Задача С.1. Проекция силы на ось и момент силы относительно оси

На схемах рис. 2 – 4 показаны системы сил $\left\{\bar{Q},\bar{Q}',\bar{P},\bar{F}\right\}$ в прямоугольной системе координат. Геометрические размеры *a, b* и углы α, β – известны.

Во всех вариантах схем требуется найти проекции всех сил на оси координат и моменты этих сил относительно осей координат *Oxyz* двумя способами – аналитическим и графо-аналитическим.

1. Момент силы

Момент силы относительно точки *O* (рис. 1) – это вектор $\bar{M}_o(\bar{F})$, который всегда будет перпендикулярен плоскости (П), где лежит сила $\bar{F}$.

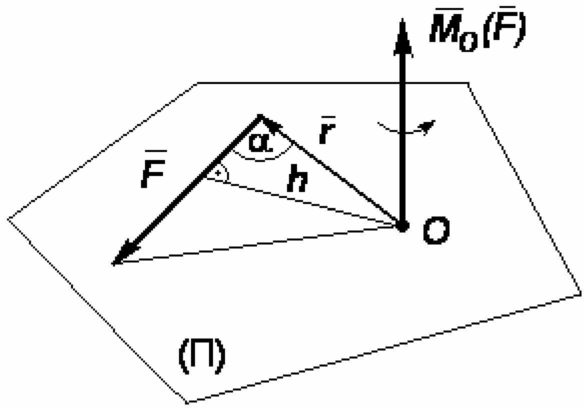

Рис. 1

Вектор – момент

$$\bar{M}_o(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F},$$

а по модулю

$$M_o(\bar{F}) = |\,\bar{r}\,| \cdot |\,\bar{F}\,| \cdot \sin(\hat{\bar{r},\bar{F}}) = Fr\sin\alpha = Fh.$$

