параметры: R = *0,4 м* – длина рукоятки винта; V = *0,6t (м/с)* – изменение скорости точки A конца рукоятки; S_A = *1,2 м* – пройденный путь точкой A по дуге окружности радиуса R; h = *0,04 м* – шаг винта; α = *70°* – угол наклона плоскости клина 2 к горизонту; r_4 = *0,6 м;* R_4 = *0,8 м;* r_6 = *0,8 м* – радиусы колес.

На рис. 78 зубчатая рейка 3 находится в зацеплении с двухступенчатым колесом 4.

Определить скорость и ускорение точки M в конце пройденного пути S_A, если $S_A(0) = 0$; $V_A(0) = 0.$

<u>Решение</u>

Определим время τ, за которое точка A пройдет по дуге окружности радиуса R путь S_A.

В естественном способе задания движения точки $v = \dfrac{dS}{dt} = 0,6t$.

Разделяя переменные, получим $\int dS = 0,6\int tdt + C_1$.

Окончательно $S = 0,3t^2 + C_1$. При $S_A(0) = 0$, $C_1 = 0$ и $S = 0,3t^2$.

Пройденный путь $S_A = S(\tau) - S(0) = 0,3t^2$.

Тогда $\tau = \sqrt{\dfrac{S_A}{0,3}} = \sqrt{\dfrac{1,2}{0,3}} = 2c$.

Скорость $v(\tau) = 0,6\tau = 0,6 \cdot 2 = 1,2м/c$.

Угловая скорость винта $\omega_1 = \dfrac{v(\tau)}{R} = \dfrac{1,2}{0,4} = 3c^{-1}$.

По формуле (6) вычисляем поступательную скорость винта, которая будет равна скорости клина 2.

$$v_1 = v_2 = \frac{h}{2\pi}\omega_1 = \frac{0,04}{2\pi} \cdot 3 \cong 0,02м/c.$$

В точке контакта клина *2* с рейкой *3* $\dfrac{v_3}{v_2} = tg\alpha$, откуда $v_3 = v_2 \cdot tg\alpha$.

При $\alpha = 70^o \qquad v_3 = 0{,}02 \cdot tg70^o \cong 0{,}055 м/с$.

Скорость v_3 является окружной скоростью для большого колеса *4*.

Поэтому $v_3 = \omega_4 R_4$, откуда $\omega_4 = \dfrac{v_3}{R_4} = \dfrac{0{,}055}{0{,}8} \cong 0{,}07 c^{-1}$.

Запишем пропорцию $\dfrac{\omega_5}{\omega_4} = \dfrac{r_4}{r_5}$, откуда

$$\omega_5 = \frac{r_4}{r_5}\omega_4 = \frac{0{,}6}{1{,}2} \cdot 0{,}07 = 0{,}035 c^{-1}.$$

$$\frac{\omega_6}{\omega_5} = \frac{r_5}{r_6}, \quad \omega_6 = \frac{r_5}{r_6}\omega_5 = \frac{1{,}2}{0{,}8} \cdot 0{,}035 = 0{,}053 c^{-1}. \quad \omega_6 = 0{,}053 c^{-1}.$$

Ускорение точки *А* тангенциальное $\quad a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 0{,}6 м/с^2$;

$$\varepsilon_1 = \frac{a_\tau}{R} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5 c^{-2}.$$

$$a_1 = a_2 = \frac{h}{2\pi}\varepsilon_1 = \frac{0{,}04}{2\pi} \cdot 1{,}5 \cong 0{,}01 м/с^2;$$

$$a_3 = a_2 tg\alpha = 0{,}01 \cdot tg70^o = 0{,}027 м/с^2;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_3}{R_4} = \frac{0{,}027}{0{,}8} = 0{,}034 c^{-2}; \ \varepsilon_5 = \frac{r_4}{r_5}\varepsilon_4 = \frac{0{,}6}{1{,}2} 0{,}034 = 0{,}017 c^{-2};$$

$$\varepsilon_6 = \frac{r_5}{r_6}\varepsilon_5 = \frac{1{,}2}{0{,}8} 0{,}017 = 0{,}026 c^{-2}.$$

Скорость точки *М* $\quad v_M = \omega_6 r_6 = 0{,}053 \cdot 0{,}8 = 0{,}042 м/с$.

По формуле (2) вычисляем ускорение точки *М*:

$$a_M = r_6\sqrt{\omega_B^4 + \varepsilon_B^2} = 0{,}6\sqrt{0{,}053^4 + 0{,}026^2} = 0{,}0157 м/с^2.$$

По формуле (3) определяем

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon_6|}{\omega_6^2} = \frac{0,026}{0,053} = 0,049, \qquad \mu = 26,1^\circ.$$

Ответ: $v_M = 0,042 м/с$; $a_M = 0,0157 м/с^2$; $\mu = 26,1^\circ$.

Все эти векторы показаны на рис. 78.