Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = -3 \\ 3x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 2 & -1 & 2 & | & -3 \\ 3 & 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 2 & -1 & 2 & | & -3 \\ 3 & 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & -5 & 4 & | & -11 \\ 3 & 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & -5 & 4 & | & -11 \\ 0 & -5 & 6 & | & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & -5 & 4 & | & -11 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3/2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & -5 & 4 & | & -11 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 5 & -4 & | & 11 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 5 & 0 & | & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2/5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Ответ: система совместна и имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.