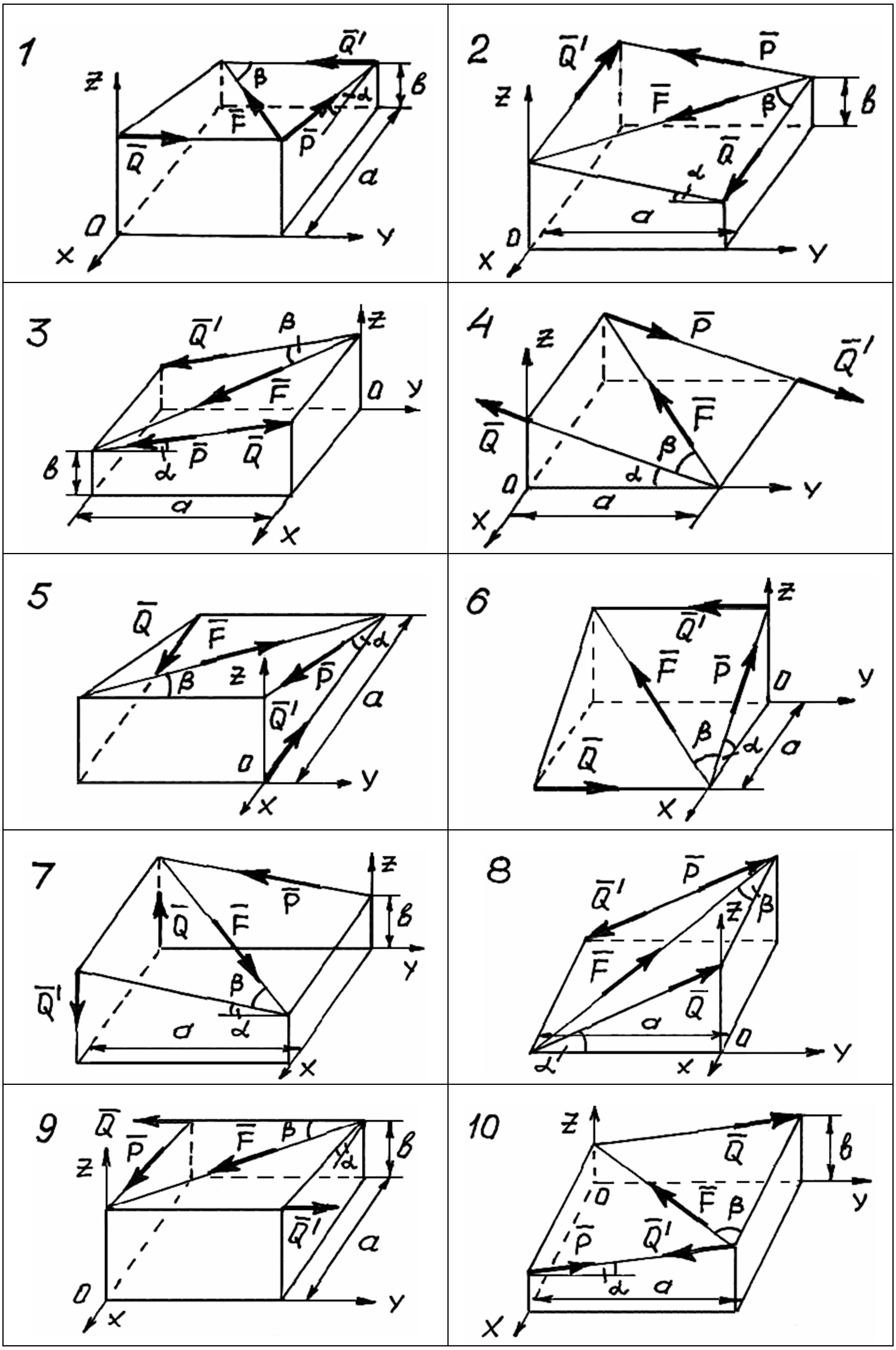

Рис. 2

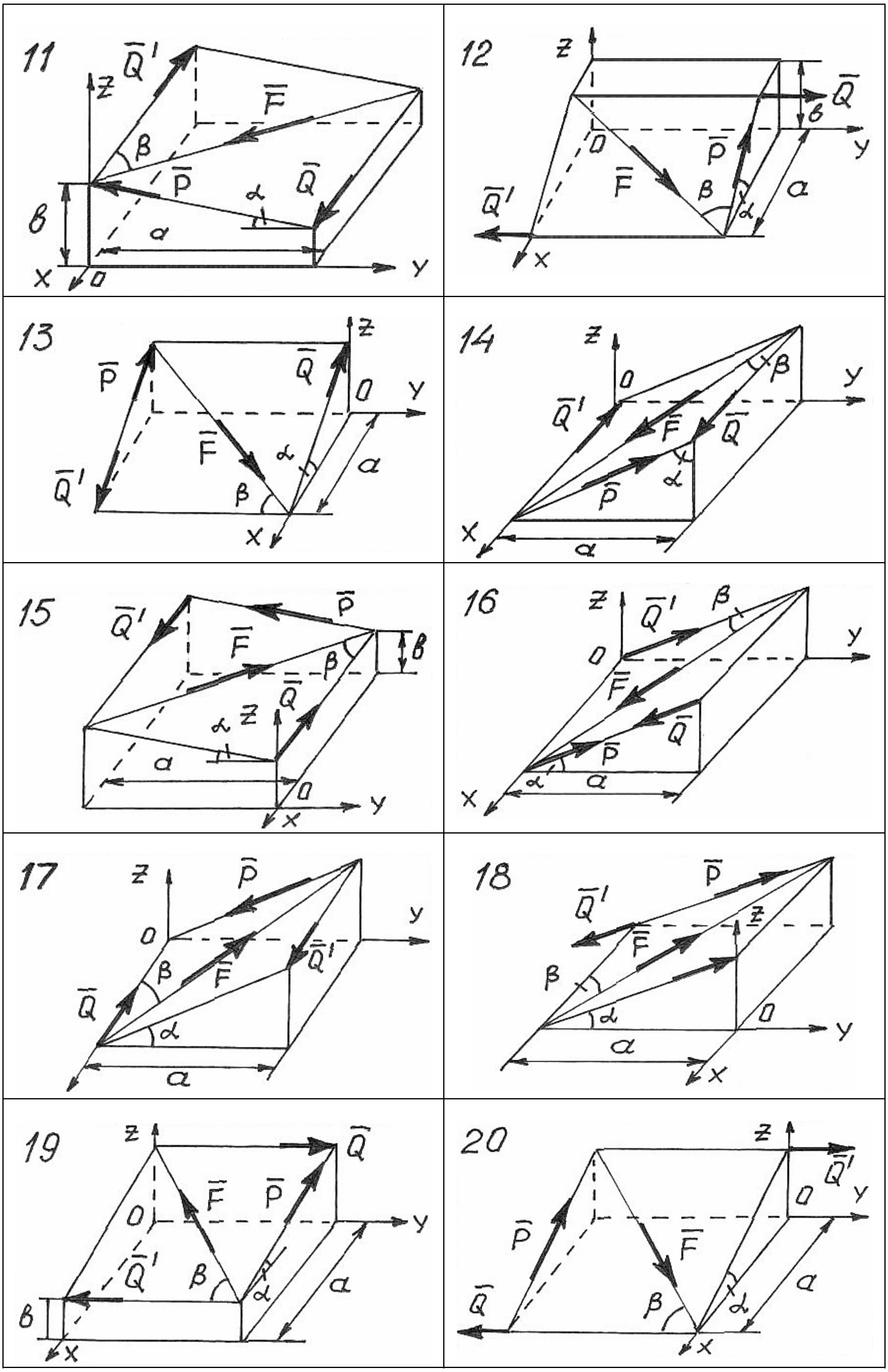

Рис. 3

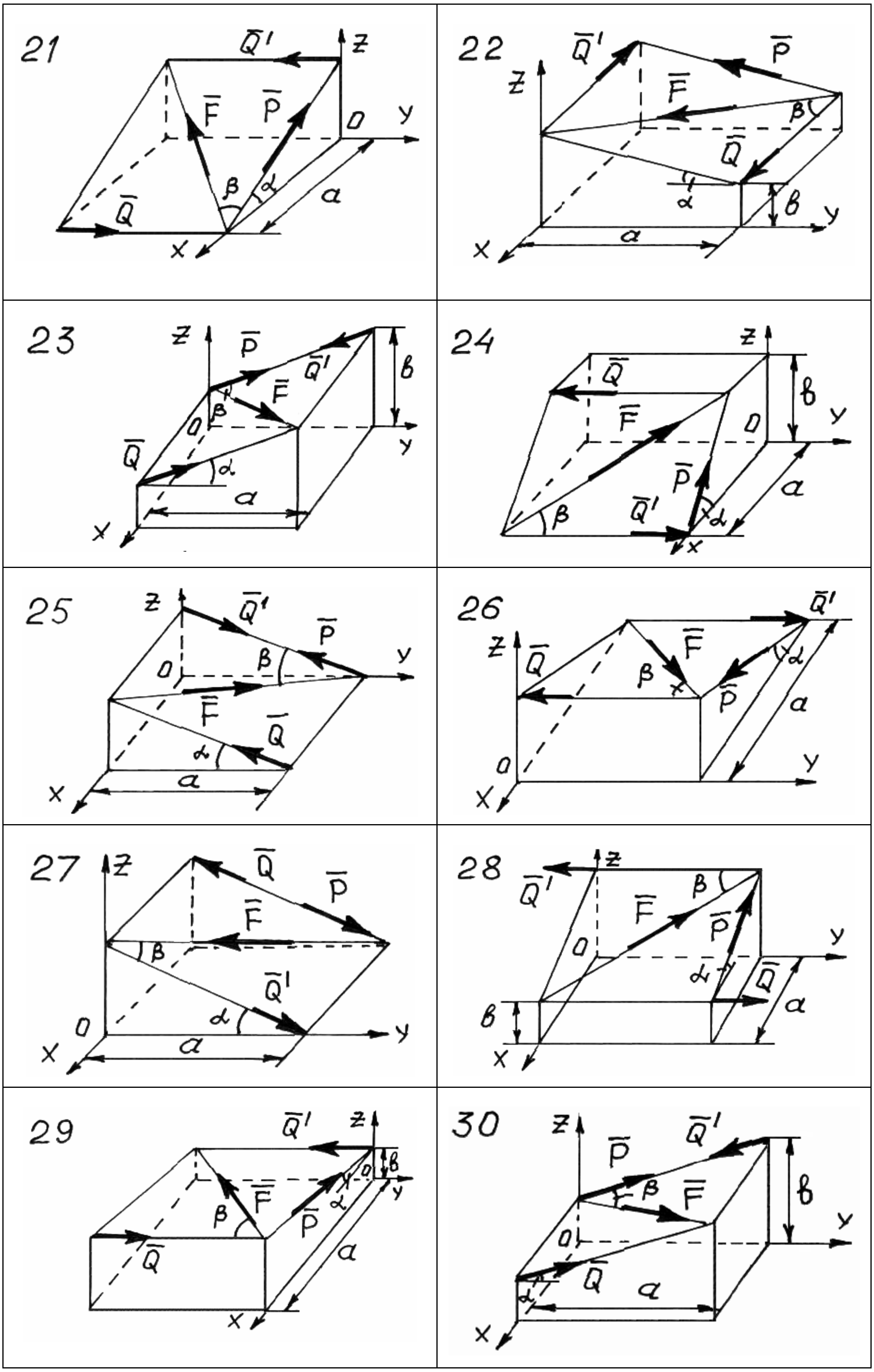

Рис. 4

Момент силы относительно точки, это алгебраическая величина, взятая со знаком « + » или « – » и равна произведению силы *F* на “плечо” *h*.

h – перпендикуляр, опущенный из точки *O* на линию действия силы $\bar{F}$.

Если сила $\bar{F}$ стремится вращать плоскость *(П)* против хода часовой стрелки, то принимается знак « + », в обратном направлении – знак « – ».

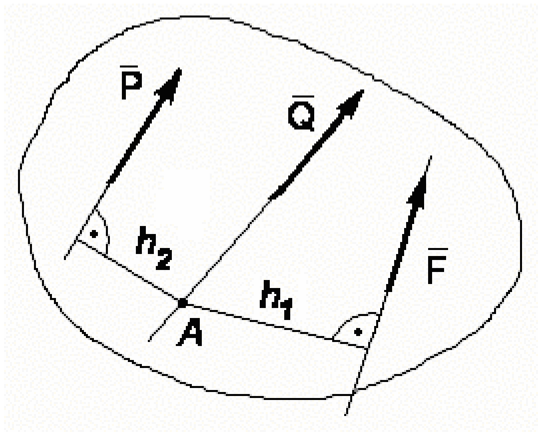

Рис. 5

Для схемы рис. 5: $M_A(\bar{F}) = +F \cdot h_1;\ M_A(\bar{P}) = -P \cdot h_2;\ M_A(\bar{Q}) = 0.$

<u>Если линия действия силы пересекает заданную точку, то момент этой силы относительно данной точки всегда будет равен нулю.</u>

Теперь рассмотрим аналитический способ вычисления момента силы относительно координатных осей.

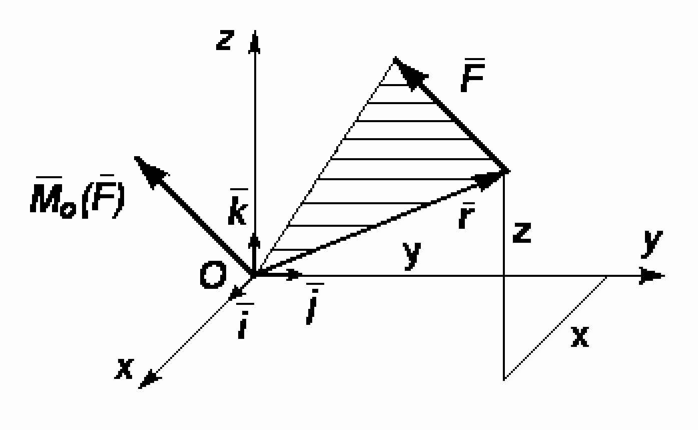

Рис. 6

На рис. 6 показан вектор-момент $\bar{M}_o(\bar{F})$ силы $\bar{F}$ относительно точки *O* начала координатных осей.

В проекциях на оси координат *xOyz*

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}\,. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты осей координат,

x, y, z – проекции радиус-вектора $\bar{r}$ на оси координат,

F_x, F_y, F_z – проекции силы $\bar{F}$ на те же оси координат.

Раскрывая определитель, можно записать

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{i}(yF_z - zF_y) + \bar{j}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), окончательно запишем аналитический способ вычисления момента силы относительно осей координат.

$$M_x = yF_z - zF_y,$$

$$M_y = zF_x - xF_z,$$

$$M_z = xF_y - yF_x.$$

Запишем определение для вычисления момента силы $\bar{F}$ относительно оси графо-аналитическим способом.

Чтобы вычислить момент силы $\bar{F}$ относительно оси, нужно (рис.7) провести плоскость *(П)* перпендикулярную этой оси и на эту плоскость спроецировать вектор силы $F_{xy} = F\cos\alpha$; а затем взять момент этой проекции F_{xy} относительно точки *O* пересечения оси *z* с плоскостью *(П)*.

Тогда $M_z(\bar{F}) = F_{xy} \cdot h = Fh\cos\alpha.$

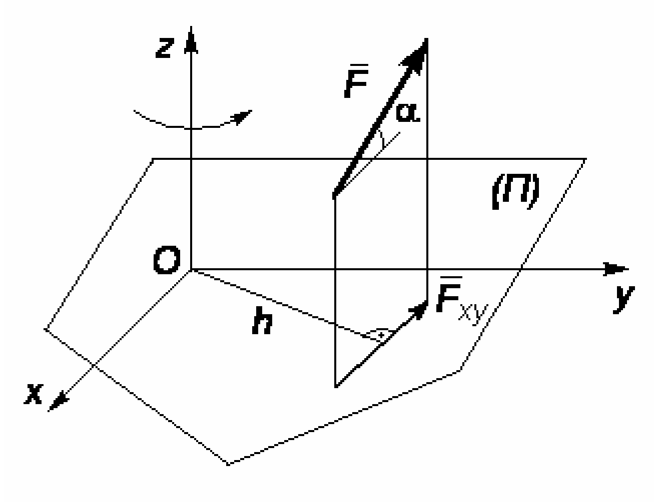

Рис. 7

Частные случаи:

а) $M_z(\bar{F}) = 0;\ \ F \neq 0;\ \ cos\alpha \neq 0;\ \ h = 0$ - линия действия силы $\bar{F}$ пересекает ось *Oz*.

б) $M_z(\bar{F}) = 0;\ F \neq 0;\ \ h \neq 0;\ \ cos\alpha = 0$ - линия действия силы $\bar{F}$ параллельна данной оси.

В этих двух случаях момент силы относительно оси всегда будет равен нулю.

Если смотреть на ось сверху и видеть, что проекция F_{xy} стремится вращать плоскость *(П)* против хода часовой стрелки, то момент силы будет иметь знак « + », а в другом направлении – знак « – ».

2. Момент пары сил

Парой сил называется система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рис. 8).

По определению $\bar{Q}' = -\bar{Q}$. Расстояние *d* между силами называется плечом пары. Плоскость (П), в которой лежит пара сил, называется плоскостью действия пары сил. Пару сил нельзя привести к равнодействующей силе, поэтому она сама является простейшей системой.

Действие пары сил удобно задавать с помощью вектора момента

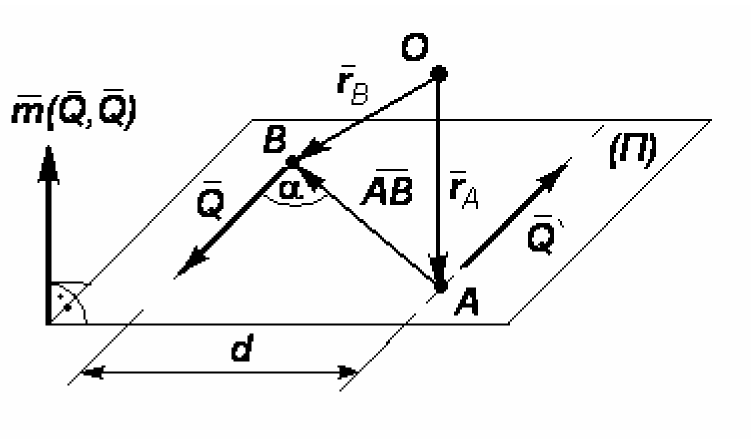

Рис. 8

пары сил. Вычислим сумму моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки *O*.

$$\bar{M}_o(\bar{Q})+\bar{M}_o(\bar{Q}')=\bar{r}_B\times\bar{Q}+\bar{r}_A\times\bar{Q}'=\bar{r}_B\times\bar{Q}-\bar{r}_A\times\bar{Q}=(\bar{r}_B-\bar{r}_A)\times\bar{Q}=A\bar{B}\times\bar{Q}.$$

Из полученного результата видно, что сумма моментов не зависит от положения моментной точки, а определяется только параметрами пары сил. Эта сумма обозначается $\bar{m}$ или $\bar{m}(\bar{Q},\bar{Q}')$ и называется вектором момента пары сил.

Таким образом, $\bar{m}(\bar{Q},\bar{Q}')=\bar{M}_o(\bar{Q})+\bar{M}_o(\bar{Q}')=A\bar{B}\times\bar{Q}.$

Напомним, что *A* и *B* произвольные точки на линии действия сил.

Вектор $\bar{m}$ полностью характеризует действие пары сил.

По модулю он равен $m=|A\bar{B}\times\bar{Q}|=Q\cdot AB\cdot sin\alpha=Q\cdot d$.

Вектор $\bar{m}$ перпендикулярен плоскости действия пары сил (П).

Вектор $\bar{m}$ по правилу векторного произведения всегда направлен туда, откуда поворот, который стремится вызвать пара сил, будет виден против хода часовой стрелки (правило правого винта).

Моменты пары сил относительно координатных осей можно вычислять аналитическим и графо-аналитическим способами.

Момент пары сил по существу является моментом одной из сил относительно произвольной точки на линии действия другой силы. Поэтому для аналитического расчета моментов можно использовать полученные ранее формулы. Применительно для пары сил, они имеют следующий вид

$$m_x = (\overline{AB})_y Q_z - (\overline{AB})_z Q_y;$$

$$m_y = (\overline{AB})_z Q_x - (\overline{AB})_x Q_z;$$

$$m_z = (\overline{AB})_x Q_y - (\overline{AB})_y Q_x.$$

Здесь $(\overline{AB})_x$, $(\overline{AB})_y$, $(\overline{AB})_z$ - проекции вектора $\overline{AB}$ соединяющего любые две точки на линии действия сил.

Q_x, Q_y, Q_z - проекции силы $\overline{Q}$, к которой направлен вектор $\overline{AB}$.

При графо-аналитическом расчете необходимо:

- на схеме показать вектор $\overline{m}$, направив его в любом месте перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение пары будет видно против хода часовой стрелки;
- вычислить модуль момента пары $m = Q \cdot d$;
- спроецировать вектор $\overline{m}$ на оси координат и в полученные выражения подставить модуль момента пары сил.

<u>Пример решения задачи</u>

Для системы сил на рис. 9 требуется найти проекции всех сил на оси координат и моменты этих сил относительно осей координат *Oxyz* двумя способами – аналитическим и графо-аналитическим.

Моменты силы $\overline{P}$

<u>Аналитический способ</u>

Запишем формулы для аналитического расчета моментов силы $\overline{P}$

$$M_x(\overline{P}) = yP_z - zP_y;$$

$$M_y(\overline{P}) = zP_x - xP_z;$$

$$M_z(\overline{P}) = xP_y - yP_x.$$

Выберем на линии действия силы $\overline{P}$ произвольную точку, например точку *K*, и запишем ее координаты. $x = DA;\quad y = 0;\quad z = DE.$

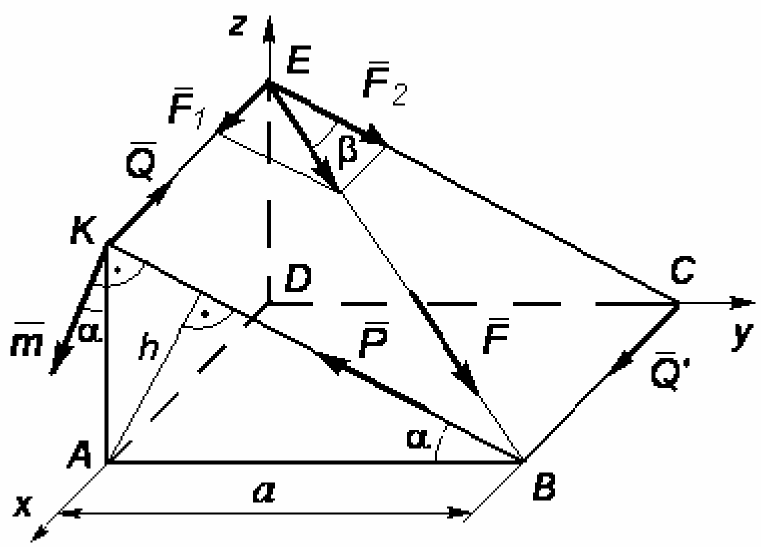

Рис. 9

Так как $DA = EK = BK \cdot tg\beta = \dfrac{a}{cos\alpha} \cdot tg\beta$ и $DE = a \cdot tg\alpha$, то

$$x = \frac{a}{cos\alpha} \cdot tg\beta; \qquad y = 0; \qquad z = a \cdot tg\alpha .$$

Вычислим проекции силы $\bar P$ на оси координат

$$P_x = 0; \quad P_y = -Pcos\alpha; \quad P_z = Psin\alpha .$$

Подставим найденные значения в формулы для аналитического расчета моментов и получим

$$M_x(\bar P) = 0 - a \cdot tg\alpha \cdot (-Pcos\alpha) = a \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot Pcos\alpha = a \cdot Psin\alpha;$$

$$M_y(\bar P) = a \cdot tg\alpha \cdot 0 - \frac{a}{cos\alpha} \cdot tg\beta \cdot Psin\alpha = -a \cdot P \cdot tg\alpha \cdot tg\beta;$$

$$M_z(\bar P) = \frac{a}{cos\alpha} \cdot tg\beta \cdot (-Pcos\alpha) - 0 = -a \cdot P \cdot tg\beta.$$

Таким образом,

$$M_x(\bar P) = a \cdot Psin\alpha;$$

$$M_y(\bar P) = -a \cdot P \cdot tg\alpha \cdot tg\beta;$$

$$M_z(\bar P) = -a \cdot P \cdot tg\beta.$$

<u>Графо-аналитический способ</u>

Вычислим момент силы $\bar{P}$ относительно оси *Ox*. Сила $\bar{P}$ лежит в плоскости *ABK*, которая перпендикулярна оси. Из точки *A* пересечения оси с этой плоскостью опускаем на линию действия силы перпендикуляр. Из треугольника *ABK* найдем длину этого перпендикуляра $h = a \cdot sin\alpha$. Составим произведение численного значения силы на длину перпендикуляра. Так как с положительного конца оси *Ox* мы видим вращение, которое стремится вызвать сила относительно оси, против хода часовой стрелки, то перед произведением ставим знак « + ». Таким образом $M_x(\bar{P}) = +P \cdot h = P \cdot a sin\alpha$.

Вычислим момент силы $\bar{P}$ относительно оси *Oy*. Спроецируем силу $\bar{P}$ в плоскость *ADEK*, которая перпендикулярна оси *Oy*. Проекция силы будет направлена по прямой *AK*, а ее численное значение $P_{xz} = Psin\alpha$. Из точки *D* пересечения оси с плоскостью *ADEK* опускаем на линию действия силы перпендикуляр *DA*. Как было найдено ранее, $DA = \dfrac{a}{cos\alpha} \cdot tg\beta$. Составим произведение численного значения проекции силы P_{xz} на длину перпендикуляра *DA*. Так как с положительного конца оси *Oy* мы видим вращение, которое стремится вызвать проекция силы относительно оси, по ходу часовой стрелки, то перед произведением ставим знак « – ». Таким образом,

$$M_y(\bar{P}) = -P_{xz} \cdot DA = -Psin\alpha \cdot \frac{a}{cos\alpha} tg\beta = -a \cdot Ptg\alpha \cdot tg\beta .$$

Вычислим момент силы $\bar{P}$ относительно оси *Oz*. Спроецируем силу $\bar{P}$ в плоскость *ABCD*, которая перпендикулярна оси *Oz*. Проекция силы будет направлена по прямой *BA*, а ее численное значение $P_{xy} = Pcos\alpha$. Из точки *D* пересечения оси с плоскостью *ABCD* опускаем на линию действия силы перпендикуляр *DA*. Составим произведение численного значения проекции силы P_{xy} на длину перпендикуляра *DA*. Так как с положительного конца оси *Oz* мы видим вращение, которое стремится вызвать проекция силы относительно оси, по ходу часовой стрелки, то перед произведением ставим знак « – ». Таким образом,

$$M_z(\bar{P}) = -P_{xy} \cdot DA = -Pcos\alpha \cdot \frac{a}{cos\alpha} tg\beta = -a \cdot P \cdot tg\beta .$$

Итак, $$M_x(\bar{P}) = a \cdot Psin\alpha ;$$

$$M_y(\bar{P}) = -a \cdot P \cdot tg\alpha \cdot tg\beta ;$$

$$M_z(\bar{P}) = -a \cdot P \cdot tg\beta .$$

Оба способа дают одинаковый результат.

Моменты силы $\bar{F}$

Для облегчения вычисления проекций и моментов силы $\bar{F}$ перенесем ее вдоль линии действия силы в точку *E* и разложим по двум направлениям на две силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$. При этом очевидно, что

$$F_1 = Fsin\beta , \quad F_2 = Fcos\beta , \quad \bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 .$$

<u>Аналитический способ</u>

Запишем формулы для аналитического расчета моментов силы $\bar{F}$.

$$M_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y ;$$

$$M_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z ;$$

$$M_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x .$$

Выберем на линии действия силы $\bar{F}$ произвольную точку, например точку *E*, и запишем ее координаты. $x = 0; \quad y = 0; \quad z = DE.$

Так как $DE = a \cdot tg\alpha$, то

$$x = 0; \qquad y = 0; \qquad z = a \cdot tg\alpha.$$

Вычисляем проекции силы $\bar{F}$ на оси координат

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 + 0 = Fsin\beta;$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + F_2cos\alpha = Fcos\beta cos\alpha;$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} = 0 - F_2 sin\alpha = Fcos\beta sin\alpha.$$

Подставим найденные значения в формулы для аналитического расчета моментов и получим

$$M_x(\bar{F}) = 0 - a \cdot tg\alpha \cdot Fcos\beta \cdot cos\alpha = -a \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot Fcos\beta \cdot cos\alpha = -a \cdot Fsin\alpha \cdot cos\beta;$$

$$M_y(\bar{F}) = a \cdot tg\alpha \cdot Fsin\beta - 0 = a \cdot Ftg\alpha \cdot sin\beta;$$

$$M_z(\bar{F}) = 0 - 0.$$

Итак,

$$M_x(\bar{F}) = -a \cdot Fsin\alpha \cdot cos\beta;$$

$$M_y(\bar{F}) = a \cdot Ftg\alpha \cdot sin\beta;$$

$$M_z(\bar{F}) = 0.$$

Графо-аналитический способ

Так как силу $\bar{F}$ мы разложили на две составляющие, то момент силы $\bar{F}$ будет равен сумме моментов силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$.

Вычислим момент силы $\bar{F}$ относительно оси *Ox*.

$$M_x(\bar{F}) = M_x(\bar{F}_1) + M_x(\bar{F}_2) = 0 - F_2 \cdot h = -Fcos\beta \cdot asin\alpha.$$

Момент $M_x(\bar{F}_1) = 0$, так как сила $\bar{F}_1$ параллельна оси *Ox*, а расстояние от точки *D* до силы $\bar{F}_2$ - *h*. Если посмотреть с положительного направления оси *Ox*, то сила $\bar{F}_2$ стремится вызвать вращение по ходу движения часовой стрелки. Поэтому перед моментом ставим знак « – ».

Вычислим момент силы $\bar{F}$ относительно оси *Oy*.

$$M_y(\bar{F}) = M_y(\bar{F}_1) + M_y(\bar{F}_2) = F_1 \cdot DE + 0 = Fsin\beta \cdot a \cdot tg\alpha.$$

Момент $M_y(\bar{F}_2) = 0$, так как линия действия силы $\bar{F}_2$ пересекает ось *Oy*. Сила $\bar{F}_1$ лежит в плоскости *Oxz*. Если посмотреть с положительного направления оси *Oy*, то эта ось будет видна как точка *D*, расстояние от нее до силы $\bar{F}_1$ - DE. Так как сила $\bar{F}_1$ стремится вызвать вращение против хода часовой стрелки, то знак момента « + ».

Вычислим момент силы $\bar{F}$ относительно оси Oz.

$M_z(\bar{F}) = M_z(\bar{F}_1) + M_z(\bar{F}_2) = 0.$

$M_z(\bar{F}) = 0$, так как линия действия силы $\bar{F}$ пересекает ось Oz.

Итак, имеем

$$M_x(\bar{F}) = -a \cdot Fsin\alpha \cdot cos\beta;$$

$$M_y(\bar{F}) = a \cdot Ftg\alpha \cdot sin\beta;$$

$$M_z(\bar{F}) = 0.$$

Оба способа дают один и тот же результат.

Моменты пары сил $(\bar{Q}, \bar{Q}')$

Для простоты вычислений в качестве произвольных точек на линии действия пар сил выбираем точки K и B. Проведем вектор $\overline{KB}$ к силе $\bar{Q}'$. Тогда момент пары $(\bar{Q}, \bar{Q}')$ запишется в виде

$\bar{m} = \overline{KB} \times \bar{Q}'$.

Плечо пары $d = KB = \dfrac{a}{cos\alpha}$.

<u>Аналитический способ</u>

Запишем формулы для аналитического расчета моментов пары сил $(\bar{Q}, \bar{Q}')$.

$$m_x = (\overline{KB})_y Q'_Z - (\overline{KB})_z Q'_y;$$

$$m_y = (\overline{KB})_z Q'_x - (\overline{KB})_x Q'_z;$$

$$m_z = (\overline{KB})_x Q'_y - (\overline{KB})_y Q'_x.$$

Проекции вектора $\overline{KB}$ на оси: $(\overline{KB})_x = 0;$ $(\overline{KB})_y = KB \cdot cos\alpha = a;$

$$(\overline{KB})_z = -KB \cdot sin\alpha = -\frac{a}{cos\alpha} sin\alpha = -a \cdot tg\alpha.$$

Проекции силы $\overline{Q}'$ на оси: $Q'_x = Q' = Q;$ $Q'_y = 0;$ $Q'_z = 0.$

Подставив значения проекций в формулы, получаем

$$m_x = a \cdot 0 - (-atg\alpha) \cdot 0 = 0;$$
$$m_y = -atg\alpha \cdot Q - 0 = -Q \cdot atg\alpha;$$
$$m_z = 0 - a \cdot Q = -Q \cdot a.$$

<u>Графо-аналитический способ</u>

Построим вектор пары сил $\overline{m}$. Для этого в любой точке, например K, плоскости действия пары проведем к ней перпендикуляр. Так как сверху мы видим вращение пары по ходу часовой стрелки, то по правилу правого винта направляем $\overline{m}$ вниз. По модулю он равен

$$m = Q \cdot d = Q \cdot \frac{a}{cos\alpha}.$$

Спроецируем вектор $\overline{m}$ на оси, тогда

$$m_x = 0;$$
$$m_y = -m \cdot sin\alpha = -Q\frac{a}{cos\alpha} \cdot sin\alpha = -Q \cdot atg\alpha;$$
$$m_z = -m \cdot cos\alpha = -Q\frac{a}{cos\alpha} \cdot cos\alpha = -Q \cdot a.$$

Итак, в обоих случаях мы получили одинаковый результат

$$m_x = 0;$$
$$m_y = -Q \cdot atg\alpha;$$
$$m_z = -Q \cdot a.$$